Capitolo 5

Il corpo rigido

Un **corpo rigido discreto**, denotato con $\mathfrak{C}$, è un sistema di N punti materiali $P_1, ..., P_N$ che mantengono invariate le loro distanze mutue durante il moto.

Fissato un riferimento $\Sigma = O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, i punti P_j sono individuati dai vettori $P_j - O$, con coordinate $\mathbf{x}_j$ nella base $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$. Le distanze mutue

$$\rho_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i| = c_{ij}, \qquad i, j = 1, ..., N.$$

tra i punti di $\mathfrak{C}$ sono costanti.

Esempio: due punti materiali vincolati rigidamente che si muovono in $\mathbb{R}^3$.

L'insieme delle configurazioni ammissibili formano una sottovarietà $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^6$ di dimensione 5. Infatti le configurazioni ammissibili $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ sono definite da $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$, con

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2 - \ell^2, \qquad \ell > 0.$$

Poniamo $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Il vettore

$$\frac{\partial \Psi}{\partial(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 2\left((x_1 - x_2), (y_1 - y_2), (z_1 - z_2), (x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)\right)$$

è non nullo nei punti $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ tali che $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$. Ne segue che l'insieme

$$\mathcal{C} = \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^6 : \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0\}$$

è una sottovarietà di $\mathbb{R}^6$ di dimensione $6 - 1 = 5$.

Quindi il vincolo di rigidità, almeno in questo semplice caso, è olonomo.

Definizione 9. *Diciamo che un sistema di riferimento $\Sigma' = O'\hat{\mathbf{e}}'_1\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3$ è* **solidale** *al corpo rigido $\mathfrak{C}$ se i punti P_j del corpo hanno tutti velocità nulla rispetto a Σ', cioè se le coordinate di tutti i punti P_j sono costanti in Σ'.*

Costruiamo esplicitamente un sistema di riferimento solidale.

Se tutti i punti di $\mathfrak{C}$ sono allineati ne prendiamo due, P_1 e P_2 e poniamo $O' = P_1$, $\hat{\mathbf{e}}'_1 = (P_2 - P_1)/\rho_{12}$, $\hat{\mathbf{e}}'_2 \in \hat{\mathbf{e}}_1'^{\perp}$, $\hat{\mathbf{e}}'_3 = \hat{\mathbf{e}}'_1 \times \hat{\mathbf{e}}'_2$. Le coordinate di ogni altro punto P_j di $\mathfrak{C}$ sono determinate univocamente dalle costanti c_{1j}, c_{2j}.

Se esistono tre punti, $P_1, P_2, P_3 \in \mathfrak{C}$ non allineati poniamo $O' = P_1$, $\hat{\mathbf{e}}'_1 = (P_2 - P_1)/\rho_{12}$, $\hat{\mathbf{e}}'_2 \in \pi(P_1, P_2, P_3)$ (il piano generato dai tre punti) con $\hat{\mathbf{e}}'_2 \in \hat{\mathbf{e}}_1'^{\perp}$ e $(P_3 - P_1) \cdot \hat{\mathbf{e}}'_2 > 0$. Infine $\hat{\mathbf{e}}'_3 = \hat{\mathbf{e}}'_1 \times \hat{\mathbf{e}}'_2$.

Osserviamo che le coordinate di ogni altro punto P_j del corpo sono costanti[1] nel riferimento $\Sigma' = O'\hat{\mathbf{e}}'_1\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3$. Quindi ci basta conoscere la posizione di P_1, P_2, P_3 per determinare quella degli altri punti del corpo.

Proposizione 17. *Se $\mathfrak{C}$ ha almeno tre punti non allineati, le configurazioni possibili formano una sottovarietà $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^{3N}$ diffeomorfa a $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$.*

Dimostrazione. Sia $\Sigma' = O'\hat{\mathbf{e}}'_1\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3$ un riferimento solidale a $\mathfrak{C}$, costruito ad esempio come descritto sopra con tre punti del corpo non allineati.

Dato che le coordinate $\mathbf{x}'_j$ dei punti P_j sono costanti in Σ', assumendo queste note a priori, per determinare le coordinate dei punti del corpo in Σ ci basta determinare la posizione del sistema di riferimento Σ' rispetto a Σ. Questa è determinata una volta note le coordinate dell'origine O' ed i coseni direttori $R_{ji} = \hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$ dei versori $\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3$ rispetto a $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$. Per le proprietà degli $\hat{\mathbf{e}}'_i$, $\hat{\mathbf{e}}_j$ la matrice $R = (R_{ji})$ è ortogonale.

Definiamo quindi una mappa

$$\boldsymbol{\phi} : \mathbb{R}^3 \times SO(3) \to \mathbb{R}^{3N}$$

tramite

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_{O'}, R) = (\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_1, \ldots, \mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_N). \tag{5.1}$$

Nella (5.1) $\mathbf{x}_{O'}$ descrive le coordinate di $O' - O$ nella base $\mathcal{B} = \{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$, $\mathbf{x}'_h, h = 1 \ldots N$ sono le coordinate (costanti) dei vettori $P_j - O'$ nella base $\mathcal{B}' = \{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$ ed R è l'inversa della matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ (cioè ha componenti $R_{ji} = \hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$).

L'immagine della mappa $\boldsymbol{\phi}$ descrive tutte le possibili coordinate dei vettori $P_h - O$ nella base $\mathcal{B}$ in quanto $\mathbf{x}_{O'} \in \mathbb{R}^3$ ed $R \in SO(3)$ descrivono tutte le possibili posizioni

[1]Osserviamo anche che le coordinate di ogni altro punto P_j $(j \geq 4)$ del corpo non sono univocamente determinate dalle costanti c_{1j}, c_{2j}, c_{3j} in quanto l'intersezione non vuota delle 3 sfere di centro P_i e raggio c_{ij}, $i = 1, 2, 3$ dà luogo genericamente a due punti. Comunque, note le coordinate $\mathbf{x}'_j$ dei punti P_j in Σ', la continuità del moto dei P_j implica che le loro coordinate in Σ' siano costanti nel tempo.

di un sistema di riferimento Σ' solidale a $\mathfrak{C}$ (costruito ad esempio come descritto sopra, utilizzando tre punti del corpo non allineati).

Osserviamo che $\boldsymbol{\phi}$ è iniettiva, infatti se

$$\mathbf{x}_{O'}^{(1)} + R_1 \mathbf{x}'_h = \mathbf{x}_{O'}^{(2)} + R_2 \mathbf{x}'_h, \qquad \forall\, h$$

allora

$$R_1(\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j) = R_2(\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j), \qquad R_1(\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_k) = R_2(\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_k)$$

con $\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_j, \mathbf{x}'_k$ vettori linearmente indipendenti. Ne segue che $R_1(R_2)^{-1}$, che è un elemento di $SO(3)$, ha due autovettori indipendenti relativi all'autovalore 1, dunque $R_1 = R_2$ e, di conseguenza, $\mathbf{x}_{O'}^{(1)} = \mathbf{x}_{O'}^{(2)}$.

La mappa $\boldsymbol{\phi}$ e la sua inversa, definita sull'immagine $\boldsymbol{\phi}(\mathbb{R}^3 \times SO(3))$, sono differenziabili perché lineari. Quindi $\boldsymbol{\phi}$ è un diffeomorfismo sulla sua immagine. □

La varietà delle configurazioni di un corpo rigido con almeno tre punti non allineati ha dimensione 6, infatti vale il seguente risultato.

Proposizione 18. *Il gruppo $O(3)$ è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^9$ di dimensione 3.*

Dimostrazione. Cosidero la mappa $\boldsymbol{\Psi} : \mathbb{R}^9 \mapsto \mathbb{R}^6$ le cui componenti $\Psi_{ij}, 1 \le i < j \le 3$ sono definite da

$$\Psi_{ij}(a_{11}, a_{12} \dots a_{33}) = \sum_{h=1}^{3} a_{hi} a_{hj} - \delta_{ij}\,,$$

Posto $\mathbf{a} = (a_{11}, a_{12} \dots a_{33})$, abbiamo

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 2a_{11} & 0 & 0 & 2a_{21} & 0 & 0 & 2a_{31} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{11} & 0 & a_{22} & a_{21} & 0 & a_{32} & a_{31} & 0 \\ a_{13} & 0 & a_{11} & a_{23} & 0 & a_{21} & a_{33} & 0 & a_{31} \\ 0 & 2a_{12} & 0 & 0 & 2a_{22} & 0 & 0 & 2a_{32} & 0 \\ 0 & a_{13} & a_{12} & 0 & a_{23} & a_{22} & 0 & a_{33} & a_{32} \\ 0 & 0 & 2a_{13} & 0 & 0 & 2a_{23} & 0 & 0 & 2a_{33} \end{bmatrix}$$

$SO(3)$ è una componente connessa di $O(3)$, definita dalle matrici di $O(3)$ con determinante 1. Ne segue che anche $SO(3)$ è una sottovarietà di dimensione 3.

□

Esercizio 3. *Dimostrare che se un corpo rigido è formato da punti allineati, l'insieme delle configurazioni possibili è diffeomorfo a $\mathbb{R}^3 \times S^2$.*

5.1 Proprietà cinematiche di un corpo rigido

Velocità angolare di un corpo rigido

Definizione 10. *Definiamo la velocità angolare* $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ *di un corpo rigido come quella di minima norma tra le velocità angolari di tutti i sistemi di riferimento solidali rispetto ad un riferimento dato* Σ.

Si presentano due casi:

Proposizione 19. i) *Se* $\mathfrak{C}$ *ha almeno 3 punti non allineati allora la sua velocità angolare è quella di un qualunque riferimento solidale a* $\mathfrak{C}$. ii) *Se invece tutti i punti di* $\mathfrak{C}$ *sono allineati allora la sua velocità angolare è data dalla differenza tra quella di un qualunque riferimento solidale a* $\mathfrak{C}$ *e la sua componente in direzione dell'allineamento dei punti.*

Dimostrazione. Consideriamo due riferimenti solidali Σ', Σ''. Denotiamo con $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, $\vec{\boldsymbol{\omega}}'$ le velocità angolari di Σ' rispetto a Σ e di Σ'' rispetto a Σ' rispettivamente. i) La velocità angolare di Σ'' rispetto a Σ è data da $\vec{\boldsymbol{\omega}} + \vec{\boldsymbol{\omega}}'$. Se P_1, P_2, P_3 sono punti del corpo non allineati, dalla (2.5) applicata a $P_2 - P_1$ e a $P_3 - P_1$ si ha

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}' \times (P_2 - P_1) = \vec{\mathbf{0}}, \qquad \vec{\boldsymbol{\omega}}' \times (P_3 - P_1) = \vec{\mathbf{0}}, \tag{5.2}$$

infatti

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(P_2 - P_1)\Big|_{\Sigma} &= \frac{d}{dt}(P_2 - P_1)\Big|_{\Sigma'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P_2 - P_1),\\
\frac{d}{dt}(P_2 - P_1)\Big|_{\Sigma} &= \frac{d}{dt}(P_2 - P_1)\Big|_{\Sigma''} + (\vec{\boldsymbol{\omega}} + \vec{\boldsymbol{\omega}}') \times (P_3 - P_1),
\end{aligned}$$

poiché P_1, P_2 sono solidali sia a Σ' che a Σ''. La seconda relazione in (5.2) si dimostra in modo analogo. Dalle (5.2) segue che

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}' = \vec{\mathbf{0}},$$

quindi le velocità angolari di Σ' e Σ'' rispetto a Σ sono le stesse.

ii) Si considerino due punti P_1, P_2 del corpo. Dalla (2.5) abbiamo $\vec{\boldsymbol{\omega}}' \times (P_2 - P_1) = \vec{\mathbf{0}}$, quindi le velocità angolari di Σ e Σ' differiscono solo per una componente lungo la direzione di allineamento.

□

Formula fondamentale della cinematica dei corpi rigidi

Definizione 11. *Diciamo che un punto* P *è solidale ad un corpo rigido* $\mathfrak{C}$ *se questo ha velocità nulla in tutti i riferimenti* Σ' *solidali a* $\mathfrak{C}$ *e con velocità angolare di minima norma.*

Fissiamo un sistema di riferimento $\Sigma = O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$.

Proposizione 20. *Siano* $\vec{\mathbf{x}}_h, \vec{\mathbf{x}}_k \in \mathbb{V}^3$ *le posizioni di due punti* P_h, P_k *di un corpo rigido* $\mathfrak{C}$ *o ad esso solidali*[2] *e siano* $\vec{\mathbf{v}}_h, \vec{\mathbf{v}}_k$ *le loro rispettive velocità relative a* Σ. *Se* $\mathfrak{C}$ *è in moto con velocità angolare* $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ *vale la formula*

$$\vec{\mathbf{v}}_k = \vec{\mathbf{v}}_h + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P_k - P_h). \tag{5.3}$$

Dimostrazione.

$$\vec{\mathbf{v}}_k - \vec{\mathbf{v}}_h = \frac{d}{dt}(P_k - O)\Big|_\Sigma - \frac{d}{dt}(P_h - O)\Big|_\Sigma = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P_k - O) - \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P_h - O) = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P_k - P_h).$$

□

Le coordinate delle posizioni e velocità $(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_N)$ di un corpo rigido $\mathfrak{C}$ sono determinate ad ogni istante t dalla posizione e velocità di un punto O' solidale al corpo al tempo t, da una matrice $R(t) \in SO(3)$ e dalla velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$ di $\mathfrak{C}$:

$$\mathbf{x}_h = \mathbf{x}_{O'} + R\,\mathbf{x}'_h, \qquad \mathbf{v}_h = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_{O'}).$$

Ad ogni istante t, $R(t)$ è l'inversa della matrice di cambiamento di base da Σ ad un riferimento solidale Σ'.

Asse istantaneo di rotazione

Definizione 12. *Se* $\vec{\boldsymbol{\omega}}(t) \neq \mathbf{0}$ *è la velocità angolare di un corpo rigido all'istante* t, *si chiama* **asse istantaneo di rotazione** *una retta* $r(t)$ *fatta di punti solidali al corpo che hanno tutti velocità parallela ad* $\vec{\boldsymbol{\omega}}(t)$ *oppure nulla.*

Dimostriamo che esiste un unico asse istantaneo di rotazione:

Proposizione 21. *Se* $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\boldsymbol{\omega}}(t) \neq 0$ *allora all'istante* t *esiste un punto* $P_0 = P_0(t)$ *tale che tutti i punti solidali al corpo rigido che si trovano a quell'istante sulla retta passante per* P_0 *e parallela ad* $\vec{\boldsymbol{\omega}}(t)$ *hanno velocità parallela ad* $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ *oppure nulla.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che dati due punti P_1, P_2 solidali al corpo, che all'istante t si trovano su una retta parallela ad $\vec{\boldsymbol{\omega}}(t)$, si ha

$$\vec{\mathbf{v}}_{P_2} = \vec{\mathbf{v}}_{P_1} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P_2 - P_1) = \vec{\mathbf{v}}_{P_1}.$$

Quindi ci basta dimostrare che all'istante t esiste P_0 solidale al corpo con $\vec{\mathbf{v}}_{P_0}$ parallela ad $\vec{\boldsymbol{\omega}}$.

[2]Affermare che un punto è solidale a $\mathfrak{C}$ ci dà un'informazione sulla sua velocità.

Sia O' solidale al corpo e sia π un piano ortogonale ad $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ e passante per O': determiniamo un punto $P_0 \in \pi$ solidale al corpo e tale che $\vec{\mathbf{v}}_{P_0} \times \vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\mathbf{0}}$. Moltiplichiamo vettorialmente per $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ la relazione fondamentale per P_0 ed O':

$$\vec{\mathbf{v}}_{P_0} \times \vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\mathbf{v}}_{O'} \times \vec{\boldsymbol{\omega}} + (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P_0 - O')) \times \vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\mathbf{v}}_{O'} \times \vec{\boldsymbol{\omega}} + |\vec{\boldsymbol{\omega}}|^2 (P_0 - O')$$

poiché $(P_0 - O') \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} = 0$. Imponendo che la velocità di P_0 sia parallela ad $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ otteniamo

$$P_0 - O' = -\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{\omega}}|^2} \vec{\mathbf{v}}_{O'} \times \vec{\boldsymbol{\omega}}.$$

Dalla dimostrazione costruttiva della sua esistenza segue anche l'unicità dell'asse istantaneo di rotazione. □

MOTO ELICOIDALE

Proposizione 22. *Le velocità dei punti solidali al corpo rigido hanno una simmetria cilindrica rispetto all'asse istantaneo di rotazione.*

Dimostrazione. Assumiamo che $\vec{\boldsymbol{\omega}}(t) \neq 0$. Considero un operatore lineare $\mathcal{R}$ di rotazione attorno all'asse istantaneo di rotazione $r(t)$ e, dato un punto $P_1 \notin r(t)$ definisco $P_0 = r(t) \cap \Pi_{P_1}$ con Π_{P_1} il piano passante per P_1 e ortogonale a $r(t)$. Sia $P_2 = P_0 + \mathcal{R}(P_1 - P_0)$. Per la (5.3) si ha

$$\vec{\mathbf{v}}_{P_1} = \vec{\mathbf{v}}_{P_0} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P_1 - P_0), \qquad \vec{\mathbf{v}}_{P_2} = \vec{\mathbf{v}}_{P_0} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P_2 - P_0). \tag{5.4}$$

Siccome $\vec{\mathbf{v}}_{P_0}$ e $\boldsymbol{\omega}$ sono paralleli all'asse,

$$\mathcal{R}\vec{\mathbf{v}}_{P_1} = \vec{\mathbf{v}}_{P_0} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \mathcal{R}(P_1 - P_0) = \vec{\mathbf{v}}_{P_2}.$$

Inoltre dalla prima equazione in (5.4) segue che

$$\vec{\mathbf{v}}_{P_1} \cdot (P_1 - P_0) = 0$$

poiché $\vec{\mathbf{v}}_{P_0} \times \vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\mathbf{0}}$ e $(P_1 - P_0) \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} = 0$.

Quindi, in coordinate cilindriche con asse $r(t)$, la componente radiale della velocità dei punti solidali al corpo rigido è nulla.

Consideriamo due punti P, Q qualunque solidali al corpo. Scomponiamo le loro velocità $\vec{\mathbf{v}}_P$, $\vec{\mathbf{v}}_Q$ come segue:

$$\vec{\mathbf{v}}_P = \vec{\mathbf{v}}_P^{\parallel} + \vec{\mathbf{v}}_P^{\perp} \qquad \vec{\mathbf{v}}_Q = \vec{\mathbf{v}}_Q^{\parallel} + \vec{\mathbf{v}}_Q^{\perp}$$

dove

$$\vec{\mathbf{v}}_P^{\parallel} = \frac{(\vec{\mathbf{v}}_P \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}})}{|\vec{\boldsymbol{\omega}}|^2}\vec{\boldsymbol{\omega}}, \quad \vec{\mathbf{v}}_P^{\perp} = \vec{\mathbf{v}}_P - \vec{\mathbf{v}}_P^{\parallel}, \qquad \vec{\mathbf{v}}_Q^{\parallel} = \frac{(\vec{\mathbf{v}}_Q \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}})}{|\vec{\boldsymbol{\omega}}|^2}\vec{\boldsymbol{\omega}}, \quad \vec{\mathbf{v}}_Q^{\perp} = \vec{\mathbf{v}}_Q - \vec{\mathbf{v}}_Q^{\parallel}.$$

Dalla formula fondamentale (5.3) segue che

$$\vec{\mathbf{v}}_P \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\mathbf{v}}_Q \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}}, \tag{5.5}$$

quindi le componenti $\vec{\mathbf{v}}_P^{\parallel}$, $\vec{\mathbf{v}}_Q^{\parallel}$ lungo l'asse istantaneo di rotazione sono le stesse. Dalla (5.3) segue anche che

$$\vec{\mathbf{v}}_P^{\perp} = \vec{\mathbf{v}}_Q^{\perp} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - Q).$$

Nel caso particolare in cui Q sia un punto dell'asse istantaneo di rotazione si ha $\vec{\mathbf{v}}_Q^{\perp} = \vec{\mathbf{0}}$, per cui

$$\vec{\mathbf{v}}_P^{\perp} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - Q).$$

Viste queste proprietà delle velocità dei punti di un corpo rigido, si parla di **moto elicoidale**.

□

Tipi particolari di Moto Rigido

Un moto rigido si dice **piano** se la velocità angolare $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ ha direzione costante e tutti i punti solidali al corpo hanno velocità ortogonale a tale direzione, cioè

$$\vec{\mathbf{v}}_P \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} = 0.$$

Posso dunque fissare un piano di riferimento Π ortogonale ad $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ in cui studiare il moto. Definisco il **centro istantaneo di rotazione** come il punto $C_0 = r(t) \cap \Pi$.

Proposizione 23. (Teorema di Chasles) *In un moto rigido piano il centro istantaneo di rotazione C_0 si trova sulla retta normale alla velocità di ciascuno dei punti solidali al corpo distinti da C_0.*

Dimostrazione. Sia C_0 il centro istantaneo di rotazione. Osservo che $\vec{\mathbf{v}}_{C_0} = \vec{\mathbf{0}}$, poiché $\vec{\mathbf{v}}_{C_0} \times \vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\mathbf{0}}$, $\vec{\mathbf{v}}_{C_0} \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} = 0$. Quindi

$$(P - C_0) \cdot \vec{\mathbf{v}}_P = (P - C_0) \cdot (\vec{\mathbf{v}}_{C_0} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - C_0)) = 0$$

per ogni punto P solidale al corpo. □

Operatore di inerzia

Per studiare il moto di un corpo rigido $\mathfrak{C}$ è utile introdurre l'**operatore di inerzia** $\mathfrak{I}_Q : \mathbb{V}^3 \to \mathbb{V}^3$ rispetto al polo $Q \in \mathbb{E}^3$, definito da

$$\mathfrak{I}_Q \vec{\mathbf{u}} = \sum_{h=1}^{N} m_h (P_h - Q) \times [\vec{\mathbf{u}} \times (P_h - Q)], \qquad \vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}^3.$$

Proposizione 24. *Per ogni scelta del polo Q l'operatore $\mathfrak{I}_Q : \mathbb{V}^3 \to \mathbb{V}^3$ è simmetrico e, se il corpo $\mathfrak{C}$ ha almeno tre punti non allineati, è definito positivo.*

Dimostrazione. Dalle proprietà del prodotto misto e dalla simmetria del prodotto scalare abbiamo la simmetria dell'operatore $\mathfrak{I}_Q$, infatti

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \mathfrak{I}_Q \vec{\mathbf{v}} = \sum_{h=1}^{N} m_h \left[\vec{\mathbf{u}} \times (P_h - Q)\right] \cdot \left[\vec{\mathbf{v}} \times (P_h - Q)\right]$$

Similmente si ha

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \mathfrak{I}_Q \vec{\mathbf{u}} = \sum_{h=1}^{N} m_h |\vec{\mathbf{u}} \times (P_h - Q)|^2$$

e, se ci sono tre punti non allineati, almeno un addendo della sommatoria è > 0. Se tutti i punti del corpo sono allineati ed $\hat{\mathbf{e}} \in \mathbb{V}^3$, $|\hat{\mathbf{e}}| = 1$, corrisponde alla direzione della retta di allineamento, allora $\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathfrak{I}_Q \hat{\mathbf{e}} = 0$ se Q sta su tale retta.

□

Scomposizione dell'operatore di inerzia

Si verifica facilmente che

$$\mathfrak{I}_Q \vec{\mathbf{u}} = \mathfrak{I}_B \vec{\mathbf{u}} + m(B - Q) \times [\vec{\mathbf{u}} \times (B - Q)], \qquad \forall \vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}^3, \tag{5.6}$$

infatti

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_Q \vec{\mathbf{u}} &= \sum_{h=1}^{N} m_h (P_h - Q) \times [\vec{\mathbf{u}} \times (P_h - Q)] = \\ &= \sum_{h=1}^{N} m_h (P_h - B) \times [\vec{\mathbf{u}} \times (P_h - B)] + \sum_{h=1}^{N} m_h (B - Q) \times [\vec{\mathbf{u}} \times (P_h - B)] + \\ &+ \sum_{h=1}^{N} m_h (P_h - B) \times [\vec{\mathbf{u}} \times (B - Q)] + \sum_{h=1}^{N} m_h (B - Q) \times [\vec{\mathbf{u}} \times (B - Q)] \end{aligned}$$

e si ha

$$\sum_{h=1}^{N} m_h (B - Q) \times [\vec{\mathbf{u}} \times (P_h - B)] = \sum_{h=1}^{N} m_h (P_h - B) \times [\vec{\mathbf{u}} \times (B - Q)] = \vec{\mathbf{0}}.$$

Dati un punto $Q \in \mathbb{E}^3$ ed una direzione $\hat{\mathbf{e}} \in \mathbb{V}^3$, $|\hat{\mathbf{e}}| = 1$, definiamo **momento di inerzia** relativo all'asse $Q\hat{\mathbf{e}}$, passante da Q e parallelo a $\hat{\mathbf{e}}$, la quantità

$$I_{Q\hat{\mathbf{e}}} = \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathfrak{I}_Q \hat{\mathbf{e}}.$$

Osservo che se Q' è un punto dell'asse $Q\hat{\mathbf{e}}$ si ha

$$I_{Q'\hat{\mathbf{e}}} = \sum_{h=1}^{N} m_h |\hat{\mathbf{e}} \times (P_h - Q')|^2 = \sum_{h=1}^{N} m_h |\hat{\mathbf{e}} \times [(P_h - Q) + (Q - Q')]|^2 = I_{Q\hat{\mathbf{e}}}.$$

Abbiamo il seguente

Proposizione 25. (Huygens-Steiner) *Il momento di inerzia $I_{B\hat{\mathbf{e}}}$ rispetto all'asse $B\hat{\mathbf{e}}$ ha la seguente proprietà:*

$$I_{B\hat{\mathbf{e}}} = \min_{Q \in \mathbb{E}^3} I_{Q\hat{\mathbf{e}}}.$$

Dimostrazione. Dalla (5.6) segue che $I_{Q\hat{\mathbf{e}}} = I_{B\hat{\mathbf{e}}} + m|\hat{\mathbf{e}} \times (B - Q)|^2$. □

Matrice di inerzia

Fissata una base, $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ l'operatore di inerzia $\mathfrak{I}_Q$ si scrive tramite la seguente matrice

$$I_Q = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}, \qquad I_{ij} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathfrak{I}_Q \hat{\mathbf{e}}_j.$$

Più precisamente si ha

$$I_{11} = \sum_{h=1}^{N} m_h (y_h^2 + z_h^2)\,; \quad I_{22} = \sum_{h=1}^{N} m_h (x_h^2 + z_h^2)\,; \quad I_{33} = \sum_{h=1}^{N} m_h (x_h^2 + y_h^2)\,;$$
$$I_{12} = -\sum_{h=1}^{N} m_h x_h y_h\,; \qquad I_{13} = -\sum_{h=1}^{N} m_h x_h z_h\,; \qquad I_{23} = -\sum_{h=1}^{N} m_h y_h z_h\,;$$

con $P_h - Q = x_h \hat{\mathbf{e}}_1 + y_h \hat{\mathbf{e}}_2 + z_h \hat{\mathbf{e}}_3$, $h = 1 \dots N$. Infatti

$$I_{ij} = \sum_{h=1}^{N} m_h \hat{\mathbf{e}}_i \times (P_h - Q) \cdot \hat{\mathbf{e}}_j \times (P_h - Q),$$

con

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_1 \times (P_h - Q) &= y_h \hat{\mathbf{e}}_3 - z_h \hat{\mathbf{e}}_2, \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \times (P_h - Q) &= z_h \hat{\mathbf{e}}_1 - x_h \hat{\mathbf{e}}_3, \\ \hat{\mathbf{e}}_3 \times (P_h - Q) &= x_h \hat{\mathbf{e}}_2 - y_h \hat{\mathbf{e}}_1. \end{aligned}$$

Simmetrie e momenti principali di Inerzia

La matrice di inerzia è simmetrica, dunque è diagonalizzabile in una base ortonormale $\{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$. Gli autovalori dell'operatore di inerzia I_1, I_2, I_3 si chiamano

momenti principali di inerzia, una base $\{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$ in cui I_Q si scrive in forma diagonale e le direzioni degli $\hat{\mathbf{e}}'_j$ si dicono rispettivamente base e direzioni principali di inerzia.

Dimostriamo alcune proprietà dei momenti e degli assi principali di inerzia:

Proposizione 26. *Valgono le seguenti proprietà:*

(i) *Se esiste un piano π_Q passante per Q di simmetria per riflessione (cioè, detta $\tilde{\mathcal{R}}_\pi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ la riflessione rispetto a π_Q, ad ogni punto P di massa m del corpo corrisponde un altro punto $\tilde{\mathcal{R}}_\pi P$ del corpo con la stessa massa) allora la direzione ortogonale a π è principale.*

(ii) *Se esiste un asse r di simmetria per rotazione passante per Q (cioè, per ogni punto P di massa m del corpo esiste un intero $k > 1$ tale che, detta $\mathcal{R}_k : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ la rotazione di $2\pi/k$ attorno ad r, i punti dell'orbita $\{\mathcal{R}_k^h P\}_{h=0\ldots k-1}$ di P sotto l'azione del gruppo ciclico generato da $\mathcal{R}_k$ corrispondono ad altri punti del corpo con la stessa massa m) allora la direzione di r è principale.*

Inoltre, se $\{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$ è una base principale per $\mathfrak{I}_Q$:

(iii) *I momenti principali di inerzia soddisfano $I_1 \leq I_2 + I_3$ e si ha $I_1 = I_2 + I_3$ solo quando il corpo rigido è piano, e sta nel piano $Q\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3$.*

(iv) *Sia $\vec{\mathbf{v}}$ un autovettore dell'operatore di inerzia $\mathfrak{I}_Q$ con autovalore λ.*

1. *Se $\vec{\mathbf{v}} = v_i\hat{\mathbf{e}}'_i + v_j\hat{\mathbf{e}}'_j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$ e $v_i v_j \neq 0$, allora tutti i vettori del piano generato da $\hat{\mathbf{e}}'_i, \hat{\mathbf{e}}'_j$ definiscono direzioni principali di inerzia.*
2. *Se $\vec{\mathbf{v}} = \sum_{j=1}^3 v_j\hat{\mathbf{e}}'_j$, $v_j \neq 0$ $\forall j$, allora $\mathfrak{I}_Q$ è un multiplo dell'operatore identità (quindi tutte le direzioni sono principali).*

Dimostrazione. (i) Considero un riferimento $Q\hat{\mathbf{e}}'_1\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3$ con asse $\hat{\mathbf{e}}'_3$ ortogonale a π_Q ed osservo che $I_{31} = I_{32} = 0$.
(ii) Considero un riferimento $Q\hat{\mathbf{e}}'_1\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3$ con asse $Q\hat{\mathbf{e}}'_3 = r$ ed osservo che $I_{31} = I_{32} = 0$. Infatti possiamo trovare r interi $k_1, \ldots, k_r$, dove ogni k_j è > 1 e $\sum_{j=1}^r k_j = N$, tali che

$$I_{31} + iI_{32} = -\sum_{h=1}^N m_h(x_h + iy_h)z_h = -\sum_{j=1}^r m_j z_j \sum_{l=0}^{k_j-1} \omega_{k_j}^l (x_j + iy_j)$$

dove $\omega_k = e^{2\pi i/k}$. Si conclude utilizzando il fatto che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{h=0}^{k-1} \omega_k^h = \frac{\omega_k^k - 1}{\omega_k - 1} = 0.$$

(iii) Segue direttamente dalle formule per $I_{j,j}$, $j = 1, 2, 3$.
(iv) Dalle relazioni $\mathfrak{I}_Q \hat{\mathbf{e}}'_j = I_j \hat{\mathbf{e}}'_j$, $\vec{\mathbf{v}} = \sum_{j=1}^{3} v_j \hat{\mathbf{e}}'_j$ si ha

$$\sum_{j=1}^{3} v_j I_j \hat{\mathbf{e}}'_j = \mathfrak{I}_Q \vec{\mathbf{v}} = \lambda \vec{\mathbf{v}} = \sum_{j=1}^{3} v_j \lambda \hat{\mathbf{e}}'_j.$$

Dall'unicità della rappresentazione di un vettore come combinazione lineare degli elementi della base abbiamo $\lambda = I_j$ se $v_j \neq 0$. Da qui segue la tesi, infatti se $\mathfrak{I}_Q \hat{\mathbf{e}}'_i = \lambda \hat{\mathbf{e}}'_i$, $\mathfrak{I}_Q \hat{\mathbf{e}}'_h = \lambda \hat{\mathbf{e}}'_h$, con $i \neq h$ allora ogni combinazione lineare $\alpha \hat{\mathbf{e}}'_i + \beta \hat{\mathbf{e}}'_h$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) è un autovettore di $\mathfrak{I}_Q$ con autovalore λ. Se inoltre troviamo un autovettore $\vec{\mathbf{v}} = \sum_{j=1}^{3} v_j \hat{\mathbf{e}}'_j$ con $v_1 v_2 v_3 \neq 0$ allora $I_1 = I_2 = I_3$ e la matrice di inerzia è un multiplo dell'identità.

□

Esercizio 4. *Consideriamo un corpo rigido costituito da N punti di uguale massa m, posti ai vertici dei poliedri platonici ($N = 12, 24, 60$). Dimostrare che ogni direzione è principale per l'operatore di inerzia $\mathfrak{I}_B$ rispetto al baricentro B,*

Esercizio 5. *Se $\{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$ è una base principale per $\mathfrak{I}_Q$, lo è anche per $\mathfrak{I}_P$ con $P \neq Q$?*

5.2 Proprietà dinamiche di un corpo rigido

Quantità dinamiche e operatore di inerzia

Fissiamo un riferimento $\Sigma = O\, \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$. Dato un corpo rigido $\mathfrak{C}$, usando la formula fondamentale (5.3) abbiamo

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{M}}_Q &= \sum_{h=1}^{N} m_h (P_h - Q) \times [\vec{\mathbf{v}}_{O'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P_h - O')] = \\ &= m(B - Q) \times \vec{\mathbf{v}}_{O'} + \mathfrak{I}_Q \vec{\boldsymbol{\omega}} + m(B - Q) \times [\boldsymbol{\omega} \times (Q - O')]. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Osservo che nella (5.7) il polo O' si deve muovere come un punto solidale a $\mathfrak{C}$.

Scegliendo $O' = Q$ nella (5.7) si ha

$$\vec{\mathbf{M}}_Q = m(B - Q) \times \vec{\mathbf{v}}_Q + \mathfrak{I}_Q \vec{\boldsymbol{\omega}}$$

che per $\vec{\mathbf{v}}_Q = \mathbf{0}$ oppure per $Q = B$ si semplifica:

$$\vec{\mathbf{M}}_Q = \mathfrak{I}_Q \vec{\boldsymbol{\omega}}.$$

Utilizzando la (5.3) possiamo anche rappresentare l'energia cinetica come

$$T = \frac{1}{2}m|\vec{\mathbf{v}}_{O'}|^2 + m\vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot (B - O') \times \vec{\mathbf{v}}_{O'} + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathfrak{I}_{O'}\vec{\boldsymbol{\omega}}$$

Se scegliamo $O' = B$ otteniamo la versione per i corpi rigidi del teorema di König:

$$T = \frac{1}{2}m|\vec{\mathbf{v}}_B|^2 + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathfrak{I}_B\vec{\boldsymbol{\omega}}. \tag{5.8}$$

5.3 I corpi rigidi continui

Si distinguono corpi continui a 1, 2 e 3 dimensioni, a cui si attribuiscono rispettivamente una densità lineare, di superficie e di volume, denotate con λ, σ, ρ. Consideriamo l'ultimo caso, che è il più generale. La discussione relativa agli altri casi è simile.

Consideriamo la densità di volume

$$\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \qquad \mathbf{x}' \mapsto \rho(\mathbf{x}')$$

dove $\mathbf{x}'$ sono coordinate in un riferimento solidale Σ'. Assumiamo che ρ sia integrabile sull'insieme $C \subset \mathbb{R}^3$ delle coordinate dei punti del corpo relative a Σ'.

Se il corpo rigido non è soggetto ad altri vincoli, una parametrizzazione locale dei punti del corpo è data dalla mappa

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}; \mathbf{x}') = \mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3, \tag{5.9}$$

con $\mathbf{q} = (\mathbf{x}_{O'}, \boldsymbol{\theta})$ ed $R = R(\boldsymbol{\theta})$, dove $\boldsymbol{\theta}$ sono gli angoli di Eulero (vedi Sezione 10).

La mappa (5.9) si può sollevare ai vettori velocità, ottenendo

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto \boldsymbol{\upsilon}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3, \tag{5.10}$$

con $\dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{v}_{O'}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$.

Introduciamo le definizioni delle quantità dinamiche sostituendo alla somma finita l'integrale sull'insieme C occupato dal corpo. L'insieme C viene definito in un riferimento solidale al corpo, in modo che C non cambi col tempo.

Massa totale

$$m = \int_C \rho(\mathbf{x}')d\mathbf{x}'$$

Baricentro

$$m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{O'}) = \int_C \rho(\mathbf{x}')R\mathbf{x}'d\mathbf{x}' = R\int_C \rho(\mathbf{x}')\mathbf{x}'d\mathbf{x}' \tag{5.11}$$

Osservazione 13. *Se $O' = B$ si ottiene*

$$\int_C \rho(\mathbf{x}')\mathbf{x}' d\mathbf{x}' = \mathbf{0}.$$

Quantità di moto

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \int_C \rho(\mathbf{x}')\boldsymbol{v}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}};\mathbf{x}')d\mathbf{x}' = \int_C \rho(\mathbf{x}')(\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega}\times R\mathbf{x}')d\mathbf{x}' = \\ &= m\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega}\times R\int_C \rho(\mathbf{x}')\mathbf{x}'d\mathbf{x}' = m\mathbf{v}_{O'} + m\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{O'})\end{aligned}$$

Osservazione 14. *Se $O' = B$ si ottiene*

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_B.$$

Momento angolare rispetto a $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_Q &= \int_C \rho(\mathbf{x}')(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q};\mathbf{x}') - \mathbf{x}_Q)\times\boldsymbol{v}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}};\mathbf{x}')d\mathbf{x}' \\ &= \int_C \rho(\mathbf{x}')(\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}' - \mathbf{x}_Q)\times(\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega}\times R\mathbf{x}')d\mathbf{x}'\end{aligned} \tag{5.12}$$

Introduciamo la matrice di inerzia I_Q, definita da

$$\begin{aligned}I_Q\mathbf{u} &= \int_C \rho(\mathbf{x}')(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q};\mathbf{x}') - \mathbf{x}_Q)\times[\mathbf{u}\times(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q};\mathbf{x}') - \mathbf{x}_Q)]d\mathbf{x}' \\ &= \int_C \rho(\mathbf{x}')(\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}' - \mathbf{x}_Q)\times[\mathbf{u}\times(\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}' - \mathbf{x}_Q)]d\mathbf{x}'\end{aligned} \tag{5.13}$$

per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Se $O' = Q$ la (5.13) assume l'espressione più semplice

$$I_Q\mathbf{u} = \int_C \rho(\mathbf{x}')R\mathbf{x}'\times(\mathbf{u}\times R\mathbf{x}')d\mathbf{x}'.$$

Scegliendo $O' = Q$ nella (5.12) si ottiene quindi

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_Q &= \int_C \rho(\mathbf{x}')R\mathbf{x}'\times(\mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega}\times R\mathbf{x}')d\mathbf{x}' = \int_C \rho(\mathbf{x}')R\mathbf{x}'d\mathbf{x}'\times\mathbf{v}_Q + I_Q\boldsymbol{\omega} = \\ &= m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q)\times\mathbf{v}_Q + I_Q\boldsymbol{\omega}\end{aligned}$$

Energia cinetica

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}\int_C \rho(\mathbf{x}')|\boldsymbol{v}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}};\mathbf{x}')|^2 d\mathbf{x}' = \frac{1}{2}\int_C \rho(\mathbf{x}')|\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega}\times R\mathbf{x}'|^2 d\mathbf{x}' = \\ &= \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_{O'}|^2 + \int_C \rho(\mathbf{x}')\mathbf{v}_{O'}\cdot\boldsymbol{\omega}\times R\mathbf{x}'d\mathbf{x}' + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot I_{O'}\boldsymbol{\omega} = \\ &= \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_{O'}|^2 + m\mathbf{v}_{O'}\cdot\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{O'}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot I_{O'}\boldsymbol{\omega}\end{aligned}$$

Osservazione 15. *Se $O' = B$ si ottiene*

$$T = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_B|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I_B\boldsymbol{\omega}.$$

Esercizio 6. *Mostrare che vale il teorema di scomposizione di* $\mathbf{M}_Q$.

Si introduce la densità di forza $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}')$.

Risultante delle forze

$$\mathbf{R} = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}')d\mathbf{x}'$$

Momento risultante delle forze rispetto a $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\mathbf{N}_Q = \int_C (\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}; \mathbf{x}') - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}')d\mathbf{x}'$$

Se $O' = Q$ si ottiene l'espressione più semplice

$$\mathbf{N}_Q = \int_C R\mathbf{x}' \times \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}')d\mathbf{x}'.$$

Esempio 5. *(forza di gravità) Con una scelta opportuna del riferimento abbiamo*

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') = -\rho(\mathbf{x}')g\mathbf{e}_3,$$

per cui la risultante è

$$\mathbf{R} = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}')\, d\mathbf{x}' = -mg\mathbf{e}_3,$$

ed il momento risultante rispetto ad un polo Q è (scegliendo $O' = Q$ e usando la relazione (5.11))

$$\mathbf{N}_Q = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times (-mg\mathbf{e}_3).$$

Esempio 6. *(forza centrifuga) Se $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare abbiamo*

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') = -\rho(\mathbf{x}')\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}'),$$

per cui, usando (5.11), la risultante è

$$\mathbf{R} = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}')\, d\mathbf{x}' = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{O'})),$$

ed il momento risultante rispetto ad un polo Q è (scegliendo $O' = Q$)

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_Q &= -\int_C \rho(\mathbf{x}')R\mathbf{x}' \times (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}'))\, d\mathbf{x}' = \\ &= -\int_C \rho(\mathbf{x}')(\boldsymbol{\omega} \cdot R\mathbf{x}')R\mathbf{x}' \times \boldsymbol{\omega}\, d\mathbf{x}'. \end{aligned}$$

5.4 Esempi di matrici principali di inerzia

ASTA OMOGENEA DI LUNGHEZZA ℓ E MASSA m;
Sia B il baricentro dell'asta. Considero un sistema di riferimento solidale all'asta, centrato in O e con l'asta lungo l'asse $O\mathbf{e}_1$. Allora la matrice di inerzia I_B, relativa al polo B si scrive

$$I_B^{asta} = \frac{m\ell^2}{12}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

DISCO ED ANELLO OMOGENEI DI RAGGIO R E DI MASSA m;

$$I_B^{disco} = \frac{mR^2}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad I_B^{anello} = mR^2\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

SFERA PIENA E VUOTA, OMOGENEE, DI RAGGIO R E DI MASSA m;

$$I_B^{sp} = \frac{2mR^2}{5}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad I_B^{sv} = \frac{2mR^2}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

CILINDRO PIENO E VUOTO, OMOGENEI, DI RAGGIO R, DI ALTEZZA h E DI MASSA m;

$$I_B^{cp} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} + \frac{mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{2} + \frac{mh^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{bmatrix};$$

$$I_B^{cv} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix};$$

5.5 Equazioni cardinali e moti rigidi

Richiamiamo le due equazioni cardinali della dinamica per un sistema di N punti materiali (3.9):

$$\begin{cases} m\mathbf{a}_B & = \mathbf{R}^{(\mathrm{E})} \\ \dot{\mathbf{M}}_Q & = -m\mathbf{v}_Q \times \mathbf{v}_B + \mathbf{N}_Q^{(\mathrm{E})} \end{cases}. \tag{5.14}$$

Possiamo usare le equazioni (5.14) per determinare il moto di un corpo rigido, anche soggetto ad altri vincoli. Consideriamo un esempio semplice e determiniamo le equazioni del moto in diversi modi.

Esempio 7. *In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento $\Sigma = Oxyz$, con asse Oy verticale ascendente. Si studi il moto di un'asta omogenea di lunghezza 2ℓ e massa m che scivola mantenendo gli estremi sui due assi coordinati Ox, Oy.*

Si assume che gli assi coordinati sviluppino delle forze $\Phi_1\mathbf{e}_1, \Phi_2\mathbf{e}_2$, dette reazioni vincolari, sugli estremi dell'asta. Le componenti Φ_1, Φ_2 sono tra le incognite del problema. Per determinare la configurazione dell'asta basta specificare l'angolo θ che l'asta forma con la direzione verticale. La velocità angolare dell'asta è $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{e}_3$.

Siamo interessati a scrivere delle equazioni che abbiano una forma semplice e che, se possibile, siano **equazioni pure**, cioè non contengano reazioni vincolari.

Scriviamo la 2^a equazione cardinale per l'asta facendo 3 scelte diverse per il polo Q.

i) $Q = O$, l'origine del riferimento:

$$\dot{\mathbf{M}}_O = -m\mathbf{v}_O \times \mathbf{v}_B + \mathbf{N}_O = \mathbf{N}_O; \tag{5.15}$$

ii) $Q = B$, il baricentro dell'asta:

$$\dot{\mathbf{M}}_B = -m\mathbf{v}_B \times \mathbf{v}_B + \mathbf{N}_B = \mathbf{N}_B; \tag{5.16}$$

iii) $Q = C_0$, il centro istantaneo di rotazione:

$$\dot{\mathbf{M}}_{C_0} = -m\mathbf{v}_{C_0} \times \mathbf{v}_B + \mathbf{N}_{C_0} = \mathbf{N}_{C_0}. \tag{5.17}$$

Osservazione 16. *Al variare di θ il centro istantaneo di rotazione C_0 è un punto sempre diverso in un riferimento solidale al corpo, oltre che nel riferimento Σ. Le coordinate di C_0 in Σ sono*

$$\mathbf{x}_{C_0} = 2\ell(\sin\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2),$$

quindi il termine $-m\mathbf{v}_{C_0} \times \mathbf{v}_B$ è nullo perchè

$$\mathbf{v}_{C_0} = \dot{\theta}\ell(\cos\theta\mathbf{e}_1 - \sin\theta\mathbf{e}_2) \tag{5.18}$$

è parallelo a $\mathbf{v}_B$. Quando usiamo la formula fondamentale della cinematica (5.3) con il centro istantaneo di rotazione C_0 abbiamo $\mathbf{v}_{C_0} = \mathbf{0}$; questo perchè stiamo considerando la velocità di un punto solidale al corpo, cioè stiamo calcolando il limite del rapporto incrementale in cui appaiono le coordinate dello stesso punto del corpo a due tempi diversi, quindi non possiamo usare la (5.18). Nell'Esempio 7 la confusione tra le due velocità non produce effetti sulla forma dell'equazione, ma non è sempre così. Questa difficoltà nasce dalla notazione utilizzata tradizionalmente, che è la stessa per le due velocità.

La iii) è l'unica equazione pura, cioè in essa non appaiono le reazioni vincolari, infatti

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_O &= \mathbf{x}_A \times \Phi_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{x}_C \times \Phi_2\mathbf{e}_2 - \mathbf{x}_B \times mg\mathbf{e}_2 = \\
&= (-2\cos\theta\Phi_1 + 2\sin\theta\Phi_2 - mg\sin\theta)\ell\mathbf{e}_3, \\
\mathbf{N}_B &= (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \times \Phi_1\mathbf{e}_1 + (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_B) \times \Phi_2\mathbf{e}_2 = \\
&= \ell(\sin\theta\mathbf{e}_1 - \cos\theta\mathbf{e}_2) \times (-\Phi_1\mathbf{e}_1 + \Phi_2\mathbf{e}_2) = \\
&= (\Phi_2\sin\theta - \Phi_1\cos\theta)\ell\mathbf{e}_3, \\
\mathbf{N}_{C_0} &= (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{C_0}) \times (-mg\mathbf{e}_2) = \mathbf{x}_B \times mg\mathbf{e}_2 = \\
&= mg\ell\sin\theta\mathbf{e}_3.
\end{aligned}$$

L'equazione iii) appare la scelta più conveniente. Comunque è utile risolvere il problema nei tre modi diversi.

Nel caso i), usando la formula fondamentale (5.3), abbiamo

$$\mathbf{M}_O = m\mathbf{x}_B \times \mathbf{v}_O + I_O\boldsymbol{\omega}. \tag{5.19}$$

Notare che qui $\mathbf{v}_O \neq \mathbf{0}$ poichè corrisponde alla velocità di O come punto solidale al corpo rigido. Al variare di θ l'origine O ha coordinate diverse in un riferimento solidale, ma nella (5.19) $\mathbf{v}_O$ si deve intendere come la velocità di un punto solidale; per calcolarla possiamo usare nuovamente la formula fondamentale (5.3) nel modo seguente:

$$\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_B - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_B = 2\mathbf{v}_B = 2\ell\dot{\theta}(\cos\theta\mathbf{e}_1 - \sin\theta\mathbf{e}_2).$$

Inoltre, con il teorema di Huygens-Steiner, otteniamo

$$I_O\boldsymbol{\omega} = \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3.$$

Abbiamo dunque

$$\mathbf{M}_O = -2m\ell^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3 + \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3 = -\frac{2}{3}m\ell^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3.$$

In alternativa si può calcolare il momento angolare $\mathbf{M}_O$ come segue:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_B + \mathbf{x}_B \times m\mathbf{v}_B = \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3 - m\ell^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3.$$

In questo modo sparisce l'ambiguità di notazione, che nasceva dal fatto di calcolare la velocità di un punto solidale al corpo (il punto O), ma sempre diverso al variare di θ.

Dalla (5.15) si ottiene

$$-\frac{2}{3}m\ell^2\ddot{\theta} = (-2\cos\theta\Phi_1 + 2\sin\theta\Phi_2 - mg\sin\theta)\ell. \tag{5.20}$$

Possiamo eliminare le reazioni vincolari Φ_1, Φ_2 dalla (5.20) utilizzando la prima equazione cardinale proiettata lungo $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= m\mathbf{a}_B \cdot \mathbf{e}_1 = m\ell(\ddot\theta\cos\theta - \dot\theta^2\sin\theta), & (5.21)\\ \Phi_2 - mg &= m\mathbf{a}_B \cdot \mathbf{e}_2 = m\ell(\ddot\theta\sin\theta - \dot\theta^2\cos\theta). & (5.22)\end{aligned}$$

Sostituendo (5.21), (5.22) nella (5.20) otteniamo l'equazione del moto:

$$\ddot\theta = \frac{3}{4}\frac{g}{\ell}\sin\theta. \tag{5.23}$$

Nel caso ii) abbiamo

$$\mathbf{M}_B = I_B\boldsymbol{\omega} = \frac{m\ell^2}{3}\dot\theta\mathbf{e}_3$$

per cui dalla (5.16) si ottiene l'equazione

$$\frac{m\ell^2}{3}\ddot\theta = (\Phi_2\sin\theta - \Phi_1\cos\theta)\ell. \tag{5.24}$$

Sostituendo (5.21), (5.22) nella (5.24) si ottiene l'equazione del moto (5.23).

Nel caso iii) abbiamo

$$\mathbf{M}_{C_0} = \mathbf{M}_B + (\mathbf{x}_{C_0} - \mathbf{x}_B) \times m\mathbf{v}_B = \mathbf{M}_B - \mathbf{x}_B \times m\mathbf{v}_B = \frac{4}{3}m\ell^2\dot\theta\mathbf{e}_3,$$

e dalla (5.17) si ottiene subito l'equazione (5.23).

Esercizio 7. *Si studi il moto di un disco omogeneo di raggio R e massa m che rotola senza strisciare su un piano inclinato di un angolo α rispetto a $O\hat{\mathbf{e}}_1$.*

5.6 Conservazione dell'energia ed equazioni del moto

Dal teorema dell'energia cinetica abbiamo

$$\dot T = \Pi, \tag{5.25}$$

dove

$$\Pi = \sum_{h=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_h \cdot \vec{\mathbf{v}}_h = \sum_{h=1}^{n} \mathbf{F}_h \cdot [\vec{\mathbf{v}}_{O'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P_h - O')] = \vec{\mathbf{R}}^{(E)} \cdot \vec{\mathbf{v}}_{O'} + \vec{\mathbf{N}}^{(E)}_{O'} \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}}.$$

Nel caso di corpi rigidi continui otteniamo lo stesso risultato usando (5.10) e l'ipotesi che la risultante delle forze interne sia nulla:

$$\Pi = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{x}') \cdot \boldsymbol{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \mathbf{R}^{(E)} \cdot \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{N}^{(E)}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega}. \tag{5.26}$$

Nell'equazione della variazione dell'energia cinetica (5.25) si possono quindi usare sistemi di forze equivalenti a quelli dati, sia per i corpi rigidi discreti che per quelli continui.

Usiamo la conservazione dell'energia per scrivere le equazioni del moto del sistema dell'Esempio 7.

Le reazioni vincolari sono a potenza nulla, per ogni velocità possibile. La potenza della forza di gravità è la derivata totale rispetto al tempo di $-V$, con $V = mgy$. Derivando rispetto a t l'equazione dell'energia

$$E = T + V = \frac{4}{6} m\ell^2 \dot{\theta}^2 + mg\ell \cos\theta$$

si ottiene

$$\dot{E} = \Big[\frac{4}{3} m\ell^2 \ddot{\theta} - mg\ell \sin\theta\Big]\dot{\theta} = 0.$$

Da questa si ottengono due equazioni: la prima, $\dot{\theta} = 0$, dice semplicemente che l'energia si conserva nelle configurazioni di equilibrio. La seconda ci fornisce l'equazione di moto:

$$\frac{4}{3} m\ell^2 \ddot{\theta} - mg\ell \sin\theta = 0.$$

Esercizio 8. *Scrivere l'equazione del moto per il disco che rotola su un piano inclinato (esempio 7).*

5.7 Equazioni di Eulero per il Corpo Rigido con un punto fisso

Fissiamo un riferimento $\Sigma = O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, che possiamo assumere inerziale, e scriviamo le equazioni che descrivono il moto di un corpo rigido $\mathfrak{C}$ con un punto fisso O. La seconda equazione cardinale in questo caso è sufficiente per determinare il moto:

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{M}}_O\Big|_\Sigma = \vec{\mathbf{N}}_O. \tag{5.27}$$

Sia $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ la velocità angolare del corpo rigido e consideriamo un sistema di riferimento principale $\Sigma' = O'\hat{\mathbf{e}}'_1\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3$, solidale a $\mathfrak{C}$ e centrato nel punto $O' = O$. Assumiamo inoltre che la velocità angolare di Σ' rispetto a Σ sia $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, cioè che Σ' abbia la velocità angolare di minima norma tra quella di tutti i riferimenti solidali.[3]

[3]Questa ultima ipotesi serve a includere nella trattazione i corpi costituiti da punti tutti allineati.

Dalla (2.5) otteniamo

$$\left.\frac{d\vec{\mathbf{M}}_O}{dt}\right|_{\Sigma'} = \vec{\mathbf{M}}_O \times \vec{\boldsymbol{\omega}} + \vec{\mathbf{N}}_O. \tag{5.28}$$

Usando la relazione

$$\vec{\mathbf{M}}_O = \mathfrak{I}_O \vec{\boldsymbol{\omega}}$$

otteniamo le equazioni di Eulero

$$\mathfrak{I}_O \dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}} = \mathfrak{I}_O \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{\omega}} + \vec{\mathbf{N}}_O, \tag{5.29}$$

in cui possiamo scrivere senza ambiguità $\dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}}$ per la derivata temporale di $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ in Σ' dato che è uguale a quella in Σ.

5.8 Moto per inerzia (Euler-Poinsot)

Definizione 13. *Chiamiamo* **moti per inerzia** *le soluzioni di*

$$\mathfrak{I}_O \dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}} = \mathfrak{I}_O \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{\omega}}, \tag{5.30}$$

cioè le soluzioni delle equazioni di Eulero (5.29) con $\vec{\mathbf{N}}_O = \vec{\mathbf{0}}$.

Rientrano in questo caso i moti di un corpo rigido pesante (cioè soggetto alla forza di gravità) vincolato al baricentro, ma anche un corpo rigido pesante libero di muoversi nello spazio. Per quest'ultimo basta studiare il moto nel sistema di riferimento del baricentro, che quindi diventa un punto fisso).

Rappresentiamo la velocità angolare $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, il momento angolare $\vec{\mathbf{M}}_O$ ed il momento della forza $\vec{\mathbf{N}}_O$ in coordinate nella base $\mathcal{B}' = \{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$:

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \, \hat{\mathbf{e}}'_h, \qquad \vec{\mathbf{M}}_O = \sum_{h=1}^{3} M_h \, \hat{\mathbf{e}}'_h = \sum_{h=1}^{3} I_h \, \omega_h \, \hat{\mathbf{e}}'_h, \qquad \vec{\mathbf{N}}_O = \sum_{h=1}^{3} \mathbf{N}_h \, \hat{\mathbf{e}}'_h.$$

Le equazioni (5.30), scritte in coordinate nella base $\mathcal{B}'$, diventano

$$\left\{ \begin{array}{rcl} I_1 \dot{\omega}_1 & = & \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) \\ I_2 \dot{\omega}_2 & = & \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) \\ I_3 \dot{\omega}_3 & = & \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) \end{array} \right. . \tag{5.31}$$

Si può descrivere la soluzione generale di queste equazioni tramite l'uso di funzioni speciali, vedi [18].

È interessante ottenere una descrizione delle soluzioni dal punto di vista geometrico utilizzando solo gli integrali primi della norma del momento angolare e dell'energia (in questo caso solo cinetica, poiché la potenza della reazione vincolare è nulla, infatti l'unica velocità possibile per O è quella nulla). Per questo introduciamo la seguente

Definizione 14. *L'insieme*

$$\mathcal{E}_O = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}^3 : \vec{\mathbf{x}} \cdot \mathfrak{I}_O \vec{\mathbf{x}} = 1\}$$

si dice **ellissoide di inerzia** *relativo al punto* O.

Nella base $\mathcal{B}'$ l'equazione dell'ellissoide di inerzia si scrive

$$I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 = 1,$$

quindi gli assi principali dell'ellissoide sono diretti lungo le direzioni principali di inerzia e la loro lunghezza è $1/\sqrt{I_j}$, $j = 1, 2, 3$.

Proposizione 27. *(Poinsot) In una precessione per inerzia, con punto fisso O, l'ellissoide di inerzia relativo al polo O rotola senza strisciare su un piano fisso perpendicolare al vettore momento angolare $\vec{\mathbf{M}}_O$.*

In questo caso l'energia totale corrisponde all'energia cinetica:

$$E = T = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathfrak{I}_O \vec{\boldsymbol{\omega}},$$

in cui $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ è la velocità angolare del corpo. Il vettore $\vec{\boldsymbol{\xi}} = \vec{\boldsymbol{\omega}}/\sqrt{2E}$ ci dà l'intersezione di $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ con l'ellissoide di inerzia $\mathcal{E}_O$.

Si osserva che

1. il piano tangente all'ellissoide nel punto individuato da $\vec{\boldsymbol{\xi}}$ è ortogonale a $\vec{\mathbf{M}}_O$, infatti
$$\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} \cdot I_O\mathbf{x}) = 2I_O\mathbf{x}$$
e, sostituendo $\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega}/\sqrt{2E}$ abbiamo $I_O\boldsymbol{\omega}\sqrt{2/E} = \mathbf{M}_O\sqrt{2/E}$;
2. la distanza di tale piano da O è costante, infatti questa è data da
$$\frac{\vec{\boldsymbol{\xi}} \cdot \vec{\mathbf{M}}_O}{|\vec{\mathbf{M}}_O|} = \frac{\vec{\mathbf{M}}_O \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}}}{\sqrt{2E}|\vec{\mathbf{M}}_O|} = \frac{\sqrt{2E}}{|\vec{\mathbf{M}}_O|};$$
3. la velocità del punto dell'ellissoide a contatto col piano è nulla, infatti l'ellissoide è solidale al corpo e $O\vec{\boldsymbol{\xi}}$ è l'asse istantaneo di rotazione. Siccome $\vec{\mathbf{v}}_O = \vec{\mathbf{0}}$, tutti i punti del corpo su $O\vec{\boldsymbol{\xi}}$ hanno velocità nulla.

Si chiama **poloide** la curva tracciata sulla superficie dell'ellissoide di inerzia, definita dai punti dell'ellissoide a contatto con il piano fisso); si chiama invece **erpoloide** la curva, tracciata sul piano fisso, definita dal punto di contatto tra l'ellissoide di inerzia e il piano.

Esaminiamo in dettaglio il caso perfettamente simmetrico ($I_1 = I_2 = I_3$), il caso a simmetria giroscopica ($I_1 = I_2 \neq I_3$) e quello generale ($I_1 > I_2 > I_3$).

CASO 1: $I_1 = I_2 = I_3 = I$

Questo è il caso di un corpo sferico omogeneo o comunque di un corpo con distribuzione di massa a simmetria sferica, per esempio un corpo formato da 8 masse uguali disposte ai vertici di un cubo, vedi Esercizio 4.

Abbiamo la relazione

$$\vec{\mathbf{M}}_O = I\,\vec{\boldsymbol{\omega}} \tag{5.32}$$

Siccome $\vec{\mathbf{M}}_O$ è un integrale primo nel sistema di riferimento inerziale anche $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\mathbf{M}}_O/I$ è costante lungo le orbite, quindi *il moto per inerzia è un moto rotatorio uniforme attorno a un asse fisso nello spazio (nel riferimento inerziale)*, cheè l'asse istantaneo di rotazione.

Il vettore $\vec{\mathbf{M}}_O$ è costante anche nel sistema di riferimento solidale al corpo: questo segue dalla (5.32) e dalle equazioni di Eulero (5.31), che in questo caso diventano

$$I_1\,\dot{\omega}_1 = I_2\,\dot{\omega}_2 = I_3\,\dot{\omega}_3 = 0.$$

Il fatto che $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ sia costante anche nel riferimento solidale segue anche dalla (2.5).

CASO 2: $I_1 = I_2 \neq I_3$

In questo caso $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ non è più costante, ma valgono le seguenti proprietà:

1. $|\vec{\boldsymbol{\omega}}|$ è costante;
2. il momento angolare $\vec{\mathbf{M}}_O$, la velocità angolare $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ e l'asse $\hat{\mathbf{e}}'_3$ sono complanari;
3. gli angoli tra due qualsiasi dei vettori $\vec{\mathbf{M}}_O, \vec{\boldsymbol{\omega}}, \hat{\mathbf{e}}'_3$ sono costanti.

Osservazione 17. *La terza proprietà ci dice in particolare che sono costanti le componenti del vettore velocità angolare $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ sui vettori $\hat{\mathbf{e}}'_3$ ed $\vec{\mathbf{M}}_O$.*

Dimostrazione. Le equazioni di Eulero si scrivono nel modo seguente

$$\left\{\begin{array}{lcl} I_1\dot{\omega}_1 &=& \omega_2\omega_3(I_1 - I_3) \\ I_1\dot{\omega}_2 &=& \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) \\ I_3\dot{\omega}_3 &=& 0 \end{array}\right. \tag{5.33}$$

dunque otteniamo

$$\omega_3 = \text{ costante} \qquad \omega_1^2 + \omega_2^2 = \text{ costante ,}$$

per cui è costante anche $|\boldsymbol{\omega}|$.

Siano α l'angolo tra $\vec{\mathbf{M}}_O$ ed $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, β l'angolo tra $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ ed $\hat{\mathbf{e}}_3'$ e γ l'angolo tra $\vec{\mathbf{M}}_O$ ed $\hat{\mathbf{e}}_3'$. Scriviamo le espressioni dei coseni di tali angoli:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\vec{\mathbf{M}}_O \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}}}{|\vec{\mathbf{M}}_O|\,|\vec{\boldsymbol{\omega}}|} = \frac{2E}{|\vec{\mathbf{M}}_O|\,|\vec{\boldsymbol{\omega}}|} \\
\cos\beta &= \frac{\omega_3}{|\vec{\boldsymbol{\omega}}|} \\
\cos\gamma &= \frac{M_3}{|\vec{\mathbf{M}}_O|} = \frac{I_3\,\omega_3}{|\vec{\mathbf{M}}_O|}
\end{aligned}$$

Usando il punto (1) e la conservazione dell'energia e della lunghezza del momento angolare (anche nel sistema di riferimento solidale) otteniamo che $\cos\alpha$ è costante. Dal punto (1) segue immediatamente che anche $\cos\beta$ è costante. La dimostrazione che $\cos\gamma$ è costante si fa in modo analogo.

Il fatto che i vettori $\vec{\mathbf{M}}_O$, $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, $\hat{\mathbf{e}}_3'$ siano coplanari durante il moto si ottiene dalla relazione

$$\det\begin{pmatrix} I_1\,\omega_1 & I_1\,\omega_2 & I_3\,\omega_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

□

Proposizione 28. *Si consideri il moto di un corpo rigido $\mathfrak{C}$ con un punto fisso O avente struttura giroscopica attorno all'asse $\hat{\mathbf{e}}_3'$. Il vettore $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ ruota uniformemente attorno alla direzione fissa del momento angolare $\vec{\mathbf{M}}_O$ descrivendo un cono di rotazione $\mathcal{C}'$ con velocità angolare costante. Analogamente la traccia di $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ sul corpo $\mathfrak{C}$ descrive un cono di rotazione $\mathcal{C}''$ con velocità angolare costante. Considerando $\mathcal{C}'$ fisso e $\mathcal{C}''$ solidale al corpo rigido, si ha che i due coni rotolano l'uno sull'altro senza strisciare (*moto alla Poinsot*).*

Dimostrazione. Il vettore $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ descrive un cono in entrambi i sistemi di riferimento poiché per la proposizione precedente l'angolo tra $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ ed $\vec{\mathbf{M}}_O$ e l'angolo tra $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ ed $\hat{\mathbf{e}}_3'$ sono costanti. Questi due coni rotolano senza strisciare l'uno sull'altro poiché i punti del corpo che si trovano sull'asse passante per O e parallelo ad $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ hanno tutti velocità nulla (è l'asse istantaneo di rotazione e O ha velocità nulla). Tale asse corrisponde alla retta istantanea di contatto tra i due coni e ha velocità istantanea nulla sia nel sistema di riferimento inerziale che nel riferimento solidale: ciò è dovuto al fatto che la derivata temporale di $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ fatta nei due riferimenti è la stessa.

Dimostriamo adesso che il moto di rotazione è uniforme.

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega'\,\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{M}_O} + \omega''\,\hat{\mathbf{e}}_3'$$

con $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{M}_O}$ versore di $\vec{\mathbf{M}}_O$, per cui

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_3'\Big|_\Sigma = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{e}}_3' = \omega'\,\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{M}_O} \times \hat{\mathbf{e}}_3'.$$

Analogamente si ha

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{M}_O}\Big|_{\Sigma'} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{M}_O} = \omega''\,\hat{\mathbf{e}}_3' \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{M}_O}.$$

□

Caso 3: $I_1 > I_2 > I_3$

Le equazioni di Eulero (5.30) ammettono gli integrali primi

$$\begin{cases} |\mathbf{M}_O|^2 = I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2, \\ 2E = I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2, \end{cases}$$

con $\mathbf{M}_O = (M_1, M_2, M_3)^T$.

Definizione 15. *Chiamiamo* **rotazioni stazionarie** *le soluzioni $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ costanti delle equazioni di Eulero (5.30).*

Ricordiamo che $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ è costante nel riferimento Σ' se e solo se è costante in Σ.

Dalla (5.30) si vede che le rotazioni stazionarie sono quelle per cui

$$\mathfrak{I}_O\vec{\boldsymbol{\omega}} \parallel \vec{\boldsymbol{\omega}},$$

cioè sono gli autovettori di $\mathfrak{I}_O$. Quindi se il vettore $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ è una rotazione stazionaria allora è necessariamente parallelo ad uno degli $\hat{\mathbf{e}}_j'$. Si parla dunque di rotazioni stazionarie attorno agli assi $O\hat{\mathbf{e}}_1'$, $O\hat{\mathbf{e}}_2'$, $O\hat{\mathbf{e}}_3'$.

Dalla relazione $\vec{\mathbf{M}}_O = \mathfrak{I}_O\vec{\boldsymbol{\omega}}$ si ottiene che anche $\vec{\mathbf{M}}_O$ deve essere parallelo ad $\vec{\boldsymbol{\omega}}$. Quindi in questo caso $\vec{\mathbf{M}}_O$ è costante anche in Σ'.

Per studiare la stabilità delle rotazioni stazionarie e capire la geometria delle soluzioni di (5.30) consideriamo le equazioni

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{M}}_O\Big|_{\Sigma'} = \vec{\mathbf{M}}_O \times \vec{\boldsymbol{\omega}}, \tag{5.34}$$

che hanno gli integrali primi

$$\begin{cases} |\mathbf{M}_O|^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2, \\ 2E = \dfrac{M_1^2}{I_1} + \dfrac{M_2^2}{I_2} + \dfrac{M_2^2}{I_2}. \end{cases} \tag{5.35}$$

Per valori fissati di $|\mathbf{M}_O|$, E le (5.35) rappresentano l'intersezione di una sfera di raggio $|\mathbf{M}_O|$ con un ellissoide di semiassi $\sqrt{2EI_j}$, $j = 1, 2, 3$, e individuiamo le traiettorie possibili per le coordinate (M_1, M_2, M_3) del momento angolare nella base $\mathcal{B}'$.

Fissiamo un valore E per l'energia e consideriamo l'insieme delle coordinate (M_1, M_2, M_3) che soddisfano (5.35). Il fatto che questo insieme sia non vuoto è garantito dalle relazioni

$$2EI_3 \leq |\mathbf{M}_O|^2 \leq 2EI_1.$$

Descriviamo l'insieme delle traiettorie delle soluzioni di (5.31) nei vari casi. Ci sono cinque possibilità: 1) $2EI_3 = |\mathbf{M}_O|$; 2) $2EI_3 < |\mathbf{M}_O| < 2EI_2$; 3) $|\mathbf{M}_O| = 2EI_2$; 4) $2EI_2 < |\mathbf{M}_O| < 2EI_1$; 5) $\||\mathbf{M}_O| = 2EI_1$.

Nel caso 1) abbiamo due punti di equilibrio sull'asse $O\hat{\mathbf{e}}_3'$, che corrispondono alle rotazioni stazionarie con $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ parallelo a $\hat{\mathbf{e}}_3'$. Nel caso 2) abbiamo due curve chiuse attorno all'asse $O\hat{\mathbf{e}}_3'$. Nel caso 3) abbiamo due punti di equilibrio sull'asse $O\hat{\mathbf{e}}_2'$ e quattro curve che li congiungono, che corrispondono alle separatrici stabili e instabili delle equazioni (5.34) ristrette all'ellissoide di energia costante. Nel caso 4) abbiamo due curve chiuse attorno all'asse $O\hat{\mathbf{e}}_1'$. Nel caso 5) abbiamo due punti di equilibrio sull'asse $O\hat{\mathbf{e}}_1'$.

... inserisci figura ...

Usando la relazione $\vec{\mathbf{M}}_O = \mathfrak{I}_O\vec{\boldsymbol{\omega}}$ si conclude che le rotazioni stazionarie attorno a $O\hat{\mathbf{e}}_1'$, $O\hat{\mathbf{e}}_3'$ sono stabili, mentre quelle attorno a $O\hat{\mathbf{e}}_2'$ sono instabili.

L'instabilità delle rotazioni stazionarie attorno all'asse $O\hat{\mathbf{e}}_2'$ si può anche ottenere dal calcolo diretto degli esponenti di Lyapounov del sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{\omega}_1 & = & \alpha_1\omega_2\omega_3 \\ \dot{\omega}_2 & = & \alpha_2\omega_3\omega_1 \\ \dot{\omega}_3 & = & \alpha_3\omega_1\omega_2 \end{array}\right.$$

con

$$\alpha_1 = \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} > 0, \qquad \alpha_2 = \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} < 0, \qquad \alpha_3 = \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} > 0.$$

Posto $\mathbf{F}(\boldsymbol{\omega}) = (\alpha_1\omega_2\omega_3, \alpha_2\omega_3\omega_1, \alpha_3\omega_1\omega_2)^T$ si ottiene infatti che

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\omega}}(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

per cui gli esponenti di Lyapounov sono

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\alpha_1\alpha_3}$$

ed uno di essi è > 0.

5.8.1 Fase geometrica nel moto del corpo rigido

Consideriamo adesso un moto periodico attorno ad una rotazione stazionaria stabile, per esempio attorno a $O\hat{\mathbf{e}}_1$. Vogliamo calcolare l'angolo $\Delta\theta$, che ci dice di quanto è ruotato il corpo rigido dopo un periodo di $\mathbf{M}_O$.

Riportiamo qui una formula dimostrata da Montgomery in [15]:

$$\Delta\theta = 2\frac{ET}{|\mathbf{M}_O|} - \Omega \tag{5.36}$$

in cui T è il periodo del moto ed Ω è l'angolo solido tracciato sulla sfera unitaria centrata in O e solidale al corpo dalla direzione del momento angolare $\vec{\mathbf{M}}_O$.

In [14] si trova una dimostrazione della formula (5.36) utilizzando il teorema di Gauss-Bonnet e la Proposizione 27.