

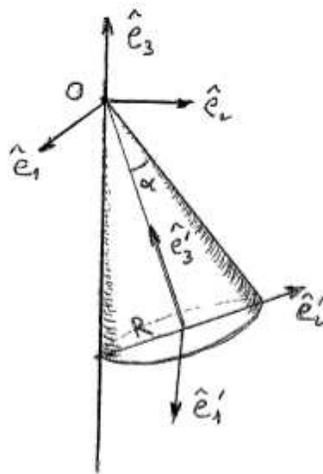
Compito di Meccanica Razionale

8 Giugno 2015

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $\Sigma = O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ e si consideri un cono finito omogeneo di massa m , con raggio di base R e semiapertura α , il cui vertice è incernierato nell'origine O di Σ .



Assumendo che il cono ruoti attorno all'asse $O\hat{e}_3$ con velocità angolare costante $\omega\hat{e}_3$, mantenendo una delle sue generatrici su quest'asse (vedi figura), determinare il momento risultante delle forze che agiscono sul cono rispetto al suo vertice O .

Secondo Esercizio

Si consideri la lagrangiana

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{L}(q_3, |\dot{\mathbf{q}}|), \quad \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^3, \quad q_3 = \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_3,$$

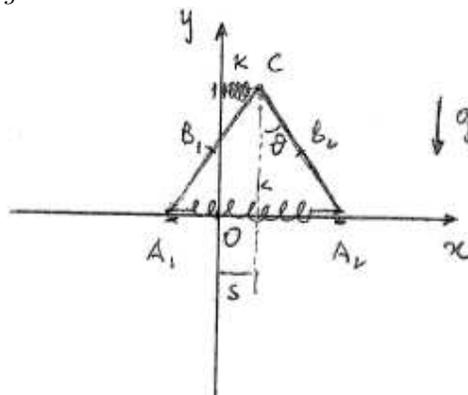
dove

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \mathcal{L}(x, y) = y^2 \mathcal{L}_1(x, y)$$

ed \mathcal{L}_1 è una funzione di classe C^2 su \mathbb{R}^2 . Usando il teorema di Noether trovare 3 integrali primi del sistema di equazioni di Lagrange associato ad L .

Terzo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy , con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da due aste omogenee uguali, di massa m e lunghezza 2ℓ . Tali aste sono incernierate tra loro in un estremo, rappresentato dal punto C . Gli altri estremi, rispettivamente A_1 e A_2 , sono vincolati a scivolare sull'asse Ox . Una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla collega tra loro A_1 e A_2 . Un'altra molla, uguale alla precedente, collega l'estremo comune C all'asse Oy , mantenendosi sempre parallela all'asse Ox (vedi figura). Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g .



Usando come coordinate l'ascissa s del punto C e l'angolo θ che l'asta CA_2 forma con la direzione verticale

1. scrivere la lagrangiana del sistema;
2. trovare gli equilibri e determinarne la stabilità al variare dei parametri m, g, k, ℓ ;
3. assumendo $\frac{mg}{k\ell} = 10$ trovare le frequenze proprie ed i modi normali di oscillazione attorno all'equilibrio stabile.