

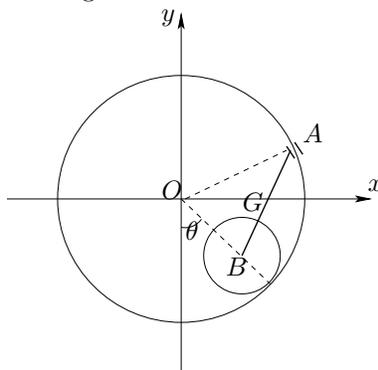
## Primo appello di Istituzioni di Fisica Matematica

24 Gennaio 2014

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

### Primo Esercizio

In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento  $Oxy$ . Si consideri il sistema meccanico formato da un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $r$ , e da un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$ . Il disco rotola senza strisciare all'interno di una guida circolare di centro  $O$  e raggio  $R > r$ . Un estremo dell'asta è incernierato nel baricentro  $B$  del disco; l'altro estremo è vincolato a scivolare sulla guida circolare (si assume  $2\ell < 2R - r$ ). Utilizzando come coordinata l'angolo  $\theta$  che il segmento  $OB$  forma con l'asse  $Oy$



- calcolare la velocità angolare del disco e dell'asta;
- calcolare l'energia cinetica del sistema;
- trovare le coordinate del centro istantaneo di rotazione del disco e dell'asta.

### Secondo Esercizio

Si consideri un punto materiale di massa  $m$  vincolato a muoversi su una superficie di rotazione liscia, definita dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} x = f(z) \cos \lambda \\ y = f(z) \sin \lambda \\ z = z \end{cases} \quad f(z) = z^2(z^2 - 4) + 5$$

con  $z \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \in S^1$ . Assumendo che sul punto non agiscano forze attive,

- scrivere la lagrangiana del sistema usando le coordinate  $(z, \lambda)$ ;
- ridurre il numero dei gradi di libertà del sistema con il metodo di Routh;
- descrivere la dinamica nello spazio delle fasi ridotto;
- descrivere le possibili traiettorie del punto sulla superficie.

### Terzo Esercizio

Sia data la seguente lagrangiana:

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2} \frac{\dot{q}_1^2}{(1+q_2^2)} + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 + (1+q_2^2)(1-q_1^2), \quad q_1 > 1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2 \in \mathbb{R}.$$

- a) Scrivere la hamiltoniana corrispondente.
- b) Scrivere l'equazione di Hamilton-Jacobi mostrando che è a variabili separabili.
- c) Trovare la funzione caratteristica di Hamilton per separazione di variabili.