

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

20 Giugno 2014

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

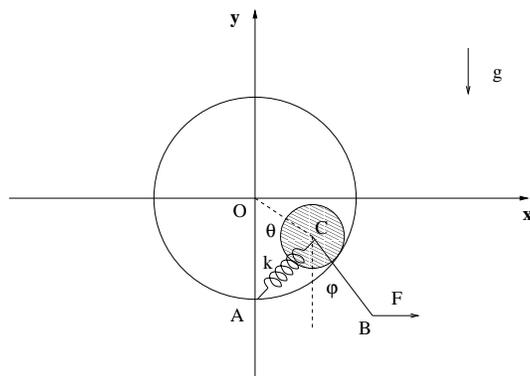
Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy , con asse Oy verticale ascendente. In tale piano si consideri un sistema meccanico formato da due dischi omogenei \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 di raggio R e massa m . Il disco \mathcal{D}_1 è vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse Ox , mentre \mathcal{D}_2 rotola senza strisciare su \mathcal{D}_1 . Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g .

Si usino come coordinate l'ascissa s del baricentro B_1 di \mathcal{D}_1 e l'angolo θ che la retta congiungente i baricentri B_1, B_2 dei due dischi forma con la direzione verticale.

- Calcolare le velocità angolari $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ dei due dischi.
- Trovare i centri istantanei di rotazione C_1, C_2 dei due dischi.
- Scrivere la seconda equazione cardinale per il disco \mathcal{D}_2 rispetto al punto di contatto Q tra i due dischi.

Secondo Esercizio



Sia dato un sistema materiale in un piano verticale Oxy , con asse Oy verticale ascendente, costituito da

- un disco circolare omogeneo di massa m , raggio r e centro C vincolato a rotolare senza strisciare all'interno di una guida circolare fissa di centro O e raggio R ($R > r$);
- un'asta omogenea CB di massa m e lunghezza 2ℓ avente l'estremo C incernierato nel centro C del disco;
- una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla che collega il centro C del disco con il punto $A \equiv (0, -R)$.

Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g , e sull'estremo B dell'asta agisce una forza costante $\vec{\mathbf{F}} = \alpha \hat{\mathbf{e}}_1$, $\alpha > 0$, diretta lungo l'asse Ox . Si utilizzino come parametri lagrangiani l'angolo θ , crescente in verso antiorario, che OC forma con il semiasse negativo delle ordinate e l'angolo φ , crescente in verso antiorario, che la direzione dell'asta forma con la verticale discendente (vedi figura).

- a) Scrivere la lagrangiana del sistema.
- b) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e la loro stabilità in funzione dei parametri m, g, k, ℓ, α .

Terzo Esercizio

Si considerino le seguenti trasformazioni di coordinate in \mathbb{R}^{2n} :

- 1) $\Psi_A : (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mapsto (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = (A\mathbf{p}, A\mathbf{q});$
- 2) $\Phi_A : (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mapsto (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = (A\mathbf{p}, A(\mathbf{p} + \mathbf{q})).$

con $A \in GL_{\mathbb{R}}(n)$, $n \geq 1$. Trovare tutte le matrici A per cui Ψ_A e Φ_A sono canoniche.