Capitolo 7

Equazioni di Lagrange

Consideriamo un sistema di N punti materiali soggetti a vincoli olonomi, con varietà delle configurazioni $\mathcal{C}_t$ al tempo t. Sia $\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$ un sistema di coordinate locali per $\mathcal{C}_t$.

Proposizione 30. *L'energia cinetica T è una funzione quadratica delle velocità lagrangiane $\dot{\mathbf{q}}$. In particolare*

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + T_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + T_0(\mathbf{q}, t),$$

dove T_j è omogenea di grado j nelle $\dot{\mathbf{q}}$. Inoltre $T_2 = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}}$, in cui $A(\mathbf{q}, t)$ si chiama matrice cinetica *ed è definita positiva.*

Dimostrazione. Introduciamo la matrice delle masse

$$M = \begin{bmatrix} m_1 I_3 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_N I_3 \end{bmatrix} \qquad M = \mathrm{diag}\{m_1, m_1, m_1, m_2, \dots, m_N, m_N, m_N\}$$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot M\boldsymbol{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \\ &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t}\Big) \cdot M\Big(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t}\Big) \\ &= T_2 + T_1 + T_0 \end{aligned}$$

con

$$
\begin{aligned}
T_2(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}\cdot A(\mathbf{q},t)\dot{\mathbf{q}}, \qquad A=(a_{ij}), \quad a_{ij}=\frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial q_i}\cdot M\frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial q_j}\\
T_1(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) &= \mathbf{b}(\mathbf{q},t)\cdot\dot{\mathbf{q}}, \qquad \mathbf{b}=(b_1,\dots,b_n), \quad b_i=\frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial q_i}\cdot M\frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial t}\\
T_0(\mathbf{q},t) &= \frac{1}{2}\frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial t}\cdot M\frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

Mostriamo che $A(\mathbf{q},t)$ è definita positiva. Sia $\mathbf{u}=(u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^n$ con $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$. Allora

$$
\mathbf{u}\cdot A(\mathbf{q},t)\mathbf{u}=\sum_{h,k=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}\cdot M\frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial q_k}u_hu_k=\Big(\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}u_h\Big)\cdot M\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial q_k}u_k\Big)>0,
$$

infatti M è definita positiva e, se $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$, $\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}u_h\neq\mathbf{0}$, poichè $\frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial q_1}\dots\frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial q_n}$ sono linearmente indipendenti.

□

Introduciamo adesso una prima forma delle equazioni di Lagrange.

Definizione 20. *Le funzioni*

$$
Q_h(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)=\sum_{j=1}^{N}\mathbf{F}_j(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q},t),\boldsymbol{v}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t),t)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\mathbf{q},t), \qquad h=1\dots n \tag{7.1}
$$

si chiamano **forze generalizzate** *oppure* **componenti lagrangiane delle forze***.*

Osserviamo che la dipendenza da t nelle Q_h può essere introdotta sia dalle forze che dal vincolo.

Proposizione 31. *Se $t\mapsto\mathbf{x}(t)$ soddisfa (6.11) allora $t\mapsto\mathbf{q}(t)$ data da $\mathbf{x}(t)=\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}(t),t)$ soddisfa le equazioni di Lagrange*

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)-\frac{\partial T}{\partial\mathbf{q}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)=\mathbf{Q}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t), \tag{7.2}
$$

con $\mathbf{Q}=(Q_1\dots Q_n)$.

Dimostrazione. Il principio di D'Alembert si può anche scrivere

$$
\ddot{\mathbf{x}}\cdot M\frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}=Q_h, \qquad h=1\dots n. \tag{7.3}
$$

quindi dobbiamo verificare che lungo le soluzioni di (6.11) si abbia

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = \ddot{\mathbf{x}}\cdot M\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}, \qquad h = 1\dots n. \tag{7.4}$$

Osserviamo che ad ogni soluzione $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ di (6.11) corrisponde localmente un'unica mappa $t \mapsto \mathbf{q}(t)$ tramite la relazione

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}(t), t).$$

Consideriamo l'energia cinetica $T = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot M\boldsymbol{v}$, con

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{h=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}\dot q_h + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t}.$$

Per $h = 1\dots n$ si ha

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_h} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot q_h}\cdot M\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}\cdot M\boldsymbol{v}$$

poichè $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{q}}$, quindi

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_h} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}\cdot M\boldsymbol{v} + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}\cdot M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt},$$

in cui

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \sum_{h=1}^{n}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_h}\dot q_h + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot q_h}\ddot q_h\Big) + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}.$$

Inoltre

$$\frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_h}\cdot M\boldsymbol{v}.$$

Dalle relazioni

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}}{\partial q_k \partial q_h}\dot q_k + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}}{\partial t \partial q_h},\\
\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_h} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h \partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h \partial t},
\end{aligned}$$

scambiando l'ordine di derivazione si ottiene

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_h}.$$

per cui

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial T}{\partial \dot q_h} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot M\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}.$$

Si conclude osservando che lungo una soluzione $t \mapsto \mathbf{x}(t)$, a cui corrisponde $t \mapsto \mathbf{q}(t)$, si ha

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = \ddot{\mathbf{x}}(t).$$

□

Osservazione 19. *La Proposizione 31 dice che il principio di D'Alembert è equivalente alle equazioni di Lagrange (7.2).*

Trasformiamo le equazioni di Lagrange (7.2) in un sistema di equazioni differenziali del primo ordine. Dalla relazione

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + c(\mathbf{q}, t)$$

si ottiene

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = A(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, t),$$

dunque le equazioni di Lagrange si possono scrivere

$$A(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} = F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$

con

$$F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \frac{dA}{dt}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\dot{\mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{b}}{dt}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$

dove

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_h} &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial A}{\partial q_h}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial q_h} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial T_0}{\partial q_h} \\ \frac{dA}{dt} &= \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial A}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial A}{\partial t}, \qquad \frac{d\mathbf{b}}{dt} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Quindi si può scrivere il sistema del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = A^{-1}(\mathbf{q}, t)F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \end{cases} \tag{7.5}$$

7.1 Forze conservative e lagrangiana

Definizione 21. *Un sistema lagrangiano di N punti materiali soggetto a vincoli olonomi con varietà delle configurazioni $\mathcal{C}_t$, $\dim(\mathcal{C}_t) = n$, e soggetto alle forze attive*

$\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{x}, t), j = 1 \dots N$, *si dice* **conservativo** *se esiste una funzione* $V(\mathbf{q}, t)$ *tale che le forze generalizzate* $Q_h = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}$ *si rappresentino nel modo seguente:*

$$Q_h(\mathbf{q}, t) = -\frac{\partial V}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t), \qquad h = 1 \dots n.$$

La funzione V *si chiama energia potenziale delle forze.*

Se le forze $\mathbf{F}_j$ sono conservative, con energia potenziale $\mathcal{V}(\mathbf{x})$, allora possiamo scegliere

$$V(\mathbf{q}, t) = \mathcal{V}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t))$$

infatti

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) &= -\sum_{j=1}^N \nabla_{\mathbf{x}_j} \mathcal{V}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)) \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) = \\ &= \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)) \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) = Q_h(\mathbf{q}, t). \end{aligned}$$

Nel caso di un sistema lagrangiano conservativo possiamo scrivere le equazioni (7.2) nella forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{0}, \tag{7.6}$$

dove

Definizione 22. *La funzione*

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - V(\mathbf{q}, t)$$

si dice **lagrangiana**, *o funzione di Lagrange.*

Chiamiamo sistemi lagrangiani i sistemi di equazioni differenziali del secondo ordine della forma (7.6) per i quali

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \text{ è definita positiva per ogni } \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t.$$

7.2 Lagrangiane equivalenti

Vale il seguente risultato

Lemma 1. *Sia $F(\mathbf{q},t)$ una funzione di classe C^2 e sia*

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Allora si ha

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_h}\Big(\frac{dF}{dt}\Big) - \frac{\partial}{\partial q_h}\Big(\frac{dF}{dt}\Big) = 0, \qquad h = 1\dots n.$$

Dimostrazione. Osservo che

$$\frac{\partial}{\partial \dot q_h}\Big(\frac{dF}{dt}\Big) = \frac{\partial F}{\partial q_h},$$

per cui

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_h}\Big(\frac{dF}{dt}\Big) = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q_h} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_h}\dot q_k + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_h}.$$

Inoltre

$$\frac{\partial}{\partial q_h}\Big(\frac{dF}{dt}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial q_h \partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial^2 F}{\partial q_h \partial t}.$$

Si conclude usando la regolarità di F.

$\square$

Siano $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$, $F(\mathbf{q},t)$ funzioni di classe C^2. Se definiamo

$$\mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = c\,L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) + \frac{d}{dt}F(\mathbf{q},t), \tag{7.7}$$

con $c \neq 0$ costante, e

$$\frac{d}{dt}F(\mathbf{q},t) = \sum_{h=1}^{n} \dot q_h \frac{\partial F}{\partial q_h}(\mathbf{q},t) + \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{q},t),$$

allora, dal Lemma 1 segue che L e $\mathcal{L}$ definiscono le stesse equazioni di Lagrange.

Esempio 10. *In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxz con asse Oz verticale ascendente e si consideri un triangolo rettangolo ABC, con angolo retto in A e angolo α in B, il cui lato AB scivola sull'asse Ox con legge oraria $A(t) \equiv (s(t), 0)$, dove $s \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ è una funzione nota del tempo. Sul triangolo può rotolare senza strisciare un disco omogeneo $\mathcal{C}$ di massa m e raggio R. Sul disco agisce la forza di gravità, di accelerazione g. Usando come coordinata lagrangiana l'ascissa q del punto di contatto P tra disco e triangolo sul lato BC del triangolo*

i) *scrivere la lagrangiana L del disco relativa al sistema di riferimento Oxz e la lagrangiana L' relativa a un sistema solidale al triangolo;*
ii) *trovare una funzione $F(q,t)$ tale che*

$$L = L' + \frac{d}{dt}F.$$

Nel riferimento Oxz le coordinate del baricentro G del disco sono

$$x_G(q,t) = s(t) + q\cos\alpha + R\sin\alpha, \qquad z_G(q,t) = h - q\sin\alpha + R\cos\alpha.$$

Nel riferimento $Ax'z'$, con assi Ax', Az' paralleli ad Ax, Az rispettivamente, le coordinate del baricentro G del disco sono

$$x'_G(q,t) = q\cos\alpha + R\sin\alpha, \qquad z'_G(q,t) = h - q\sin\alpha + R\cos\alpha$$

Le lagrangiane del problema nei due riferimenti si scrivono rispettivamente:

$$L = T - V, \qquad L' = T' - V'$$

con

$$T = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot I_G\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}m(\frac{3}{2}\dot{q}^2 + \dot{s}^2 + 2\cos\alpha\dot{s}\dot{q}),$$
$$V = mg(h - q\sin\alpha)$$

e

$$T' = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}'_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot I_G\boldsymbol{\omega} = \frac{3}{4}m\dot{q}^2,$$
$$V' = mg(h - q\sin\alpha) + m\ddot{s}(q\cos\alpha + R\sin\alpha).$$

Il secondo termine nell'ultima formula corrisponde all'energia potenziale delle forze apparenti di trascinamento, che possiamo considerare un'unica forza $-m\ddot{s}\mathbf{e}_1$ applicata al baricentro G. Dimostriamo quest'ultima affermazione. Sia $\mathbf{F}_{\mathbf{x}'} = -\rho\ddot{s}\mathbf{e}_1$ la densità di forza di trascinamento, $\rho = m/(\pi R^2)$ la densità di massa del disco $\mathcal{C}$ e $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q},\mathbf{x}') \in \mathbb{R}^3$ le coordinate del punto $\mathbf{x}'$ del corpo in funzione delle coordinate lagrangiane $\mathbf{q}$. La forza generalizzata corrispondente si scrive

$$Q_h = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}_{\mathbf{x}'}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\mathbf{q},\mathbf{x}')\,\mathbf{dx}' = -\rho\ddot{s}\mathbf{e}_1\cdot\int_{\mathcal{C}}\frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\mathbf{q},\mathbf{x}')\,\mathbf{dx}' = -m\ddot{s}\frac{\partial(\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_A)}{\partial q_h}.$$

Questa forza generalizzata deriva dall'energia potenziale $m\ddot{s}\mathbf{x}'_G$, dove $\mathbf{x}'_G = \mathbf{x}_G - \mathbf{x}_A = q\cos\alpha + R\sin\alpha$.

Esempio 11. *Posso anche avere una coppia di lagrangiane equivalenti $L, \mathcal{L}$, che non soddisfano la relazione (7.7):*

$$L(q,\dot{q}) = (1+q^2)^\alpha\dot{q}^\beta, \qquad L'(q,\dot{q}) = (1+q^2)^\gamma\dot{q}^\delta,$$

Posso scegliere $\alpha = 4, \beta = 2, \gamma = 6, \delta = 3$.

7.3 Invarianza delle equazioni di Lagrange

Equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0. \tag{7.8}$$

Verifichiamo che la forma delle equazioni (7.8) resta la stessa se operiamo un cambiamento di coordinate, sollevato poi ai vettori velocità. Le equazioni (7.8) risultano così la rappresentazione in coordinate locali di un'equazione differenziale definita sul fibrato tangente alla varietà delle configurazioni.

Proposizione 32. *Consideriamo un sistema lagrangiano definito da una funzione $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$. Sia $\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q})$ una cambiamento di variabili di classe C^2. Allora $t \mapsto \mathbf{q}(t)$ è una soluzione delle equazioni di Lagrange per L se e solo se $t \mapsto \mathbf{Q}(t) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}(t))$ è una soluzione delle equazioni di Lagrange per*

$$\mathcal{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = L\left(\boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{Q}), \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^{-1}}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q})\dot{\mathbf{Q}}, t\right).$$

Dimostrazione. Si introduce la trasformazione

$$(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \mapsto \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \Big(\boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}), \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, t\Big).$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_h} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial}{\partial \dot{Q}_h}\Big(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial \phi_k^{-1}}{\partial Q_\ell}\dot{Q}_\ell\Big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \phi_k^{-1}}{\partial Q_h}$$

per cui

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_h} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\Big)\frac{\partial \phi_k^{-1}}{\partial Q_h} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\Big(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi_k^{-1}}{\partial Q_\ell \partial Q_h}\dot{Q}_\ell\Big).$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_h} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_k}\frac{\partial \phi_k^{-1}}{\partial Q_h} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial}{\partial Q_h}\Big(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial \phi_k^{-1}}{\partial Q_\ell}\dot{Q}_\ell\Big) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_k}\frac{\partial \phi_k^{-1}}{\partial Q_h} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\Big(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi_k^{-1}}{\partial Q_h \partial Q_\ell}\dot{Q}_\ell\Big).\end{aligned}$$

Usando il fatto che $\boldsymbol{\phi}^{-1}$ è di classe $\mathcal{C}^2$ si ottiene

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{Q}} = \Big(\Big(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\Big)\Big[\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \mathbf{q}}\Big]^{-1}\Big) \circ \boldsymbol{\Phi}^{-1}.$$

□

7.4 Energia potenziale generalizzata

Diciamo che le componenti lagrangiane delle forze Q_h ammettono un'energia potenziale generalizzata V se esiste una funzione $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ tale che

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, t). \tag{7.9}$$

Se esiste una tale funzione V, allora definendo $L = T - V$ le equazioni di Lagrange (7.2) si possono scrivere nella forma (7.6).

Notiamo che, se esiste V che soddisfa (7.9), allora si ha

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = V_0(\mathbf{q}, t) + V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \tag{7.10}$$

con V_h omogenea di grado h ($h = 0, 1$) nelle $\dot{\mathbf{q}}$, infatti per ogni $h = 1 \dots n$ si ha

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial \dot{q}_h}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_h}\ddot{q}_k\Big) + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = Q_h = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\mathcal{F}}_j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h},$$

dove

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_j = \boldsymbol{\mathcal{F}}_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{F}_j(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t), \boldsymbol{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t).$$

Poichè le forze attive $\mathbf{F}_j$ agenti sui punti del sistema possono dipendere solo dalle loro posizioni e velocità e dal tempo, si ha necessariamente

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0, \qquad h, k = 1 \dots n. \tag{7.11}$$

Allora, integrando due volte la (7.11), si ottiene

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + V_0(\mathbf{q}, t), \tag{7.12}$$

per certe funzioni $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ e V_0. Se le componenti lagrangiane Q_h delle forze ammettono un potenziale generalizzato, allora dalle (7.9), (7.12) si ottiene

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = -\frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, t) + B(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}(\mathbf{q}, t),$$

dove $B(\mathbf{q}, t)$ è una matrice antisimmetrica, infatti

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial \dot{q}_h}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial a_h}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_h}\Big)\dot{q}_k + \frac{\partial a_h}{\partial t} - \frac{\partial V_0}{\partial q_h}.\end{aligned}$$

Proposizione 33. *Le forze apparenti ammettono l'energia potenziale generalizzata*

$$V' = m\vec{\mathbf{a}}_{O'} \cdot (P - O') - \frac{1}{2}m|\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O')|^2 - m\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O') \cdot \vec{\mathbf{v}}', \tag{7.13}$$

Scrivendo i vettori in coordinate nella base $\mathcal{B}$ si ha

$$V' = m\mathbf{a}_{O'} \cdot R\mathbf{q} - \frac{1}{2}m|\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q}|^2 - m\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q} \cdot R\dot{\mathbf{q}}, \tag{7.14}$$

in cui $\mathbf{q}$ rappresenta le coordinate cartesiane di $P - O'$ nella base $\mathcal{B}'$ ed $R = (R_{ij})$ con $R_{ij} = \hat{\mathbf{e}}'_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_i$. In generale non si riesce a distinguere tra i termini relativi alle forze di trascinamento e quelli della forza di Coriolis.

Dimostrazione. La differenza delle energie cinetiche, T' nel riferimento Σ' e T nel riferimento Σ, ci fornisce un'espressione per l'energia potenziale delle forze apparenti che agiscono su un punto materiale di massa m. Per dimostrarlo basta scrivere le equazioni di Lagrange di prima specie per il punto materiale in Σ' ed in Σ, utilizzando le stesse coordinate lagrangiane. Assumendo che sul punto non agiscano forze nel riferimento Σ, si ha

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h}T' - \frac{\partial}{\partial q_h}T' = Q'_h, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h}T - \frac{\partial}{\partial q_h}T = 0, \qquad h = 1 \ldots n,$$

dove Q'_h sono le componenti lagrangiane delle forze apparenti. Siccome le equazioni devono essere le stesse, per differenza si ha

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h}(T' - T) - \frac{\partial}{\partial q_h}(T' - T) = Q'_h \qquad h = 1 \ldots n.$$

Notiamo che i termini quadratici nelle velocità lagrangiane $\dot{\mathbf{q}}$ spariscono, infatti

$$\begin{aligned} T' - T &= \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{q}}|^2 - \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q} + R\dot{\mathbf{q}}|^2 = \\ &= -\frac{1}{2}m|\mathbf{v}_{O'}|^2 - \frac{1}{2}m|\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q}|^2 - m\mathbf{v}_{O'} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q} + R\dot{\mathbf{q}}) - m\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q} \cdot R\dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

quindi possiamo scegliere $V' = T' - T$.

Utilizziamo adesso il Lemma 1. Il termine $\frac{1}{2}m|\mathbf{v}_{O'}|^2$ è una funzione nota solo del tempo e può essere tralasciata. Inoltre si ha

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}_{O'} \cdot R\mathbf{q} = \mathbf{a}_{O'} \cdot R\mathbf{q} + \mathbf{v}_{O'} \cdot (\dot{R}\mathbf{q} + R\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{a}_{O'} \cdot R\mathbf{q} + \mathbf{v}_{O'} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q} + R\dot{\mathbf{q}}),$$

per cui possiamo sostituire $-m\mathbf{v}_{O'} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q} + R\dot{\mathbf{q}})$ con $m\mathbf{a}_{O'} \cdot R\mathbf{q}$.

□

Proposizione 34. *Nel caso particolare in cui* $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ *è costante possiamo definire separatamente un'energia potenziale per le forze di trascinamento* $-m\vec{\mathbf{a}}_{O'}$, $-m\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O'))$, *e per la forza di Coriolis* $-2m\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}'$.

Dimostrazione. Considero un punto materiale di massa m con posizione $P - O'$, velocità $\vec{\mathbf{v}}'$ e accelerazione $\vec{\mathbf{a}}'$ relative a Σ', e rappresentate dai vettori $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^3$ nella base $\mathcal{B}'$. Sia inoltre $\boldsymbol{\omega}$ il vettore delle coordinate della velocità angolare in $\mathcal{B}$. Osservo che se $\boldsymbol{\omega}$ è costante si ha

$$R\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}. \tag{7.15}$$

Per ciascun termine $\mathbf{F}$ delle forze apparenti

$$-m\ddot{\mathbf{x}}_{O'} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{q}}$$

cerchiamo una funzione V tale che

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = Q_h = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}, \tag{7.16}$$

con $\boldsymbol{\chi} = R\mathbf{q}$, per cui

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} = R\mathbf{e}_h = \mathbf{e}'_h,$$

e la (7.16) diventa

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}'_h,$$

devo ottenere quindi le componenti di $\mathbf{F}$ nella base $\mathcal{B}'$.

La forza di trascinamento dovuta al moto di O' è

$$\mathbf{F}_{tr} = -m\ddot{\mathbf{x}}_{O'}.$$

Tale forza ammette l'energia potenziale

$$V'_{tr}(\mathbf{q}, t) = m\ddot{\mathbf{x}}_{O'} \cdot R\mathbf{q},$$

infatti

$$-\frac{\partial}{\partial q_h} V'_{tr} = -m\ddot{\mathbf{x}}_{O'} \cdot \mathbf{e}'_h.$$

La forza centrifuga è

$$\mathbf{F}_{centr} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q}).$$

Tale forza ammette l'energia potenziale[1]

$$V'_{centr}(\mathbf{q}, t) = -\frac{1}{2}m|\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q}|^2 = -\frac{1}{2}m|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}|^2,$$

[1] Dalla seconda espressione di V'_{centr} si nota che in effetti essa non dipende da t.

in cui abbiamo usato (7.15) ed il fatto che R è un'isometria. Infatti

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial V'_{centr}}{\partial q_h} &= m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_h = -m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{q})\cdot\mathbf{e}_h = \\
&= -m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{q})\cdot R^T\mathbf{e}'_h = -m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times R\mathbf{q})\cdot\mathbf{e}'_h = \mathbf{F}_{centr}\cdot\mathbf{e}'_h.
\end{aligned}
$$

La forza di Coriolis è

$$\mathbf{F}_{Cor} = -2m\boldsymbol{\omega}\times R\dot{\mathbf{q}}.$$

Tale forza ammette l'energia potenziale generalizzata

$$V'_{Cor}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = mR\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\omega}\times R\dot{\mathbf{q}} = m\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{q}}.$$

Infatti

$$\frac{\partial V'_{Cor}}{\partial q_h} = m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{e}_h = m\boldsymbol{\omega}\times R\dot{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{e}'_h,$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial V'_{Cor}}{\partial \dot{q}_h} &= m\frac{d}{dt}\mathbf{q}\times\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{e}_h = \\
&= m\dot{\mathbf{q}}\times\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{e}_h = -m\boldsymbol{\omega}\times R\dot{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{e}'_h,
\end{aligned}
$$

per cui

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V'_{Cor}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V'_{Cor}}{\partial q_h} = -2m\boldsymbol{\omega}\times R\dot{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{e}'_h = \mathbf{F}_{Cor}\cdot\mathbf{e}'_h.$$

□

Consideriamo un sistema di N punti materiali $P_1 \ldots P_N$ e assumiamo che se su di essi agiscano delle forze $\mathbf{F}_j(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},t)$, $j = 1\ldots N$ che ammettono un'energia potenziale generalizzata $\mathcal{V}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},t)$, cioè

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^{N}\mathbf{F}_j.$$

Se il sistema di punti è soggetto a vincoli olonomi e per ogni t la mappa

$$\mathbf{q}\mapsto\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q},t)$$

rappresenta una carta locale, allora la funzione

$$V(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = \mathcal{V}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q},t),\boldsymbol{\upsilon}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t),t)$$

è un'energia potenziale generalizzata per le forze agenti sul sistema vincolato, infatti

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\Big)\frac{\partial \boldsymbol{\upsilon}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\upsilon}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\Big) - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\frac{\partial \boldsymbol{\upsilon}}{\partial \mathbf{q}} \\
&= \Big[\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\Big) - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{x}}\Big]\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\Big[\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{q}}\Big) - \frac{\partial \boldsymbol{\upsilon}}{\partial \mathbf{q}}\Big] \\
&= \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_j(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q},t), \boldsymbol{\upsilon}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t), t)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t),
\end{aligned}
$$

poiché

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{q}}\Big) = \frac{\partial \boldsymbol{\upsilon}}{\partial \mathbf{q}}.$$

*** si potrebbe usare la notazione

$$\hat{\mathbf{F}}_j(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = \mathbf{F}_j(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q},t), \boldsymbol{\upsilon}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t), t)$$

***

Esempio 12. *Problema dei 3 corpi ristretto circolare piano nel sistema di riferimento ruotante con la binaria.*

Siano P_1, P_2 i due corpi principali, di masse m_1, m_2 rispettivamente, e assumiamo che questi si muovano su orbite circolari nel piano $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2$. Sia a la distanza $|P_1 - P_2|$ e G la costante gravitazionale di Newton. Possiamo scegliere le unità di misura in modo che

$$a = 1, \qquad m_1 + m_2 = 1, \qquad G = 1.$$

Poniamo $m = m_2$ e consideriamo il riferimento Σ' che si muove con la binaria P_1P_2 in modo tale che essa corrisponda alla direzione dell'asse Ox' (vedi figura). La velocità angolare di Σ' rispetto a Σ è $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega\hat{\mathbf{e}}_3$, con

$$\omega = 1$$

per la terza legge di Keplero applicata a P_1, P_2. Inoltre, usando l'integrale del centro di massa, si ha

$$|P_1 - O| = m, \qquad |P_2 - O| = 1 - m.$$

Siano $\mathbf{q} = (x', y')$ le coordinate del punto P_3, di massa trascurabile, nel riferimento Σ'. L'energia potenziale per unità di massa delle forze che agiscono su P_3 è

$$
\begin{aligned}
V &= -\frac{(1-m)}{|P - P_1|} - \frac{m}{|P - P_2|} - \frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{q}|^2 - m\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{q}\times\dot{\mathbf{q}} \\
&= -\frac{(1-m)}{\sqrt{(x'-m)^2 + y'^2}} - \frac{m}{\sqrt{(x'-1+m)^2 + y'^2}} - \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - (x'\dot{y}' - y'\dot{x}').
\end{aligned}
$$

7.5 funzione di dissipazione di Rayleigh

Dividiamo le forze attive in due categorie: quelle che ammettono un'energia potenziale generalizzata V e quelle che non lo ammettono (forze non potenziali). Posso dunque scrivere le equazioni di Lagrange nella forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}, \tag{7.17}$$

dove $\mathbf{Q} = (Q_1, \ldots, Q_n)$ è il vettore delle componenti lagrangiane delle forze non potenziali.

Se le Q_h sono prodotte da forze dissipative della forma

$$\vec{\mathbf{F}}_j = -k\vec{\mathbf{v}}_j, \qquad j = 1 \ldots N$$

considero la **funzione di dissipazione di Rayleigh**

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}k\sum_{j=1}^{N} |\vec{\mathbf{v}}_j|^2. \tag{7.18}$$

Osservo che si ha

$$\mathbf{F}_j = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{v}_j}.$$

Le forze generalizzate sono

$$Q_h = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_h}{\partial q_h} = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{v}_j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_h}{\partial q_h} = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{v}_j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_h}{\partial \dot{q}_h} = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_h}.$$

In questo caso le (7.17) diventano

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}.$$