

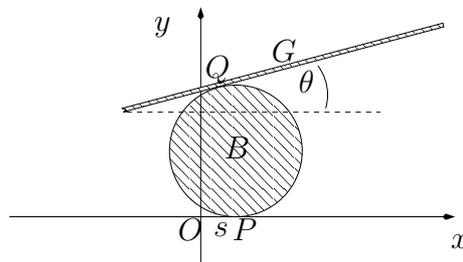
# Compito di Meccanica Razionale

## 13 Settembre 2016

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

### Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento  $Oxy$ , con asse  $Oy$  verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico descritto in figura, composto da un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$  che può rotolare senza strisciare sull'asse  $Ox$ . Sul disco può a sua volta rotolare senza strisciare un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$ . Si usino come coordinate



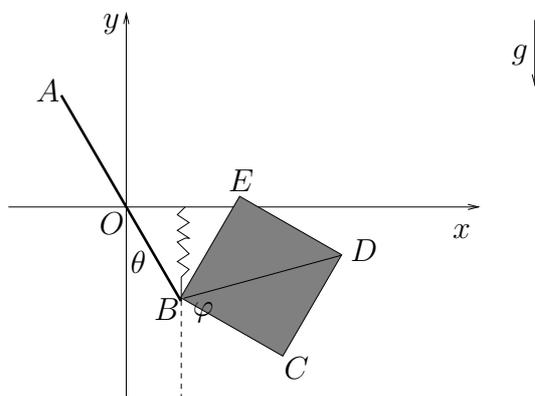
l'ascissa  $s$  del baricentro  $B$  del disco e l'angolo  $\theta$  tra l'asta e la direzione orizzontale e si assuma che per  $s = 0, \theta = 0$  il punto di contatto  $Q$  tra asta e disco coincida col baricentro  $G$  dell'asta.

- i) Calcolare la velocità del baricentro  $G$  dell'asta.
- ii) Determinare il centro istantaneo di rotazione dell'asta.

### Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento  $xy$ . In tale piano è mobile il sistema composto da un'asta omogenea  $AB$  di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$ , avente il punto medio fisso nell'origine del sistema di riferimento, e una lamina quadrata omogenea  $BCDE$  di massa  $m$  e lato  $\ell$ , incernierata nel punto  $B$  dell'asta. È presente una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo nulla, vincolata a rimanere verticale, che collega il punto  $B$  con la sua proiezione sull'asse  $Ox$ . Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione  $g$ . Si considerino come coordinate l'angolo  $\theta$  (misurato in

senso antiorario) che l'asta  $AB$  forma con la direzione negativa dell'asse  $Oy$  e l'angolo  $\varphi$  (misurato in senso antiorario) che la diagonale  $BD$  della lamina forma con l'asse  $Oy$  (vedi figura).



- Scrivere la lagrangiana del sistema.
- Calcolare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità al variare del parametro adimensionale  $\alpha = \frac{mg}{kl}$ .
- Scrivere l'equazione secolare per le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile quando  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

### Terzo Esercizio

Un punto materiale  $P$  di massa  $m$  è vincolato a muoversi su una superficie liscia di equazioni parametriche

$$x = 2 \cosh \theta \cos \varphi \quad y = 2 \cosh \theta \sin \varphi \quad z = 4 \sinh \theta$$

con  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in S^1$ . Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione  $g$  e una forza elastica di richiamo verso il punto  $O \equiv (0, 0, 0)$ .

- Scrivere la lagrangiana del sistema e ridurre il sistema ad un solo grado di libertà con il metodo di Routh.
- Studiare qualitativamente i moti nel sistema ridotto e in quello a due gradi di libertà.