Capitolo 3

Dinamica dei sistemi di N punti materiali

Consideriamo un sistema di punti materiali P_i di massa m_i, $i = 1, .., N$, su cui agiscono le forza $\vec{\mathbf{F}}_i$ nel sistema di riferimento $\Sigma = O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$. Siano $\vec{\mathbf{x}}_i, \vec{\mathbf{v}}_i, \vec{\mathbf{a}}_i$ la posizione, la velocità e l'accelerazione di P_i relative a Σ e $\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^3$ le loro coordinate. Introduciamo le seguenti quantità, utili a descrivere la dinamica degli N punti nel loro insieme:

Quantità di moto totale (momento lineare)

$$\vec{\mathbf{p}} = \sum_{j=1}^{N} \vec{\mathbf{p}}_j = \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{\mathbf{v}}_j$$

Momento Angolare rispetto a un polo Q

$$\vec{\mathbf{M}}_Q = \sum_{j=1}^{N} (P_j - Q) \times m_j \vec{\mathbf{v}}_j$$

Energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j |\vec{\mathbf{v}}_j|^2$$

Risultante delle forze $\mathbf{F}_j$

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{j=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_j$$

Momento risultante delle forze $\mathbf{F}_j$ rispetto a un polo Q

$$\vec{\mathbf{N}}_Q = \sum_{j=1}^{N} (P_j - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_j$$

Potenza risultante delle forze $\vec{\mathbf{F}}_j$

$$\Pi = \sum_{j=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_j \cdot \vec{\mathbf{v}}_j$$

Lavoro elementare all'instante t delle forze $\vec{\mathbf{F}}_j$

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_j \cdot d\vec{\mathbf{x}}_j$$

3.1 Teoremi di scomposizione relativi al baricentro

Introduciamo la massa totale

$$m = \sum_{j=1}^{N} m_j$$

e le coordinate del baricentro $\mathbf{x}_B \in \mathbb{R}^3$, definite da

$$m(B - O) = \sum_{j=1}^{N} m_j (P_j - O). \tag{3.1}$$

Definizione 3. *Dato un sistema di N punti materiali e fissato un sistema di riferimento Σ, il riferimento del baricentro è il sistema di riferimento Σ' centrato in B ed orientato come Σ.*

Rappresentazione della quantità di moto

Dalla (3.1) segue subito che la quantità di moto totale corrisponde a quella di un punto avente massa totale m, che si muove come il baricentro del sistema:

$$\mathbf{p} = \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{v}_j = m\mathbf{v}_B. \tag{3.2}$$

Proposizione 6. *(teorema del centro di massa) Il baricentro di un sistema di N punti si muove come un punto materiale di massa m su cui agisce la risultante $\mathbf{R}$ delle forze che agiscono sui singoli punti:*

$$m\ddot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{R}. \tag{3.3}$$

Dimostrazione. Sia $t \to (\mathbf{x}_1(t) \dots \mathbf{x}_N(t))$ una soluzione delle equazioni di Newton (1.6). Derivando (3.2) si ottiene

$$m\ddot{\mathbf{x}}_B = \sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_j.$$

□

Scomposizione del momento angolare rispetto a un polo Q

Il momento angolare totale rispetto ad un polo $Q \in \mathbb{E}^3$ si può scomporre come somma di due componenti

$$\mathbf{M}_Q = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times m\mathbf{v}_B + \mathbf{M}^{(B)}, \quad \mathbf{M}^{(B)} = \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B). \tag{3.4}$$

La prima corrisponde al momento angolare rispetto a Q di un punto di massa m che si muove come il baricentro del sistema. La seconda, cioè $\mathbf{M}^{(B)}$, corrisponde al momento angolare nel sistema nel riferimento del baricentro e non dipende dalla scelta del polo Q.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_Q &= \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{v}_j + \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times m_j \mathbf{v}_j = \\ &= \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{v}_j + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times m\mathbf{v}_B. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\sum_{j=1}^{N} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{v}_B = \sum_{j=1}^{N} m_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{v}_B = m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{v}_B = 0,$$

da cui segue la (3.4).

□

Osservazione 2. *Se scriviamo* $\mathbf{M}_Q$ *nel riferimento del baricentro il primo addendo in (3.4) si annulla. Quindi in tale riferimento il momento angolare non dipende dalla scelta del polo.*

Scomposizione del momento risultante delle forze rispetto a un polo Q

Il momento risultante delle forze rispetto ad un polo $Q \in \mathbb{E}^3$ si può scomporre come somma di due componenti

$$\mathbf{N}_Q = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{R} + \mathbf{N}^{(B)}, \qquad \mathbf{N}^{(B)} = \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_B) \tag{3.5}$$

la prima corrisponde al momento della forza risultante $\mathbf{R}$ rispetto a Q, agente sul baricentro B del sistema, la seconda, cioè $\mathbf{N}^{(B)}$, corrisponde al momento risultante delle forze nel riferimento del baricentro e non dipende dalla scelta del polo Q.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_Q &= \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{F}_j + \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{F}_j = \\ &= \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{F}_j + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\sum_{j=1}^{N} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{a}_B = \sum_{j=1}^{N} m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{a}_B = m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{a}_B = 0$$

da cui segue la (3.5).

□

Osservazione 3. *Se scriviamo* $\mathbf{N}_Q$ *nel riferimento del baricentro il primo addendo in (3.5) si annulla per la Proposizione 6. Quindi in tale riferimento il momento risultante delle forze non dipende dalla scelta del polo.*

Scomposizione dell'energia cinetica

L'energia cinetica del sistema si può scomporre come somma di due componenti

$$T = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_B|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) \qquad \text{(teorema di König)}. \tag{3.6}$$

la prima corrisponde all'energia cinetica di un punto materiale di massa m che si muove come il baricentro del sistema, la seconda corrisponde all'energia cinetica del sistema nel riferimento del baricentro. Questo risultato è noto come teorema di König.

Dimostrazione.

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B)\cdot(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) + \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{v}_B \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) + \frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{N} m_j)\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{v}_B.$$

Inoltre il secondo addendo a destra è nullo. □

3.2 Forze interne e forze esterne

Scomponiamo la forza $\vec{\mathbf{F}}_i$ che agisce sul punto P_i come somma vettoriale di 2 contributi: $\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{I})} + \vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{E})}$. Il vettore $\vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{I})}$ si chiama forza interna ed è la somma delle forze che gli altri punti del sistema esercitano su P_i; $\vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{E})}$ è la somma delle altre forze e si chiama forza esterna.

Quindi $\vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{E})} = \vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{E})}(\vec{\mathbf{x}}_i, \vec{\mathbf{v}}_i, t)$, cioè dipende solo dallo stato del punto P_i.

Ipotesi sulle forze interne (*forze di tipo classico*):

$$\vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{I})} = \vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{I})}(\vec{\mathbf{x}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{x}}_N) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{\mathbf{F}}_{ij}(\vec{\mathbf{x}}_i, \vec{\mathbf{x}}_j), \tag{3.7}$$

cioè le $\vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{I})}$ sono puramente posizionali e sono somma vettoriale di interazioni a due corpi. Inoltre assumiamo che valgano le seguenti proprietà:

1. $\vec{\mathbf{F}}_{ij} + \vec{\mathbf{F}}_{ji} = 0, \quad \forall i, j,$
2. $\vec{\mathbf{F}}_{ij} \times \vec{\mathbf{r}}_{ij} = 0$, con $\vec{\mathbf{r}}_{ij} = \vec{\mathbf{x}}_i - \vec{\mathbf{x}}_j$,
3. $\vec{\mathbf{F}}_{ij} = f_{ij}(\rho_{ij})\frac{\mathbf{r}_{ij}}{\rho_{ij}}$, con $\rho_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}|$.

Osserviamo che si ha $f_{ij} = f_{ji}$.

Osservazione 4. *Queste ipotesi sulle forze sono caratteristiche della Meccanica Classica: la proprietà 1. corrisponde al principio di azione e reazione.*

Con queste ipotesi si dimostra che la risultante e il momento risultante delle forze interne (rispetto a qualunque polo Q) sono nulli. Infatti

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{R}}^{(I)} &= \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{I})} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{\mathbf{F}}_{ij} = \sum_{1\leq i<j\leq N} (\vec{\mathbf{F}}_{ij} + \vec{\mathbf{F}}_{ji}) = \vec{\mathbf{0}}, \\
\vec{\mathbf{N}}_Q^{(I)} &= \sum_{i=1}^{N} (P_i - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{I})} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} (P_i - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_{ij} = \\
&= \sum_{1\leq i<j\leq N} (P_i - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_{ij} + (P_j - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_{ji} = \sum_{1\leq i<j\leq N} (P_i - P_j) \times \vec{\mathbf{F}}_{ij} = \vec{\mathbf{0}}.
\end{aligned}$$

3.3 Le equazioni cardinali

Bilancio del momento angolare

$$\dot{\mathbf{M}}_Q = \mathbf{N}_Q - \mathbf{v}_Q \times \mathbf{p} \tag{3.8}$$

Dimostrazione. Basta derivare la formula che definisce $\mathbf{M}_Q$. □

Con le ipotesi sulle forze interne fatte nella sezione precedente, le relazioni (3.3), (3.8) si possono scrivere

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{R}^{(E)} \\ \dot{\mathbf{M}}_Q &= \mathbf{N}_Q^{(E)} - \mathbf{v}_Q \times \mathbf{p} \end{cases} . \tag{3.9}$$

Le (3.9) si chiamano equazioni cardinali della dinamica.

3.4 Sistemi di forze equivalenti

Consideriamo due sistemi di forze applicate:

$$\mathcal{F} = \{(\vec{\mathbf{F}}_1, P_1) \dots (\vec{\mathbf{F}}_m, P_m)\}, \qquad \mathcal{G} = \{(\vec{\mathbf{G}}_1, Q_1) \dots (\vec{\mathbf{G}}_m, Q_m)\}.$$

Definizione 4. *$\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ si dicono equivalenti se hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo O qualunque.*

Notiamo che se i sistemi $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ hanno la stessa risultante ($\vec{\mathbf{R}}^{\mathcal{F}} = \vec{\mathbf{R}}^{\mathcal{G}}$) e lo stesso momento risultante delle forze rispetto a un polo O fissato ($\vec{\mathbf{N}}_O^{\mathcal{F}} = \vec{\mathbf{N}}_O^{\mathcal{G}}$), allora i due sistemi hanno lo stesso momento risultante rispetto ad un qualunque polo O':

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{N}}_{O'}^{\mathcal{F}} &= \sum_{h=1}^{m} (P_h - O') \times \vec{\mathbf{F}}_h = \vec{\mathbf{N}}_O^{\mathcal{F}} + (O - O') \times \vec{\mathbf{R}}^{\mathcal{F}} = \\ &= \vec{\mathbf{N}}_O^{\mathcal{G}} + (O - O') \times \vec{\mathbf{R}}^{\mathcal{G}} = \sum_{k=1}^{n} (Q_k - O') \times \vec{\mathbf{G}}_k = \vec{\mathbf{N}}_{O'}^{\mathcal{G}} \end{aligned}$$

Proposizione 7. *Ogni sistema di forze applicate $\mathcal{F} = \{(\vec{\mathbf{F}}_1, P_1) \ldots (\vec{\mathbf{F}}_m, P_m)\}$ è equivalente ad un sistema costituito da una forza applicata ad un punto qualunque Q, e da una coppia di forze, dipendente dalla scelta di Q.*

Dimostrazione. Sia $\vec{\mathbf{R}} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i$ la risultante delle forze ed $\vec{\mathbf{N}}_Q = \sum_i (P_i - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_i$ il momento risultante rispetto ad un polo fissato $Q \in \mathbb{E}^3$. Considero il sistema di forze

$$\mathcal{G} = \{(\vec{\mathbf{R}}, Q), (\vec{\mathbf{F}}, Q_1), (-\vec{\mathbf{F}}, Q_2)\}$$

con $Q_1, Q_2 \in \mathbb{E}^3, \vec{\mathbf{F}} \in \mathbb{V}^3$ scelti in modo che il momento della coppia $(Q_1 - Q_2) \times \vec{\mathbf{F}}$ sia uguale a $\vec{\mathbf{N}}_Q$. Si verifica facilmente che $\mathcal{G}$ è equivalente a $\mathcal{F}$.

□

Osserviamo che nelle equazioni cardinali (3.9) appaiono solamente la risultante ed il momento risultante delle forze (esterne), quindi considerando un sistema equivalente di forze otteniamo le stesse equazioni differenziali.

Esempio: consideriamo il caso della forza di gravità

$$\mathcal{F} = \{(\vec{\mathbf{F}}_i, P_i)\}_{i=1\ldots N}, \qquad \vec{\mathbf{F}}_i = -m_i g \hat{\mathbf{e}}_3.$$

Il sistema di forze $\mathcal{F}$ è equivalente a $\mathcal{G} = \{(\vec{\mathbf{R}}, B)\}$ formato da un'unica forza $\vec{\mathbf{R}} = -mg\hat{\mathbf{e}}_3$ applicata al baricentro B del sistema, infatti il momento risultante delle forze di gravità rispetto al baricentro è nullo.

3.5 Sistemi conservativi

Proposizione 8. *Le forze interne di tipo classico ammettono l'energia potenziale*

$$V^{(I)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{N} V_{ij}(\rho_{ij}), \quad \textit{con} \quad \frac{d}{d\rho_{ij}} V_{ij}(\rho_{ij}) = -f_{ij}(\rho_{ij}) \tag{3.10}$$

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{x}_k} V^{(I)} &= \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{x}_k} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j\neq i}}^{N} V_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{N} \nabla_{\mathbf{x}_k} V_{ik} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} \nabla_{\mathbf{x}_k} V_{kj}\Big) = \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{N} \nabla_{\mathbf{x}_k} V_{ki} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{N} \frac{dV_{ki}}{d\rho_{ki}} \nabla_{\mathbf{x}_k} \rho_{ki} = -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{N} f_{ki} \frac{\mathbf{r}_{ki}}{\rho_{ki}} = -\mathbf{F}_k^{(I)}.
\end{aligned}
$$

□

Osservazione 5. *Dalla relazione $f_{ij} = f_{ji}$ segue che possiamo scegliere $V_{ij} = V_{ji}$. Da questo fatto, che è stato usato nella dimostrazione della proposizione precedente, segue anche che l'energia potenziale delle forze interne si può scrivere*

$$V^{(I)}(\mathbf{x}) = \sum_{1\leq i,j\leq N} V_{ij}(\rho_{ij}).$$

Osservazione 6. *La funzione*

$$V_k^{(I)}(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} V_{kj}(\rho_{kj})$$

soddisfa la relazione

$$\mathbf{F}_k = -\nabla_{\mathbf{x}_k} V_k^{(I)},$$

ma la somma $\sum_{k=1}^{N} V_k^{(I)}$ non va bene come energia potenziale delle forze interne, perchè ci dà un contributo doppio delle forze.

Introduciamo la potenza delle forze interne e esterne, denotate rispettivamente con

$$\Pi^{(I)} = \sum_{j=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_j^{(I)} \cdot \vec{\mathbf{v}}_j, \qquad \Pi^{(E)} = \sum_{j=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_j^{(E)} \cdot \vec{\mathbf{v}}_j.$$

Abbiamo la seguente

Proposizione 9. *(teorema dell'energia cinetica) Sia $t \to \mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_1(t)\ldots\mathbf{x}_N(t)))$ una soluzione delle equazioni di Newton (1.6). Allora*

$$\dot{T} = \Pi.$$

Se le forze interne sono di tipo classico, con energia potenziale $V^{(I)}$, allora

$$\frac{d}{dt}(T + V^{(I)}) = \Pi^{(E)}. \tag{3.11}$$

Dimostrazione.

$$\Pi = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{v}_j = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\sum_{j=1}^{N} \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_j\Big) = \dot{T}.$$

Siccome le forze interne ammettono l'energia potenziale $V^{(I)}$, abbiamo

$$\frac{d}{dt}V^{(I)} = \sum_{i=1}^{N} \nabla_{\mathbf{x}_i} V^{(I)} \cdot \mathbf{v}_i = -\sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{I})} \cdot \mathbf{v}_i = -\Pi^{(I)},$$

da cui segue (3.11). □

Definizione 5. *La forza $\mathbf{F}_j$ che agisce sul punto P_j si dice conservativa se è puramente posizionale ($\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{x})$) e se esiste una funzione scalare $V_j(\mathbf{x})$ tale che $\mathbf{F}_j = -\nabla_{\mathbf{x}_j} V_j$.*

Definizione 6. *Un sistema meccanico di N punti materiali si dice conservativo se le forze $\vec{\mathbf{F}}_j$ che agiscono sui punti P_j sono puramente posizionali e se esiste una funzione scalare $V(\mathbf{x})$ tale che $\mathbf{F}_j = -\nabla_{\mathbf{x}_j} V$, per $j = 1 \ldots N$. La funzione V si chiama energia potenziale del sistema.*

Osservazione 7. *Nei sistemi conservativi le forze agenti sui singoli punti si possono ricavare dall'unica funzione scalare V. Si dice anche che il sistema ammette potenziale monogenico.*

Se le forze esterne $\vec{\mathbf{F}}_j^{(\mathrm{E})}$ sono tutte conservative (quindi $\vec{\mathbf{F}}_j^{(\mathrm{E})} = \vec{\mathbf{F}}_j^{(\mathrm{E})}(\mathbf{x}_j)$ ed esiste $V_j(\mathbf{x}_j)$ tale che $\vec{\mathbf{F}}_j^{(\mathrm{E})} = -\nabla_{\mathbf{x}_j} V_j$) allora la funzione $V^{(E)}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} V_j(\mathbf{x}_j)$ soddisfa

$$\mathbf{F}_j^{(E)} = -\nabla_{\mathbf{x}_j} V^{(E)}, \qquad j = 1 \ldots N.$$

In questo caso introduciamo l'energia potenziale del sistema

$$V(\mathbf{x}) = V^{(I)}(\mathbf{x}) + V^{(E)}(\mathbf{x})$$

e la sua energia totale

$$E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = T(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + V^{(I)}(\mathbf{x}) + V^{(E)}(\mathbf{x}).$$

Proposizione 10. *(conservazione dell'energia) L'energia totale di un sistema di N punti materiali soggetto a forze interne di tipo classico e a forze esterne conservative si conserva.*

Dimostrazione. Usando la (3.11) si ha

$$\frac{d}{dt}(T + V^{(I)} + V^{(E)}) = \Pi^{(E)} + \frac{d}{dt}V^{(E)} = 0,$$

infatti

$$\frac{d}{dt}V^{(E)} = \sum_{i=1}^{N} \nabla_{\mathbf{x}_i} V^{(E)} \cdot \mathbf{v}_i = -\sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{E})} \cdot \mathbf{v}_i = -\Pi^{(E)}.$$

□

3.6 Similitudine meccanica

Se le forze sono conservative, in alcuni casi è possibile ottenere informazioni sulle soluzioni senza bisogno di risolvere le equazioni del moto.

Esempio 2. *(riscalamento di massa e tempo)*

Se $\mathbf{x}(t)$ soddisfa

$$m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}(t) = -\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}(t))$$

poniamo $t_1 = \tau t$, $m_1 = \mu m$, con $\mu = \tau^2$. Allora $\mathbf{x}_1(t_1) = \mathbf{x}(t_1/\tau)$ soddisfa

$$m_1\frac{d^2}{dt_1^2}\mathbf{x}_1(t_1) = -\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}_1(t_1))$$

infatti

$$\frac{d}{dt_1}\mathbf{x}_1(t_1) = \frac{1}{\tau}\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t_1/\tau), \qquad \frac{d^2}{dt_1^2}\mathbf{x}_1(t_1) = \frac{1}{\tau^2}\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}(t_1/\tau).$$

3.6.1 Funzioni omogenee

Definizione 7. *Una funzione $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto, si dice* **omogenea** *di grado α se si ha*

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^\alpha f(\mathbf{x}) \qquad \forall \lambda > 0, \forall \mathbf{x} \in U \tag{3.12}$$

Teorema 1. *(Eulero) Sia $f : U \to \mathbb{R}$ omogenea di grado α. Allora*

$$\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}) \ . \tag{3.13}$$

Dimostrazione. Basta derivare l'equazione in (3.12) rispetto a λ e valutare l'equazione risultante per $\lambda = 1$.

□

Proposizione 11. *Il gradiente ∇f di una funzione omogenea f di grado α è omogeneo di grado $\alpha - 1$:*

$$\nabla f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^{\alpha-1} \nabla f(\mathbf{x}) \,,$$

Dimostrazione. Verifichiamo questa proprietà per le derivate parziali:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}_i}(\lambda \mathbf{x}) &= \lim_{h\to 0}\frac{V(\lambda(\mathbf{x}+\frac{h}{\lambda}\mathbf{e}_i)) - V(\lambda \mathbf{x})}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\lambda^{\alpha-1}[V((\mathbf{x}+\frac{h}{\lambda}\mathbf{e}_i)) - V(\mathbf{x})]}{h/\lambda} = \lambda^{\alpha-1}\frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}_i}(\mathbf{x}) \ .\end{aligned}$$

□

Esempio 3. *(riscalamento della lunghezza con potenziali omogenei)*

Consideriamo un campo di forze conservativo con energia potenziale V. Assumiamo inoltre che V sia omogenea di grado α. Ne segue che il gradiente $\nabla_{\mathbf{x}} V$ è omogeneo di grado $\alpha - 1$ (vedi Appendice, Sezione **??**).

Se $\mathbf{x}(t)$ soddisfa

$$m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}(t) = -\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}(t)) \tag{3.14}$$

Considero

$$\mathbf{x}_1(t) = \lambda \mathbf{x}(t)$$

e osservo che

$$\begin{aligned}m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}_1(t) &= m\lambda\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}(t) = -\lambda\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}(t)) = \\ &= -\lambda^{2-\alpha}\nabla_{\mathbf{x}} V(\lambda\mathbf{x}(t)) = -\lambda^{2-\alpha}\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}_1(t)).\end{aligned}$$

Se definisco $t_1 = \tau t$, $\mathbf{x}_2(t_1) = \mathbf{x}_1(t_1/\tau) = \lambda\mathbf{x}(t_1/\tau)$ dall'Esempio 2 si ottiene

$$m\frac{d^2}{dt_1^2}\mathbf{x}_2(t_1) = -\frac{\lambda^{2-\alpha}}{\tau^2}\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}_2(t_1)).$$

Quindi la condizione per cui le orbite riscalate risolvano la stessa ODE è

$$\frac{\lambda^{2-\alpha}}{\tau^2} = 1. \tag{3.15}$$

Osservazione 8. *Se $\alpha = 2$ (caso dell'oscillatore armonico) dalla (3.15) si ha $\tau^2 = 1$ per ogni $\lambda > 0$. Se abbiamo un'orbita periodica $\mathbf{x}_{per}(t)$ di periodo T allora esiste tutta una famiglia a 1 parametro di orbite $\{\lambda\mathbf{x}_{per}(t)\}$, $\lambda > 0$ che hanno lo stesso periodo. Nel caso unidimensionale ($\mathbf{x}_{per} \in \mathbb{R}$) da tale famiglia si ottengono tutte le orbite nello spazio delle fasi, che risulta foliato in orbite periodiche isocrone.*

Osservazione 9. *Se $\alpha = -1$ (caso del problema di Keplero, vedi Sezione 4.6), dalla (3.15) si ha $\tau^2 = \lambda^3$. Se $\mathbf{x}_{per}(t)$ è una soluzione periodica, cioè un'orbita ellittica, di periodo T allora la famiglia a un parametro $\{\lambda\mathbf{x}_{per}(t/\tau)\}$, con $\tau^2 = \lambda^3$, risolve la* *stessa equazione. Il rapporto tra i periodi di due soluzioni* $\lambda_1\mathbf{x}_{per}(t/\tau_1)$, $\lambda_2\mathbf{x}_{per}(t/\tau_2)$ *di questa famiglia è*

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{3/2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{3/2}, \tag{3.16}$$

dove a_1, a_2 *sono i semiassi maggiori delle 2 orbite. La relazione (3.16) corrisponde alla terza legge di Keplero.*

Esempio 4. *(trasformazioni di scala generali con potenziali omogenei)*

Più in generale posso considerare trasformazioni di scala

$$t \to t_1 = \tau t, \qquad \mathbf{x} \to \mathbf{x}_1 = \lambda\mathbf{x}, \qquad m \to m_1 = \mu m.$$

Se $\mathbf{x}(t)$ soddisfa (3.14) con V omogenea di grado α, allora $\mathbf{x}_1(t_1) = \lambda\mathbf{x}(t_1/\tau)$ soddisfa

$$m_1\frac{d^2}{dt_1^2}\mathbf{x}_1(t_1) = -\nabla_{\mathbf{x}}V(\mathbf{x}_1(t_1))$$

solo se $\lambda^{2-\alpha}/\tau^2 = \mu$.

3.7 Alcuni risultati sul problema degli N corpi

Consideriamo N punti materiali $P_1 \dots P_N$ di masse $m_1 \dots m_N$ soggetti soltanto alla loro interazione mutua, dovuta a forze interne di tipo classico. Sia $V(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N)$ l'energia potenziale di tali forze, per cui il moto dei punti soddisfa le equazioni

$$m_j\ddot{\mathbf{x}}_j = -\nabla_{\mathbf{x}_j}V(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N).$$

Introduciamo il momento di inerzia del sistema rispetto al baricentro $\mathbf{x}_B$:

$$I(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N) = \sum_{i=1}^{N} m_i|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_B|^2.$$

Dimostriamo che il momento di inerzia si può scrivere in termini delle distanze mutue tra i punti:

Proposizione 12. *Vale la seguente formula*

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_B|^2 = \frac{1}{m}\sum_{1\le i<j\le N} m_i m_j|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2. \tag{3.17}$$

Dimostrazione.

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} m_i m_j |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} m_i m_j (|\mathbf{x}_i|^2 + |\mathbf{x}_j|^2 - 2\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{x}_j) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(m-m_i)|\mathbf{x}_i|^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j(m-m_j)|\mathbf{x}_j|^2 - \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} m_i m_j(\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{x}_j) =$$

$$= m\sum_{i=1}^{N} m_i|\mathbf{x}_i|^2 - \sum_{i=1}^{N} m_i^2|\mathbf{x}_i|^2 - \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} m_i m_j(\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{x}_j) =$$

$$= m\sum_{i=1}^{N} m_i|\mathbf{x}_i|^2 - \sum_{i,j=1}^{N} m_i m_j(\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{x}_j).$$

Inoltre

$$\sum_{i=1}^{N} m_i|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_B|^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i\Big(\mathbf{x}_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{N} m_j\mathbf{x}_j\Big)\cdot\Big(\mathbf{x}_i - \frac{1}{m}\sum_{h=1}^{N} m_h\mathbf{x}_h\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i|\mathbf{x}_i|^2 - 2\sum_{i,j=1}^{N}\frac{m_i m_j}{m}\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{x}_j + \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{m^2}\sum_{j,h=1}^{N} m_j m_h\mathbf{x}_j\cdot\mathbf{x}_h =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i|\mathbf{x}_i|^2 - \frac{2}{m}\sum_{i,j=1}^{N} m_i m_j(\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{x}_j) + \frac{1}{m}\sum_{i,j=1}^{N} m_i m_j(\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{x}_j).$$

□

Osservazione 10. *Il risultato precedente è utile per interpretare alcune questioni sul moto degli N corpi in termini del moto delle distanze mutue (vedi Lagrange 1772, Albouy 1991).*

A meno di applicare una trasformazione galileiana, possiamo assumere che il baricentro degli N punti sia fermo nell'origine: $\mathbf{x}_B = \mathbf{0}$. Dimostriamo la seguente

Proposizione 13.

$$\ddot{I} = 4T + 2\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\cdot\mathbf{x}_i$$

Dimostrazione. Basta derivare due volte $I(\mathbf{x}_1\ldots\mathbf{x}_N)$ rispetto a t ed usare le equazioni di Newton:

$$\dot{I} = 2\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{x}_i\cdot\dot{\mathbf{x}}_i, \quad \ddot{I} = 2\sum_{i=1}^{N} m_i|\dot{\mathbf{x}}_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\cdot\mathbf{x}_i.$$

□

Corollario 1. *(identità di Lagrange) Se le forze sono conservative e l'energia potenziale V è omogenea di grado α allora*

$$\ddot{I} = 4T - 2\sum \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \mathbf{x}_i = 4T - 2\alpha V = 4E - 2(\alpha + 2)V,$$

cioè $\ddot{I}$ dipende solo dalla posizione dei punti e dall'energia totale E.