Capitolo 9

Equilibri e stabilità

Considero le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = Q(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\,,$$

per vincoli fissi, cioè $T = T_2 = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$, e per forze non dipendenti da t. Le equazioni di Lagrange si possono scrivere

$$A(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$$

con

$$\mathbf{F}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) - \frac{d}{dt}\left[A(\mathbf{q})\right]\dot{\mathbf{q}}\ .$$

Queste equivalgono al sistema del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = A^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{F}(\mathbf{q},\mathbf{v}) \end{cases} . \tag{9.1}$$

Poichè $\mathbf{F}(\mathbf{q},\mathbf{0}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q},\mathbf{0})$, i punti di equilibrio sono della forma $(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{q}_0,\mathbf{0})$, con

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}_0,\mathbf{0}) = \mathbf{0}\ . \tag{9.2}$$

I valori $\mathbf{q}_0$, soluzioni di (9.2), si chiamano **configurazioni di equilibrio**.

Se le forze attive derivano da un'energia potenziale generalizzata $V(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = V_0(\mathbf{q}) + V_1(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$, con $V_1(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{a}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}$, possiamo scrivere la lagrangiana

$$L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - V(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\ .$$

In questo caso l'equazione

$$\frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) = 0 \tag{9.3}$$

definisce le configurazioni di equilibrio, infatti

$$\mathbf{Q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{q}}, \qquad \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = \frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) \ .$$

9.1 Linearizzazione attorno a un equilibrio

Considero un punto di equilibrio $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ ed analizzo la sua stabilità linearizzando le equazioni (9.1) attorno ad esso.

Le equazioni linearizzate sono

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = A^{-1}(\mathbf{q}_0)\left[\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})\dot{\mathbf{q}}\right] \end{cases} . \tag{9.4}$$

Se le forze attive derivano dall'energia potenziale $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = V_0(\mathbf{q}) + \mathbf{a}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}$ si ha $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -\frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) + B\dot{\mathbf{q}}$ (vedi Sezione 7.4) e le equazioni linearizzate sono

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -A^{-1}(\mathbf{q}_0)\left[V_0''(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) - B(\mathbf{q}_0)\dot{\mathbf{q}}\right] \end{cases} \tag{9.5}$$

dove B è antisimmetrica con componenti $B_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial q_i}$. Le (9.5) sono le equazioni di Lagrange per la funzione

$$\begin{aligned} L_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}_0)\dot{\mathbf{q}} - V_0(\mathbf{q}_0) - \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \cdot V_0''(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \\ &- \left[\mathbf{a}(\mathbf{q}_0) + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)\right] \cdot \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \tag{9.6}$$

che è lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ in $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$. Per verificare che le (9.5) corrispondono alle equazioni di Lagrange per L_0 possiamo ignorare il termine $-\mathbf{a}(\mathbf{q}_0) \cdot \dot{\mathbf{q}}$ e considerare la lagrangiana equivalente

$$\tilde{L}_0 = L_0 + \mathbf{a}(\mathbf{q}_0) \cdot \dot{\mathbf{q}}.$$

Dalle relazioni

$$\frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = A(\mathbf{q}_0)\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0), \qquad \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \mathbf{q}} = -V_0''(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) - \left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0)\right]^T \dot{\mathbf{q}}$$

si ottiene

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \mathbf{q}} = A(\mathbf{q}_0)\ddot{\mathbf{q}} - \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) - \left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0)\right]^T\right)\dot{\mathbf{q}} + V_0''(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0),$$

che dimostra che le equazioni di Lagrange per $\tilde{L}_0$ corrispondono alle (9.5).

Nel caso particolare in cui $V = V_0$ si ottiene

$$L_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}_0)\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \cdot V''(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \ . \tag{9.7}$$

Le equazioni di Lagrange per (9.7) sono

$$A(\mathbf{q}_0)\ddot{\mathbf{q}} + V''(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) = \mathbf{0} \tag{9.8}$$

e si possono scrivere come

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\xi}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} = \Lambda(\mathbf{q}_0) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} , \tag{9.9}$$

con

$$\Lambda(\mathbf{q}_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -A^{-1}V''(\mathbf{q}_0) & \mathbf{0} \end{bmatrix} , \qquad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} - \mathbf{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} .$$

In questo caso la matrice del sistema linearizzato ha autovalori che dipendono solo dagli autovalori di $A^{-1}V''(\mathbf{q}_0)$. Siccome $A(\mathbf{q}_0)$, $V''(\mathbf{q}_0)$ sono simmetriche, con A definita positiva, sappiamo (vedi Sezione 9.7) che gli autovalori λ_h di $A^{-1}V''(\mathbf{q}_0)$ sono reali e che possiamo trovare una base di autovettori $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_h\}_{h=1\ldots n}$ ortonormali rispetto al prodotto scalare definito da $A(\mathbf{q}_0)$, cioè tali che

$$\mathbf{u}_h \cdot A(\mathbf{q}_0)\mathbf{u}_k = \delta_{hk} \ .$$

Tali autovalori si possono calcolare risolvendo l'**equazione secolare**

$$\det(V''(\mathbf{q}_0) - \lambda A(\mathbf{q}_0)) = 0 \, ,$$

evitando quindi di calcolare $A^{-1}(\mathbf{q}_0)$. Inoltre si ha

$$\mathbf{u}_h \cdot V''(\mathbf{q}_0)\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_h \cdot \lambda_k A(\mathbf{q}_0)\mathbf{u}_k = \lambda_k \delta_{hk} \, ,$$

cioè nella base $\mathcal{B}$ entrambe le matrici $A(\mathbf{q}_0), V''(\mathbf{q}_0)$ sono in forma diagonale.

Se $\{\lambda_h\}_{h=1\ldots n}$, sono gli autovalori di $A^{-1}V''(\mathbf{q}_0)$ allora gli autovalori di $\Lambda(\mathbf{q}_0)$ sono

$$\pm\sqrt{-\lambda_h}, \qquad h = 1 \ldots n \ .$$

In particolare, se $\lambda_k < 0$ per qualche k allora $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ è instabile perché il sistema (9.9) ha un esponente di Lyapounov positivo.

Se $\lambda_h > 0$ per $h = 1 \ldots n$ allora gli esponenti di Lyapounov sono tutti nulli ed il metodo di linearizzazione non ci permette di concludere sulla stabilità di $\mathbf{q}_0$. In questo caso possiamo usare il metodo della funzione di Lyapounov, come discusso nella prossima sezione.

9.2 Il teorema di Lagrange-Dirichlet

Si consideri un punto di equilibrio $\mathbf{x}_0$ del sistema di equazioni differenziali

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{9.10}$$

Definizione 23. *Una funzione $f \in C^1(U;\mathbb{R})$, definita in un intorno U di un punto di equilibrio $\mathbf{x}_0$ di (9.10), è una funzione di Lyapounov per $\mathbf{x}_0$ se valgono le seguenti proprietà:*

i) $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$ *per ogni* $\mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{x}_0\}$*;*

ii) $\dfrac{d}{dt}f(\mathbf{x}) \leq 0$ *per ogni* $\mathbf{x} \in U$*.*

Vale il seguente risultato:

Teorema 5. *(Lyapounov) Se un punto di equilibrio ammette una funzione di Lyapounov, allora è stabile.*

Dimostrazione. ... □

Teorema 6. *Considero il sistema lagrangiano definito da*

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - V_0(\mathbf{q}) - V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \ . \tag{9.11}$$

Se $\mathbf{q}_0$ è un minimo locale stretto di V_0 allora è una configurazione di equilibrio stabile.

Dimostrazione. Si osserva che $\mathbf{q}_0$ è una configurazione di equilibrio in quanto soddisfa (9.3). Siccome la lagrangiana (9.11) non dipende da t, allora la funzione

$$J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + V_0(\mathbf{q}) \ .$$

è un integrale primo delle equazioni di Lagrange per L (integrale di Jacobi). Inoltre $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ è un punto di minimo locale stretto per $J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, quindi si può usare $J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ come funzione di Lyapounov relativa al punto $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ restringendola ad un opportuno intorno di tale punto.

□

9.3 Analisi della stabilità dei sistemi lagrangiani

Nel caso in cui le forze generalizzate siano conservative, con energia potenziale $V = V_0(\mathbf{q})$, l'analisi del solo spettro di $V''(\mathbf{q}_0)$, dove $\mathbf{q}_0$ è una configurazione di equilibrio, ci può permettere di studiare la stabilità dei punti di equilibrio di (9.9).

Se $V''(\mathbf{q}_0)$ ha tutti gli autovalori positivi allora $\mathbf{q}_0$ è un minimo stretto (non degenere) di V, quindi il punto $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

Se $V''(\mathbf{q}_0)$ ha un autovalore $\mu < 0$ con autovettore $\mathbf{v}$, sia $\mathbf{v} = \sum_h v_h \mathbf{u}_h$ l'espressione di $\mathbf{v}$ come combinazione lineare degli elementi della base $\mathcal{B}$. Allora

$$\begin{aligned} 0 \quad > \quad & \mu|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot V''(\mathbf{q}_0)\mathbf{v} = \sum_{h,k=1}^{n} v_h v_k \mathbf{u}_h \cdot V''(\mathbf{q}_0)\mathbf{u}_k = \sum_{h,k=1}^{n} v_h v_k \lambda_k \mathbf{u}_h \cdot A(\mathbf{q}_0)\mathbf{u}_k = \\ = \quad & \sum_{h,k=1}^{n} v_h v_k \lambda_k \delta_{hk} = \sum_{h=1}^{n} v_h^2 \lambda_h \,, \end{aligned}$$

quindi esiste k con $\lambda_k < 0$ ed il punto $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ è instabile.

9.4 Stabilizzazione con termini girostatici

Se le componenti lagrangiane delle forze attive ammettono un energia potenziale generalizzata $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = V_0(\mathbf{q}, t) + V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ è possibile che un punto di massimo di V_0 sia stabile: infatti la presenza del termine V_1 modifica lo spettro del linearizzato, anche se non modifica gli equilibri. Questo fenomeno si chiama **stabilizzazione girostatica**.

Esempio 17. *(oscillatore armonico in un riferimento rotante)*

Fissiamo un sistema di riferimento $\Sigma = O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$ in $\mathbb{R}^3$. Consideriamo un punto materiale di massa m collegato all'origine O del riferimento da una molla di costante elastica k. Scegliamo delle condizioni iniziali $\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0$ per il punto al tempo $t = 0$. Siccome il campo di forze è centrale, dalla conservazione del momento angolare sappiamo che il moto è piano. Possiamo quindi orientare il riferimento Σ in modo tale che, per queste condizioni iniziali, il moto avvenga nel piano Oxy. Consideriamo adesso un riferimento $\Sigma' = O'\hat{\mathbf{e}}'_1\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3$, con $O' = O$, e con velocità angolare costante $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega\hat{\mathbf{e}}_3$, $\omega \neq 0$, rispetto a Σ.

La stabilità dell'origine per l'oscillatore armonico è nota a priori in Σ, e vale anche in Σ'. Introduciamo coordinate cartesiane $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ relative a Σ' e studiamo la stabilità dell'equilibrio $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$ nel riferimento rotante con il metodo della linearizzazione.

L'energia potenziale, tenendo conto delle forze apparenti, è

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}k|\mathbf{q}|^2 - \frac{1}{2}m|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}|^2 + m\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \cdot (kI + m\Omega^2)\mathbf{q} + m\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}}, \quad (9.12)$$

con

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Possiamo scrivere la (9.12) come $V = V_0 + V_1$, con V_j omogenea di grado j in $\dot{\mathbf{q}}$.

Gli equilibri (in questo caso solo $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$*) si ottengono cercando i punti critici di* V_0*. Se* $\omega^2 > \frac{k}{m}$ *allora* V_0'' *ha autovalori negativi, quindi se considerassimo solo il termine* V_0 *per lo studio della stabilità si otterrebbe che l'origine è instabile.*

Includiamo adesso anche V_1 *nello studio della stabilità. Le equazioni del moto corrispondenti all'energia potenziale (9.12) si scrivono*

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{k}{m}\mathbf{q} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}}$$

oppure, come sistema del primo ordine,

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -(\frac{k}{m}I + \Omega^2) & -2\Omega \end{bmatrix}.$$

Dato che la terza componente di $\mathbf{q}$ *e di* $\dot{\mathbf{q}}$ *è identicamente nulla, possiamo descrivere il moto con il sistema*

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \beta I & -2\omega J \end{bmatrix},$$

dove

$$\mathbf{z} = (q_1, q_2)^T, \qquad \beta = \omega^2 - \frac{k}{m}, \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di Γ *si ottengono dall'equazione*

$$|\Gamma - \lambda I| = \lambda^4 + 2(2\omega^2 - \beta)\lambda^2 + \beta^2 = 0. \tag{9.13}$$

Il discriminante è

$$\Delta = 16\omega^2(\omega^2 - \beta) = 16\omega^2\frac{k}{m} > 0,$$

quindi le radici λ^2 *di (9.13) sono reali e distinte. Inoltre, dato che* $2\omega^2 > \beta$*, per la regola dei segni di Cartesio le radici* λ^2 *sono negative o nulle e gli autovalori di* Γ *sono immaginari puri o nulli:*

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega, \qquad \lambda_{3,4} = \pm i\omega', \qquad \omega' \neq \omega.$$

Da questa analisi spettrale non possiamo concludere la stabilità dell'origine, però non possiamo nemmeno escluderla.

Osservazione 24. *L'esempio precedente mostra che nel teorema di Lagrange-Dirichlet l'ipotesi che* $\mathbf{q}_0$ *sia un punto di minimo stretto per* V_0 *è una condizione sufficiente, ma non necessaria, per la stabilità di* q_0*.*

9.5 Piccole oscillazioni attorno a un equilibrio stabile

Assumiamo che la lagrangiana abbia la forma

$$L = T_2 - V_0\,,$$

e che $\mathbf{q}_0$ sia un minimo non degenere di V_0.

Calcolo gli autovalori generalizzati λ_h, $h = 1 \dots n$, soluzioni di

$$\det(V''(\mathbf{q}_0) - \lambda A(\mathbf{q}_0)) = \mathbf{0}.$$

La soluzione generale del sistema (9.8) è

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 + \sum_{h=0}^{n} c_h \cos(\omega_h t + \phi_h)\mathbf{u}_h$$

con $c_h \geq 0$, $\phi_h \in S^1$, $\omega_h = \sqrt{\lambda_h} > 0$.

Le quantità ω_h si chiamano **frequenze proprie** del sistema e le famiglie di soluzioni particolari

$$c_h \cos(\omega_h t + \phi_h)\mathbf{u}_h\,, \qquad h = 1 \dots n$$

si chiamano **modi normali** di oscillazione attorno all'equilibrio $\mathbf{q}_0$.

9.6 Alcuni esempi

Esempio 18. *Si consideri il sistema meccanico in Figura 9.1. Calcolare tutti gli equilibri e studiarne la stabilità al variare dei paramentri.*

L'energia potenziale è data da

$$V(\theta, \phi) = 2k_1(\cos\phi - \cos\theta) - k_2\cos(\phi - \theta)$$

Gli equilibri sono le soluzioni di

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \theta}(\theta, \phi) &= 2k_1 \sin\theta - k_2 \sin(\phi - \theta) = 0 \\
\frac{\partial V}{\partial \phi}(\theta, \phi) &= -2k_1 \sin\phi + k_2 \sin(\phi - \theta) = 0
\end{aligned}$$

Sommando le due equazioni si ha

$$\sin\theta = \sin\phi \tag{9.14}$$

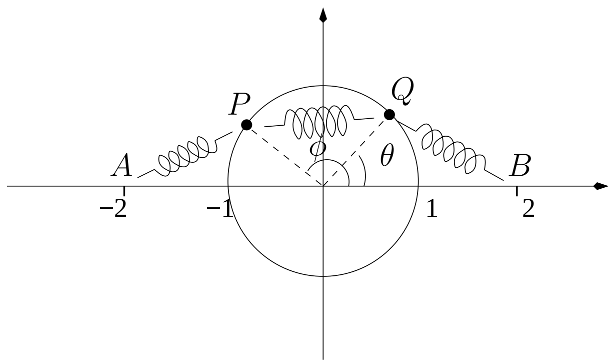

Figura 9.1:

e sostituendo nella prima

$$\sin\theta[2k_1 + k_2(\cos\phi - \cos\theta)] = 0$$

Abbiamo quindi le quattro configurazioni di equilibrio

$$(\theta, \phi) = (0, 0); \quad (0, \pi); \quad (\pi, 0); \quad (\pi, \pi)$$

e, se $k_1 < k_2$, anche le due configurazioni $(\theta, \phi) = (\bar\theta, \bar\phi)$, con $\bar\theta$ soluzione di $\cos\theta = k_1/k_2$ e $\bar\phi = \pi - \bar\theta$. Studiamo la stabilità di questi equilibri. Le derivate seconde di V sono

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}(\theta, \phi) &= 2k_1\cos\theta + k_2\cos(\phi - \theta) \\
\frac{\partial^2 V}{\partial\phi\partial\theta}(\theta, \phi) &= -k_2\cos(\phi - \theta) \\
\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}(\theta, \phi) &= -2k_1\cos\phi + k_2\cos(\phi - \theta)
\end{aligned}$$

$$V''(0,0) = \begin{bmatrix} 2k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -2k_1 + k_2 \end{bmatrix}, \qquad V''(0,\pi) = \begin{bmatrix} 2k_1 - k_2 & k_2 \\ k_2 & 2k_1 - k_2 \end{bmatrix},$$

$$V''(\pi,0) = \begin{bmatrix} -2k_1 - k_2 & k_2 \\ k_2 & -2k_1 - k_2 \end{bmatrix}, \qquad V''(\pi,\pi) = \begin{bmatrix} -2k_1 + k_2 & k_2 \\ k_2 & 2k_1 + k_2 \end{bmatrix},$$

da cui

$$\begin{aligned}
&\det V''(0,0) = -4k_1^2\,, && \det V''(\pi,\pi) = -4k_1^2\,, \\
&\det V''(0,\pi) = 4k_1(k_1 - k_2)\,, && \mathrm{tr}V''(0,\pi) = 2(2k_1 - k_2)\,, \\
&\det V''(\pi,0) = 4k_1(k_1 + k_2)\,, && \mathrm{tr}V''(\pi,0) = -2(2k_1 + k_2)\ .
\end{aligned}$$

Si ottiene che $(0,0), (\pi,0), (\pi,\pi)$ sono instabili. Siccome $\mathrm{tr}V''(0,\pi) > 0$, la configurazione $(0,\pi)$ è stabile se $k_1 > k_2$, instabile se $k_1 < k_2$.

Inoltre, osservando che $\cos(\bar\phi - \bar\theta) = \cos(\pi - 2\bar\theta) = -\cos^2\bar\theta + \sin^2\bar\theta$ si ottiene

$$V''(\bar\theta, \pi - \bar\theta) = V''(-\bar\theta, \pi + \bar\theta) = \begin{bmatrix} \frac{k_1^2}{k_2} + k_2\sin^2\bar\theta & \frac{k_1^2}{k_2} - k_2\sin^2\bar\theta \\ \frac{k_1^2}{k_2} - k_2\sin^2\bar\theta & \frac{k_1^2}{k_2} + k_2\sin^2\bar\theta \end{bmatrix},$$

da cui

$$\det V''(\bar\theta, \pi - \bar\theta) = 4k_1^2 \sin^2\bar\theta > 0 \;.$$

Si osserva che c'è una biforcazione per $k_1 = k_2$: l'equilibrio $(\theta, \phi) = (0, \pi)$ da stabile diventa instabile e nascono due nuovi equilibri stabili $(\theta, \phi) = (\bar\theta, \pi - \bar\theta), (\pi - \bar\theta, \bar\theta)$.

Esempio 19. *Nel piano Oxy si consideri il sistema meccanico formato da n punti materiali $P_1 \dots P_n$ di ugual massa m. Il punto P_i è vincolato a muoversi sulla retta $x = i$, $i = 1 \dots n$. Inoltre ogni P_i è collegato ai punti P_{i-1} e P_{i+1} da due molle di costante elastica k, dove si è posto $P_0 \equiv (0,0), P_{n+1} \equiv (n+1, 0)$. Si usano come coordinate i valori $q_i = y_i, i = 1 \dots n$ delle ordinate dei punti P_i. Scrivere le equazioni di Lagrange, trovare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.*

L'energia cinetica e potenziale del sistema sono

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{h=1}^{n} \dot q_h^2 \,, \qquad V = \frac{1}{2} k \sum_{h=0}^{n} |P_{h+1} - P_h|^2 = \frac{1}{2} k \sum_{h=0}^{n} (q_{h+1} - q_h)^2 + \text{costante}$$

dove $q_0 = q_{n+1} = 0$.

Dimostriamo che l'unica configurazione di equilibrio è $(y_1, \dots, y_n) = (0, \dots, 0)$. Gli equilibri sono soluzioni di

$$V_{q_h} = -k(q_{h+1} - 2q_h + q_{h-1}) = 0 \,, \qquad h = 1 \dots n \;.$$

Ottengo il sistema lineare $M\mathbf{q} = 0$, con

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sia λ un autovalore di M, con autovettore $\mathbf{v}$. Allora

$$\mathbf{v} \cdot M\mathbf{v} = 2\Big(\sum_{h=1}^{n} v_h^2 - \sum_{h=1}^{n} v_{h+1} v_h\Big) = [(v_1 - v_2)^2 + \dots + (v_{n-1} - v_n)^2 + v_1^2 + v_n^2] \geq 0$$

ed è nullo solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Questo ci dice che M è definita positiva, quindi $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ è l'unica soluzione di $M\mathbf{q} = 0$.

Tale configurazione di equilibrio è stabile, come si vede applicando il teorema di Lagrange-Dirichlet, dato che V ha sicuramente un minimo stretto in $\mathbf{q} = \mathbf{0}$. Gli autovalori della matrice hessiana $V'' = -kM$ sono tutti positivi e distinti.

9.7 Diagonalizzazione simultanea di forme quadratiche

Considero le forme quadratiche

$$a(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x}\,, \qquad b(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot B\mathbf{x}\,, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

con A, B matrici di ordine n simmetriche, A definita positiva. L'insieme di livello

$$\mathcal{E}_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a(\mathbf{x}) = 1\}$$

è un ellissoide, quindi è compatto. Dunque esiste $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{E}_A$ tale che

$$b(\mathbf{x}_1) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{E}_A} b(\mathbf{x})\ .$$

Il vettore $\mathbf{x}_1$ è un punto stazionario di $b(\mathbf{x})$, vincolato a $\mathcal{E}_A$. Dal metodo dei moltiplicatori di Lagrange si ottiene

$$B\mathbf{x}_1 = \lambda_1^{(1)} A\mathbf{x}_1\,, \quad \mathbf{x}_1 \cdot A\mathbf{x}_1 = 1\,,$$

per cui $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{E}_A$ è autovettore di $A^{-1}B$ con autovalore $\lambda_1^{(1)} = b(\mathbf{x}_1)$.

Sia $\mathcal{S}^{n-1} = \mathbf{x}_1^{\perp}$ il sottospazio di dimensione $n-1$ costituito dai vettori di $\mathbb{R}^n$ ortogonali a $\mathbf{x}_1$ rispetto al prodotto scalare definito da A. Denoto con $\mathcal{E}_A^{n-2} = \mathcal{E}_A \cap \mathcal{S}^{n-1}$ l'ellissoide di dimensione $n-2$ e cerco $\mathbf{x}_2$ tale che

$$b(\mathbf{x}_2) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{E}_A^{n-2}} b(\mathbf{x})\ .$$

Dal metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$$B\mathbf{x}_2 = \lambda_2^{(2)} A\mathbf{x}_2 + \lambda_1^{(2)} A\mathbf{x}_1\,, \quad \mathbf{x}_2 \cdot A\mathbf{x}_2 = 1\,, \quad \mathbf{x}_2 \cdot A\mathbf{x}_1 = 0\ . \tag{9.15}$$

Moltiplicando scalarmente per $\mathbf{x}_1$ la prima delle (9.15) e usando la simmetria di A e B si ottiene

$$\lambda_1^{(2)} = \mathbf{x}_1 \cdot B\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 \cdot B\mathbf{x}_1 = \lambda_1^{(1)} \mathbf{x}_2 \cdot A\mathbf{x}_1 = 0\,,$$

per cui $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{E}_A^{n-2}$ è autovettore di $A^{-1}B$ con autovalore $\lambda_2^{(2)} = b(\mathbf{x}_2)$. Tale procedimento si può iterare cercando per ogni $k = 3 \dots n$ un vettore $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$b(\mathbf{x}_k) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{E}_A^{n-k}} b(\mathbf{x})\,,$$

con $\mathcal{E}_A^{n-k} = \mathcal{E}_A \cap \mathcal{S}^{n-k+1}$, ed $\mathcal{S}^{n-k+1}$ il sottospazio di dimensione $n-k+1$ costituito dai vettori di $\mathbb{R}^n$ ortogonali a $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$ rispetto al prodotto scalare definito da A.

In questo modo trovo una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ di autovettori di $A^{-1}B$ ortonormali rispetto al prodotto scalare definito da A, con autovalori reali

$$\lambda_1 = b(\mathbf{x}_1), \quad \lambda_2 = b(\mathbf{x}_2), \quad \ldots \quad \lambda_n = b(\mathbf{x}_n),$$

dove $\lambda_j = \lambda_j^{(j)}$. Per calcolare esplicitamente gli autovalori λ_j si risolve l'equazione secolare

$$\det(B - \lambda A) = 0 \ .$$

Denoto con U la trasposta della matrice che ha come colonne i vettori della base $\mathcal{B}$. Osservo che si ha

$$U^T A U = I\,, \qquad U^T B U = \mathrm{diag}(\lambda_1 \ldots \lambda_n)\,, \tag{9.16}$$

infatti $\mathbf{x}_i \cdot A\mathbf{x}_j = \delta_{ij}$ e $\mathbf{x}_i \cdot B\mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_i \cdot A\mathbf{x}_j = \lambda_j \delta_{ij}$.

9.8 Equilibri relativi nel problema dei 3 corpi ristretto circolare piano

Scegliendo le unità di misura in modo che

$$m_1 + m_2 = 1, \quad |P_1 - P_2| = 1, \quad G = 1$$

si ottiene la lagrangiana indipendente dal tempo

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - V(q_1, q_2)$$

dove

$$V(q_1, q_2) = -\frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) - (q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1) - \frac{1-m}{r_1} - \frac{m}{r_2},$$

con

$$r_1 = \sqrt{(q_1 - m)^2 + q_2^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(q_1 - 1 + m)^2 + q_2^2}.$$

Posso anche scrivere

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}((\dot{q}_1 - q_2)^2 + (\dot{q}_2 + q_1)^2) - U(q_1, q_2)$$

$$U(q_1, q_2) = -\frac{1-m}{r_1} - \frac{m}{r_2}.$$

Equazioni di Lagrange

$$\ddot{q}_1 - 2\dot{q}_2 = -\bar{U}_{q_1}, \qquad \ddot{q}_2 + 2\dot{q}_1 = -\bar{U}_{q_2},$$

dove

$$\bar{U}(q_1, q_2) = -\frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + U(q_1, q_2)$$

Siccome la lagrangiana non dipende dal tempo, abbiamo l'integrale di Jacobi

$$J(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \bar{U}(q_1, q_2)$$

Considero l'insieme di livello

$$\mathcal{M}_{m,h} = \{(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) | J(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = h\}$$

Regioni di Hill

Proiezione di $\mathcal{M}_{m,h}$ sulo spazio delle configurazioni nel sistema rotante:

$$M_{m,h} = \{\{(q_1, q_2) | \bar{U}(q_1, q_2) \leq h\}$$

La frontiera $\partial M_{m,h}$ è costituita dalle curve a velocità zero.