

Capitolo 1

Meccanica newtoniana

1.1 Sistemi meccanici discreti non vincolati

Vogliamo descrivere il moto di un sistema di punti materiali $P_1 \dots P_N$ dotati di masse $m_1 \dots m_N$, soggetti a forze esterne assegnate, che si possono muovere liberamente nello spazio ambiente.

1.1.1 Spazio, tempo e sistemi di riferimento

SPAZIO E TEMPO

Il tempo è unidimensionale; lo spazio ambiente è euclideo tridimensionale e lo denotiamo con \mathbb{E}^3 .

\mathbb{E}^3 è dunque uno spazio affine reale, con spazio vettoriale associato \mathbb{V}^3 dotato di un prodotto scalare, che denotiamo con \cdot , cioè di una forma bilineare simmetrica definita positiva $\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Introduciamo anche lo spazio prodotto $\mathbb{G} = \mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$, che chiamiamo **spazio-tempo di Galileo**. \mathbb{G} ha la struttura un fibrato banale, avente per base la retta del tempo \mathbb{R} , mentre le fibre sono gli spazi degli eventi simultanei $\mathbb{E}^3 \times \{t\}$, $t \in \mathbb{R}$, tutti isomorfi a \mathbb{E}^3 . La struttura euclidea su \mathbb{E}^3 permette di misurare le distanze tra eventi simultanei usando questo isomorfismo.

PRODOTTO VETTORIALE

Introduciamo un **prodotto vettoriale** su \mathbb{V}^3 , denotato con \times , che è un'applicazione $\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$ bilineare, antisimmetrica, tale che

i) se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ allora $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|$,

$$\text{ii) } \vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{u} .$$

Sullo spazio \mathbb{V}^3 , dotato del prodotto scalare \cdot , esistono 2 prodotti vettoriali \times_1, \times_2 , il cui risultato differisce solo per il segno e, scelta una base ortonormale $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$, risulta

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 \times_1 \hat{e}_2 &= \hat{e}_3, & \hat{e}_2 \times_1 \hat{e}_3 &= \hat{e}_1, & \hat{e}_3 \times_1 \hat{e}_1 &= \hat{e}_2, \\ \hat{e}_1 \times_2 \hat{e}_2 &= -\hat{e}_3, & \hat{e}_2 \times_2 \hat{e}_3 &= -\hat{e}_1, & \hat{e}_3 \times_2 \hat{e}_1 &= -\hat{e}_2 . \end{aligned}$$

Scelto uno dei due prodotti vettoriali su \mathbb{V}^3 , che indichiamo con \times , diciamo che una base ortonormale ordinata $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ è **levogira** se vale

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3, \quad \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1, \quad \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2 .$$

Nel seguito considereremo solo terne levogire.

Vale la seguente proprietà (formula del prodotto triplo):

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = (\vec{x} \cdot \vec{z}) \vec{y} - (\vec{y} \cdot \vec{z}) \vec{x} .$$

Notiamo che il prodotto vettoriale non è associativo, infatti dalla formula del prodotto triplo e dalla proprietà antisimmetrica otteniamo

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} - \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{y}) \vec{z} - (\vec{y} \cdot \vec{z}) \vec{x}$$

che in generale è non nullo.

Introduciamo in \mathbb{R}^3 il prodotto scalare

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{h=1}^3 x_h y_h, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) .$$

La mappa

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) \mathbf{e}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \mathbf{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{e}_3 ,$$

con $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$, definisce un prodotto vettore su \mathbb{R}^3 tale che $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è una terna levogira.

SISTEMI DI RIFERIMENTO

La descrizione del moto di un corpo richiede l'introduzione di un sistema di riferimento, che permetta di individuare la posizione del corpo nello spazio ambiente in cui avviene il moto.

Un **sistema di riferimento** in \mathbb{E}^3 è una mappa differenziabile

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \Sigma(t) = \{O(t), \hat{e}_1(t), \hat{e}_2(t), \hat{e}_3(t)\} \in \mathbb{E}^3 \times (\mathbb{V}^3)^3 ,$$

con $O \in \mathbb{E}^3$, $\hat{\mathbf{e}}_j \in \mathbb{V}^3$, $j = 1, 2, 3$, tale che

$$\hat{\mathbf{e}}_i(t) \cdot \hat{\mathbf{e}}_j(t) = \delta_{ij} \quad \forall i, j, \forall t .$$

Inoltre $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ formano una terna levogira. Per Σ useremo anche la notazione $O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$, oppure $Oxyz$.

RAPPRESENTAZIONE IN COORDINATE

Dato $P \in \mathbb{E}^3$ ed un sistema di riferimento $O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$, possiamo associare in modo unico a tale punto un vettore di coordinate in \mathbb{R}^3 :

$$\mathbb{E}^3 \ni P \leftrightarrow \vec{\mathbf{x}}_P = (P - O) = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{\mathbf{e}}_i \in \mathbb{V}^3 \leftrightarrow \mathbf{x}_P = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad (1.1)$$

Denoteremo con $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ i vettori della base canonica di \mathbb{R}^3 , corrispondenti a $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$. In seguito, nella scrittura delle formule, utilizzeremo sia la notazione in \mathbb{V}^3 che quella in coordinate in \mathbb{R}^3 .

Fissato un sistema di riferimento in \mathbb{E}^3 possiamo identificare $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$ con lo spazio delle coordinate di Galileo $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

1.1.2 Descrizione del moto

Il moto di un punto $P \in \mathbb{E}^3$ è una mappa differenziabile

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto P(t) \in \mathbb{E}^3 .$$

Dato un sistema di riferimento $\Sigma = O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$, possiamo definire la posizione, la velocità e l'accelerazione di P relativamente a Σ rispettivamente come

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{x}}_P &= (P - O) = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{\mathbf{e}}_i , \\ \vec{\mathbf{v}}_P &= \left. \frac{d}{dt}(P - O) \right|_{\Sigma} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \hat{\mathbf{e}}_i , \\ \vec{\mathbf{a}}_P &= \left. \frac{d^2}{dt^2}(P - O) \right|_{\Sigma} = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i \hat{\mathbf{e}}_i \end{aligned}$$

e possiamo identificarle tramite la (1.1) con i rispettivi vettori delle loro coordinate in \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{x}_P = (x_1, x_2, x_3), \quad \mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{x}}_P = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3), \quad \mathbf{a}_P = \ddot{\mathbf{x}}_P = (\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3) \in \mathbb{R}^3 .$$

L'operazione di derivata temporale di una mappa vettoriale dipende dalla base in cui si scrivono le componenti e quindi, per i sistemi meccanici, dalla scelta del riferimento. Utilizzeremo la notazione $\frac{d}{dt}(\cdot)|_{\Sigma}$ per indicare esplicitamente tale dipendenza.

1.1.3 Le equazioni del moto

Dato un sistema di N punti materiali e fissato un riferimento $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ assumiamo che la forza agente sul punto P_i sia esprimibile da una mappa

$$\vec{\mathbf{F}}_i : (\mathbb{V}^3)^N \times (\mathbb{V}^3)^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}^3$$

che dipende solo dalla posizione e dalla velocità dei punti del sistema e dal tempo t , quindi

$$\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i(\vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_N, \vec{\mathbf{v}}_1, \dots, \vec{\mathbf{v}}_N, t) .$$

Vale il **principio di sovrapposizione**, cioè i contributi di due forze agenti sullo stesso punto si sommano vettorialmente.

Osserviamo che le forze $\vec{\mathbf{F}}_i$ dipendono dal sistema di riferimento scelto, vedi Sezione 1.3.

IL DETERMINISMO DI LAPLACE E LE EQUAZIONI DI NEWTON

Il principio del **determinismo meccanicistico** dice che la conoscenza dello stato (posizioni e velocità) di un sistema di N punti materiali ad un certo istante permette di determinare tutta la sua evoluzione temporale.

Dato un sistema formato dai punti $P_i, i = 1 \dots N$, soggetti alle forze $\vec{\mathbf{F}}_i$ nel sistema di riferimento Σ , assumiamo che valgano le equazioni di Newton (*secondo principio della Dinamica*). Più precisamente, siano

$$\vec{\mathbf{x}} = (\vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_N) , \quad \vec{\mathbf{v}} = (\vec{\mathbf{v}}_1, \dots, \vec{\mathbf{v}}_N) , \in (\mathbb{V}^3)^N$$

i vettori delle posizioni, velocità ed accelerazioni degli N punti. Se

$$\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{v}}, t)$$

è la forza agente sul punto P_i , allora si assume che il moto $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ sia soluzione del sistema di equazioni differenziali

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{\mathbf{x}}_i \Big|_{\Sigma} = \vec{\mathbf{F}}_i(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{v}}, t) \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.2)$$

oppure, in coordinate in \mathbb{R}^3 ,

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.3)$$

1.1.4 I riferimenti inerziali

TRASFORMAZIONI GALILEIANE

Fissato un sistema di riferimento, chiamiamo **gruppo di Galileo** il gruppo \mathcal{G} delle trasformazioni affini dello spazio delle coordinate di Galileo $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ che conservano gli intervalli di tempo e la distanza tra eventi simultanei.

Proposizione 1. *Ogni elemento $g \in \mathcal{G}$ si scrive in modo unico come prodotto $g_1 \cdot g_2 \cdot g_3$, dove le $g_j \in \mathcal{G}$ sono del tipo seguente:*

$$i) \quad g_1(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{x} + t\mathbf{u}, t) \quad (\text{moto uniforme con velocità } \mathbf{u})$$

$$ii) \quad g_2(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + s) \quad (\text{traslazione dell'origine})$$

$$iii) \quad g_3(\mathbf{x}, t) = (G\mathbf{x}, t) \quad (\text{isometria spaziale})$$

con $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, t, s \in \mathbb{R}, G \in O(3)$.

Dimostrazione. Consideriamo una trasformazione affine Φ di $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ in sé:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi} A \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix} + \mathbf{B},$$

con

$$A = \begin{bmatrix} G & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^T & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ s \end{pmatrix}, \quad G \in \mathcal{M}(3, 3), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \quad a, s \in \mathbb{R}.$$

Mostriamo che se Φ è una trasformazione del gruppo \mathcal{G} si ha $\mathbf{v} = \mathbf{0}, a = 1$. Da questo seguirà la tesi. L'invarianza della distanza tra eventi simultanei $(\mathbf{x}_1, t), (\mathbf{x}_2, t)$ ci dà

$$|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| = |G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)|, \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$$

da cui segue che $G \in O(3)$. L'invarianza degli intervalli di tempo per ogni scelta della variabile spaziale ci dice che $a = 1, \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Infatti si ha

$$|\mathbf{v} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + a(t_1 - t_2)| = |(t_1 - t_2)|$$

per ogni $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

□

\mathcal{G} è un sottospazio vettoriale dello spazio delle trasformazioni affini di \mathbb{A}^4 di dimensione 10. Siccome vogliamo conservare l'orientazione dello spazio data dalla scelta del riferimento, ci restringeremo alle trasformazioni con $R \in SO(3)$.

PRINCIPIO DI RELATIVITÀ DI GALILEO

Dato un sistema di N punti materiali possiamo estendere in modo naturale l'azione del gruppo di Galileo sullo **spazio degli stati** $(\mathbb{R}^3)^N \times (\mathbb{R}^3)^N \times \mathbb{R}$ definendo l'azione dei generatori g_1, g_2, g_3 nel modo seguente:

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= (\mathbf{x} + t\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v} + t\boldsymbol{\eta}, t) \\ g_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= (\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} + \boldsymbol{\xi}, t + s) \\ g_3(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= (G\mathbf{x}_1, \dots, G\mathbf{x}_N, G\mathbf{v}_1, \dots, G\mathbf{v}_N, t) \end{aligned}$$

con $\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in (\mathbb{R}^3)^N$, $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{y}, \dots, \mathbf{y})$, $\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u})$, $\mathbf{y}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, $t, s \in \mathbb{R}$, $G \in SO(3)$.

Definizione 1. Diciamo che un sistema di riferimento è **inerziale** se le equazioni di Newton (1.3) sono invarianti rispetto alle trasformazioni del gruppo di Galileo \mathcal{G} .¹

Osservazione 1. Anche la meccanica relativistica è deterministica: la meccanica classica si distingue da essa per il principio di relatività galileiano.

In un riferimento inerziale il principio di relatività di Galileo impone dei vincoli sulla forma delle forze:

- a) **invarianza per traslazioni del tempo:** se $\mathbf{x}(t)$ è soluzione di (1.3) anche $\mathbf{x}(t + s)$ lo è (le leggi della natura restano costanti). Ne segue che le \mathbf{F}_i non dipendono da t :

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) .$$

- b) **invarianza per traslazioni uniformi nello spazio \mathbb{E}^3 :** se $\mathbf{x}(t)$ è soluzione anche $\mathbf{x}(t) + t\mathbf{v} + \mathbf{y}$ lo è (lo spazio è omogeneo). Ne segue che

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k)$$

cioè le forze dipendono solo dalle distanze e dalle velocità relative.

- c) **invarianza per rotazioni nello spazio \mathbb{E}^3 :** se $\mathbf{x}(t)$ è soluzione anche $(G\mathbf{x}_1(t), \dots, G\mathbf{x}_N(t))$ lo è, per ogni $G \in SO(3)$ (lo spazio è isotropo), e si ha la relazione

$$\mathbf{F}_i(G\mathbf{x}_1, \dots, G\mathbf{x}_N, G\mathbf{v}_1, \dots, G\mathbf{v}_N) = G\mathbf{F}_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) .$$

In particolare, se il sistema consiste di un solo punto, il suo moto in ogni sistema di riferimento inerziale è rettilineo uniforme, infatti per a), b) la forza non dipende da $t, \mathbf{x}, \mathbf{v}$, quindi è costante; per c) essa è invariante per rotazioni, quindi è nulla. Questo ci dà il primo principio della Dinamica, detto anche **principio di inerzia** e già noto a Galileo.

¹in realtà noi considereremo solo le trasformazioni in cui $G \in SO(3)$ perché vogliamo che preservino l'orientazione di \mathbb{E}^3

1.1.5 Sistemi meccanici

Definizione 2. Consideriamo un insieme di N punti materiali, $P_i, i = 1 \dots N$, di masse m_i , su cui agiscono delle forze \vec{F}_i assegnate a priori in un sistema di riferimento Σ . Diciamo che questo è un **sistema meccanico classico** (discreto, non vincolato) se il moto dei punti soddisfa le equazioni di Newton (1.3) e se vale il principio di relatività di Galileo.

Facciamo alcune osservazioni:

1. il fatto che valga il principio di relatività implica che il moto del sistema può essere studiato in un riferimento inerziale;
2. per introdurre un sistema meccanico dobbiamo specificare un sistema di riferimento, in quanto le forze in gioco dipendono da esso.

Nei sistemi che considereremo il principio di relatività può essere violato. L'esempio più semplice è quello della caduta di un grave, cioè, fissato un riferimento $O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$, il moto di un punto materiale di massa m soggetto alla forze di gravità $mg \hat{e}_3$. È evidente la mancanza di invarianza per rotazione dell'equazione del moto: la direzione della gravità è privilegiata. Questo si spiega perché il principio di relatività vale per **sistemi isolati**. In questo semplice modello matematico stiamo considerando il punto materiale in un campo di forze esterno (quello della gravità), quindi non è un sistema isolato. Potremmo anche usare un modello diverso, più complesso, includendo la Terra nel sistema, ma ai fini di fare predizioni per questo problema spesso basta impostare il problema nel modo più semplice.

Parleremo comunque di un sistema meccanico distinguendo tra forze interne e forze esterne, essendo le prime prodotte dall'interazione tra i punti del sistema.

1.2 Dinamica di un punto materiale P

Consideriamo un punto materiale P di massa m su cui agisce una forza \vec{F} nel sistema di riferimento $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$. Siano $\vec{x}_P, \vec{v}_P, \vec{a}_P$ la posizione, la velocità e l'accelerazione di P relative a Σ . Denoteremo le coordinate in \mathbb{R}^3 delle rispettive quantità con gli stessi simboli ma senza '→'.

Nella descrizione del moto di P saranno utili le seguenti quantità:

QUANTITÀ DI MOTO (o MOMENTO LINEARE)

$$\vec{p} = m \vec{v}_P$$

MOMENTO ANGOLARE RISPETTO A UN POLO $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\vec{\mathbf{M}}_Q = m (P - Q) \times \vec{\mathbf{v}}_P$$

MOMENTO DELLA FORZA \mathbf{F} RISPETTO A UN POLO $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\vec{\mathbf{N}}_Q = (P - Q) \times \vec{\mathbf{F}}$$

ENERGIA CINETICA²

$$T = \frac{1}{2} m |\vec{\mathbf{v}}_P|^2$$

POTENZA DELLA FORZA $\vec{\mathbf{F}}$

$$\Pi = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_P$$

LAVORO ELEMENTARE ALL'ISTANTE t DELLA FORZA $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{x}}_P, \vec{\mathbf{v}}_P, t)$

$$\delta \mathcal{L} = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{x}}_P$$

Consideriamo il caso di una forza posizionale $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_P)$. Per essa il lavoro elementare è una 1-forma differenziale su \mathbb{R}^3 . Se tale forma è esatta ed $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ è il suo potenziale possiamo definire la seguente quantità:

ENERGIA POTENZIALE

$$V = -U$$

Un campo di forze posizionale $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_P)$ che ammette un potenziale si dice **conservativo**. In tal caso, se $V(x)$ è l'energia potenziale, si ha

$$\delta \mathcal{L} = -dV, \quad \mathbf{F} = -\nabla V$$

e si definisce

ENERGIA TOTALE

$$E = T + V$$

ESEMPI DI FORZE CONSERVATIVE:

1) $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -mg\mathbf{e}_3$ (forza peso)

$$V(\mathbf{x}) = mgx_3, \quad \nabla V(\mathbf{x}) = mg\mathbf{e}_3 = -\mathbf{F}(\mathbf{x})$$

2) $\mathbf{F} = \frac{\mathbf{x}}{r} f(r)$ (forza centrale a simmetria sferica)

$$V(\mathbf{x}) = - \int f(r) dr, \quad \nabla V(\mathbf{x}) = -f(r)\nabla r = -f(r)\frac{\mathbf{x}}{r} = -\mathbf{F}(\mathbf{x})$$

²la quantità $m|\vec{\mathbf{v}}_P|^2$ è stata introdotta da Leibniz con il nome di *vis viva*.

1.2.1 Equazioni di bilancio e leggi di conservazione

Consideriamo un punto materiale P di massa m con coordinate \mathbf{x}_P , su cui agisca una forza \mathbf{F} .

Proposizione 2. *Sia $t \rightarrow \mathbf{x}_P(t)$ una soluzione dell'equazione di Newton $\mathbf{F} = m \mathbf{a}_P$. Allora valgono le relazioni*

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}, \quad (1.4)$$

e, per ogni punto $Q \in \mathbb{E}^3$,

$$\dot{\mathbf{M}}_Q = \mathbf{N}_Q - m \mathbf{v}_Q \times \mathbf{v}_P. \quad (1.5)$$

Dimostrazione. Basta calcolare la derivata totale di \mathbf{p} e di \mathbf{M}_Q , cioè la derivata temporale lungo una qualunque soluzione di $\mathbf{F} = m \mathbf{a}_P$.

□

Proposizione 3. *(teorema dell'energia cinetica) Sia $t \rightarrow \mathbf{x}_P(t)$ una soluzione dell'equazione di Newton $\mathbf{F} = m \mathbf{a}_P$. Allora*

$$\dot{T} = \Pi.$$

Dimostrazione.

$$\Pi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_P = m \mathbf{a}_P \cdot \mathbf{v}_P = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_P \cdot \mathbf{v}_P) = \dot{T}.$$

□

Proposizione 4. *Valgono le seguenti leggi di conservazione*

- 1) *se la componente di \mathbf{F} nella direzione $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ è nulla allora $\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}$ si conserva durante il moto;*
- 2) *se il momento della forza \mathbf{F} rispetto ad un polo Q in quiete (nel riferimento in cui si studia il moto) ha componente nulla nella direzione \mathbf{e} allora $\mathbf{M}_Q \cdot \mathbf{e}$ si conserva durante il moto.*

Dimostrazione. Basta moltiplicare scalarmente per \mathbf{e} le relazioni (1.4), (1.5).

□

Ad esempio, per un punto materiale soggetto alla forza peso $\mathbf{F} = -mge_3$ si conservano $\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_1$, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{M}_Q \cdot \mathbf{e}_3$ rispetto ad ogni polo fisso Q .

La quantità $\mathbf{M}_Q \cdot \mathbf{e}$ si chiama anche **momento assiale** relativo alla retta $Q\mathbf{e} = \{Q + \lambda\mathbf{e}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ (passante per Q e avente la direzione di \mathbf{e}) e non cambia scegliendo come polo un punto qualunque su tale retta.

Proposizione 5. (*conservazione dell'energia*) *Se il campo di forze $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_P)$ è conservativo, con energia potenziale $V(\mathbf{x}_P)$, allora l'energia totale $E = T + V$ è un integrale primo.*

Dimostrazione.

$$\dot{T}(\mathbf{x}_P, \mathbf{v}_P) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_P) \cdot \mathbf{v}_P = -\nabla V(\mathbf{x}_P) \cdot \mathbf{v}_P = -\dot{V}(\mathbf{x}_P) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(T + V) = 0 .$$

□

1.3 Sistemi di riferimento in moto relativo

Consideriamo due sistemi di riferimento

$$\Sigma = O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 \quad \Sigma' = O' \hat{\mathbf{e}}'_1 \hat{\mathbf{e}}'_2 \hat{\mathbf{e}}'_3$$

nello spazio euclideo \mathbb{E}^3 . Le terne di vettori $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ e $\{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$ dei sistemi di riferimento formano due basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ dello spazio vettoriale \mathbb{V}^3 associato ad \mathbb{E}^3 . Pertanto, dato un vettore $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}^3$ esistono uniche le rappresentazioni in tali basi

$$\vec{\mathbf{u}} = \sum_{h=1}^3 u_h \hat{\mathbf{e}}_h, \quad \vec{\mathbf{u}} = \sum_{h=1}^3 u'_h \hat{\mathbf{e}}'_h .$$

Abbiamo già osservato che le derivate temporali delle mappe vettoriali, come la velocità di un punto materiale, dipendono dal sistema di riferimento scelto. Definiamo le derivate temporali di $\vec{\mathbf{u}}$ nei sistemi di riferimento Σ e Σ' come

$$\left. \frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt} \right|_{\Sigma} = \sum_{h=1}^3 \dot{u}_h \hat{\mathbf{e}}_h, \quad \left. \frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt} \right|_{\Sigma'} = \sum_{h=1}^3 \dot{u}'_h \hat{\mathbf{e}}'_h .$$

VELOCITÀ ANGOLARE E FORMULE DI POISSON

Dati due sistemi di riferimento $\Sigma = O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$, $\Sigma' = O' \hat{\mathbf{e}}'_1 \hat{\mathbf{e}}'_2 \hat{\mathbf{e}}'_3$, ad ogni istante t esiste un'unica mappa vettoriale $\mathbb{R} \ni t \mapsto \vec{\boldsymbol{\omega}}(t) \in \mathbb{V}^3$ detta velocità angolare di Σ' rispetto a Σ , tale che

$$\left. \frac{d\hat{\mathbf{e}}'_h}{dt} \right|_{\Sigma} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{e}}'_h, \quad h = 1, 2, 3 . \quad (1.6)$$

Le relazioni (1.6) si chiamano **formule di Poisson**.

Dimostrazione. Considero la matrice $R \in SO(3)$ di cambiamento di base da $\mathcal{B} = \{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ a $\mathcal{B}' = \{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$, con componenti $R_{ji} = \hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$, $i, j = 1, 2, 3$. Il vettore

$$\left. \frac{d\hat{\mathbf{e}}'_h}{dt} \right|_{\Sigma}$$

è rappresentato da $\dot{\mathbf{e}}'_h \in \mathbb{R}^3$ nella base \mathcal{B} . Dalle relazioni $\mathbf{e}'_h = R\mathbf{e}_h$, $R^T R = I$ si ottiene

$$\dot{\mathbf{e}}'_h = \dot{R}R^T R\mathbf{e}_h = \dot{R}R^T \mathbf{e}'_h = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}'_h$$

per $\boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{R}^3$, infatti $\dot{R}R^T$ è antisimmetrica, come si vede derivando $RR^T = I$ rispetto a t . Data una matrice antisimmetrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

possiamo associare a questa il vettore $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ attraverso l'equazione

$$A\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u}.$$

Il vettore $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{h=1}^3 \Omega_h \hat{\mathbf{e}}_h \in \mathbb{V}^3$, rappresentato da $\boldsymbol{\Omega}$ in \mathcal{B} , è la velocità angolare. Infatti se \mathbf{a}, \mathbf{b} rappresentano $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ in \mathcal{B} , allora $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ è rappresentato da $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} &= \sum_i a_i \hat{\mathbf{e}}_i \times \sum_j b_j \hat{\mathbf{e}}_j = \sum_{i,j} a_i b_j \hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = \\ &= \sum_{i<j} (a_i b_j - a_j b_i) \hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = \sum_h (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_h \hat{\mathbf{e}}_h. \end{aligned} \quad (1.7)$$

L'unicità si dimostra per assurdo. Se esistessero $\vec{\boldsymbol{\omega}}_1, \vec{\boldsymbol{\omega}}_2$ che soddisfano le (1.6), allora $(\vec{\boldsymbol{\omega}}_1 - \vec{\boldsymbol{\omega}}_2) \times \hat{\mathbf{e}}_h = \vec{\mathbf{0}}$, $h = 1, 2, 3$. Quindi $\vec{\boldsymbol{\omega}}_1 = \vec{\boldsymbol{\omega}}_2$.

□

Una formula esplicita per la velocità angolare è data da

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^3 \hat{\mathbf{e}}'_h \times \left. \frac{d\hat{\mathbf{e}}'_h}{dt} \right|_{\Sigma} \quad (1.8)$$

infatti, usando le formule di Poisson,

$$\sum_{h=1}^3 \hat{\mathbf{e}}'_h \times \left. \frac{d\hat{\mathbf{e}}'_h}{dt} \right|_{\Sigma} = \sum_{h=1}^3 \hat{\mathbf{e}}'_h \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{e}}'_h) = \sum_{h=1}^3 [\vec{\boldsymbol{\omega}} - (\vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \hat{\mathbf{e}}'_h) \hat{\mathbf{e}}'_h] = 2\vec{\boldsymbol{\omega}}.$$

Esempio 1. Siano $\Sigma = O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$, $\Sigma' = O \hat{\mathbf{e}}'_1 \hat{\mathbf{e}}'_2 \hat{\mathbf{e}}'_3$ due sistemi di riferimento con lo stesso origine O . Assumiamo che Σ' ruoti attorno all'asse $O \hat{\mathbf{e}}_3$ di Σ in modo che i vettori $\hat{\mathbf{e}}'_1$ e $\hat{\mathbf{e}}_1$ formino un angolo $\theta(t)$. Calcoliamo la velocità angolare di Σ' rispetto a Σ .

Abbiamo che

$$\hat{\mathbf{e}}'_1 = \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_2, \quad \hat{\mathbf{e}}'_2 = -\sin \theta \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_2, \quad \hat{\mathbf{e}}'_3 = \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (1.9)$$

Derivando le (1.9) rispetto a t ed applicando (1.8) si ottiene che

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_3$$

VELOCITÀ E ACCELERAZIONE RELATIVE A RIFERIMENTI DIVERSI

Data una mappa vettoriale differenziabile $\mathbb{R} \ni t \mapsto \vec{\mathbf{u}}(t) \in \mathbb{V}^3$, vale la relazione

$$\left. \frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{u}} \quad (1.10)$$

Dimostrazione. Osservo innanzitutto che

$$\vec{\mathbf{u}} = \sum_i u'_i \hat{\mathbf{e}}'_i = \sum_i u'_i \sum_j R_{ji} \hat{\mathbf{e}}_j = \sum_j \left(\sum_i u'_i R_{ji} \right) \hat{\mathbf{e}}_j.$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt} \right|_{\Sigma} &= \sum_j \frac{d}{dt} \left(\sum_i u'_i R_{ji} \right) \hat{\mathbf{e}}_j = \sum_j \sum_i \left(\dot{u}'_i R_{ji} + u'_i \dot{R}_{ji} \right) \hat{\mathbf{e}}_j = \\ &= \sum_i \dot{u}'_i \left(\sum_j R_{ji} \hat{\mathbf{e}}_j \right) + \sum_i u'_i \sum_j \dot{R}_{ji} \hat{\mathbf{e}}_j = \left. \frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \sum_i u'_i \left. \frac{d\hat{\mathbf{e}}'_i}{dt} \right|_{\Sigma} = \\ &= \left. \frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \sum_i u'_i \vec{\omega} \times \hat{\mathbf{e}}'_i = \left. \frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

□

Osservazione 2. Dalla (1.10) segue che la derivata temporale di $\vec{\omega}$ in Σ ed in Σ' coincidono.

In coordinate nella base $\mathcal{B} = \{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ possiamo scrivere

$$\dot{\mathbf{u}} = R \dot{\mathbf{u}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$$

dove $R \in SO(3)$, $R \mathbf{e}_h = \mathbf{e}'_h$. Analogamente, in coordinate nella base $\mathcal{B}' = \{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$ abbiamo

$$R^T \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{u}' .$$

dove $\boldsymbol{\omega}' = R^T \boldsymbol{\omega}$.

COMPOSIZIONE DI VELOCITÀ ANGOLARI

Considero tre sistemi di riferimento in \mathbb{E}^3 :

$$\Sigma = O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3; \quad \Sigma' = O' \hat{\mathbf{e}}'_1 \hat{\mathbf{e}}'_2 \hat{\mathbf{e}}'_3; \quad \Sigma'' = O'' \hat{\mathbf{e}}''_1 \hat{\mathbf{e}}''_2 \hat{\mathbf{e}}''_3.$$

Se $\boldsymbol{\omega}'$ è la velocità angolare di Σ' rispetto a Σ e se $\boldsymbol{\omega}''$ è la velocità angolare di Σ'' rispetto a Σ' , allora la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di Σ'' rispetto a Σ è data dalla somma $\boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega}''$.

Dimostrazione. Usando la (1.10) e le formule di Poisson si ha, per $h = 1, 2, 3$,

$$\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{e}}''_h = \left. \frac{d\hat{\mathbf{e}}''_h}{dt} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d\hat{\mathbf{e}}''_h}{dt} \right|_{\Sigma'} + \boldsymbol{\omega}' \times \hat{\mathbf{e}}''_h = (\boldsymbol{\omega}'' + \boldsymbol{\omega}') \times \hat{\mathbf{e}}''_h.$$

Si conclude usando l'unicità della velocità angolare. □

Possiamo allora scrivere due formule, che legano la velocità $\vec{\mathbf{v}}$ e l'accelerazione $\vec{\mathbf{a}}$ di un punto materiale P in un sistema di riferimento $\Sigma = O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$ a quelle calcolate relativamente ad un altro riferimento $\Sigma' = O' \hat{\mathbf{e}}'_1 \hat{\mathbf{e}}'_2 \hat{\mathbf{e}}'_3$, in moto con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ rispetto a Σ , denotate con $\vec{\mathbf{v}}'$, $\vec{\mathbf{a}}'$ rispettivamente.

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}' + \vec{\mathbf{v}}^T, \quad \vec{\mathbf{v}}^T = \vec{\mathbf{v}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (P - O') \quad (1.11)$$

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}' + \vec{\mathbf{a}}^T + \vec{\mathbf{a}}^C, \quad \vec{\mathbf{a}}^T = \vec{\mathbf{a}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (P - O')) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O'), \quad \vec{\mathbf{a}}^C = 2\boldsymbol{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}' \quad (1.12)$$

Per ricavare le formule precedenti scriviamo

$$P - O = (P - O') + (O' - O).$$

Derivando rispetto a t in Σ e usando (1.10) si ha

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_{O'} + \left. \frac{d(P - O')}{dt} \right|_{\Sigma} = \vec{\mathbf{v}}_{O'} + \left. \frac{d(P - O')}{dt} \right|_{\Sigma'} + \boldsymbol{\omega} \times (P - O')$$

da cui segue (1.11). Derivando ancora si ottiene³

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_{O'} + \left. \frac{d^2(P - O')}{dt^2} \right|_{\Sigma'} + \boldsymbol{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O') + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (P - O')) + \boldsymbol{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}',$$

da cui segue (1.12).

³usiamo la relazione $\left. \frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{u}} \right|_{\Sigma} \times \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}} \times \left. \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{v}} \right|_{\Sigma}$, che segue dalla (1.7).

I termini \vec{a}^T e \vec{a}^C si chiamano rispettivamente **accelerazione di trascina-**
mento e **accelerazione di Coriolis**. Il termine $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}')$ si chiama
accelerazione centripeta. In coordinate nella base \mathcal{B} abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= R\mathbf{x}' + \mathbf{x}_{O'}, \\ \dot{\mathbf{x}} &= R\dot{\mathbf{x}}' + \dot{\mathbf{x}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}', \\ \ddot{\mathbf{x}} &= R\ddot{\mathbf{x}}' + \ddot{\mathbf{x}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}') + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times R\mathbf{x}' + 2\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{x}}'\end{aligned}$$

in cui \mathbf{x}' è il vettore delle coordinate di $(P - O')$ in \mathcal{B}' .

1.3.1 Equazione del moto in riferimenti diversi

Se l'equazione del moto di un punto materiale P di massa m in un riferimento $O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ si scrive

$$m\vec{a} = \vec{F}(P - O, \vec{v}, t)$$

allora, nel riferimento $O' \hat{e}'_1 \hat{e}'_2 \hat{e}'_3$ possiamo scrivere

$$m\vec{a}' = \vec{F}((P - O') + (O' - O), \vec{v}' + \vec{v}^T, t) - m\vec{a}^T - m\vec{a}^C.$$

In coordinate l'ultima equazione diventa

$$m\ddot{\mathbf{x}}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}_{O'}, R\dot{\mathbf{x}}' + \dot{\mathbf{x}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}') - m(\ddot{\mathbf{x}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}') + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times R\mathbf{x}') - 2m\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{x}}'.$$

1.3.2 Deviazione dei gravi in caduta libera

Considero il moto di un punto materiale P studiato in un sistema di riferimento solidale alla Terra, assumendo che questa abbia forma sferica e che ruoti attorno ad una direzione fissa con velocità angolare $\vec{\omega}$ costante. Dato un sistema di riferimento $\Sigma' = O'xyz$ solidale alla Terra l'accelerazione relativa è data da

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}^T - \vec{a}^C$$

dove

$$\vec{a} = \vec{g}, \quad \vec{a}^T = \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O')), \quad \vec{a}^C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'.$$

Inoltre $\vec{a}_{O'} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (O' - C))$. Siccome $P - O'$ è molto più piccolo di $O' - C$ posso trascurare il termine $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O'))$ quindi

$$\vec{a}' = \vec{g} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (O' - C)) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'.$$

Poniamo

$$\vec{g}_{O'} = \vec{g} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (O' - C));$$

questo mi dà la gravità locale. Possiamo orientare Σ' nel modo seguente: scelgo l'asse $O'z$ lungo la direzione della gravità locale, l'asse $O'x$ parallelo al piano del meridiano, verso l'equatore, e l'asse $O'y$ in modo tale che $O'xyz$ sia levogira.

Otengo in coordinate il sistema di equazioni differenziali

$$\ddot{x} = 2\omega \sin \lambda \dot{y}, \quad \ddot{y} = -2\omega \sin \lambda \dot{x} - 2\omega \cos \lambda \dot{z}, \quad \ddot{z} = -g + 2\omega \cos \lambda \dot{y} \quad (1.13)$$

e scelgo le condizioni iniziali

$$x(0) = y(0) = z(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0 .$$

La soluzione di questo sistema di equazioni differenziali lineari si può scrivere esplicitamente, comunque otterremo un risultato qualitativo facendo un'approssimazione. Integrando la prima e la terza equazione in (1.13) e sostituendo nella seconda si ottiene

$$\ddot{y} = -4\omega^2 y + 2g\omega t \cos \lambda .$$

Trascurando il termine con ω^2 e integrando si ottiene

$$y(t) = \frac{1}{3}g\omega t^3 \cos \lambda .$$

Questa formula ci dà la deviazione verso est del grave in caduta libera.

1.4 Dinamica dei sistemi di N punti materiali

Consideriamo un sistema di punti materiali P_i di massa m_i , $i = 1, \dots, N$, su cui agiscono le forze $\vec{\mathbf{F}}_i$ nel sistema di riferimento $\Sigma = O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$. Siano $\vec{\mathbf{x}}_i, \vec{\mathbf{v}}_i, \vec{\mathbf{a}}_i$ la posizione, la velocità e l'accelerazione di P_i relative a Σ e $\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^3$ le loro coordinate. Introduciamo le seguenti quantità, utili a descrivere la dinamica degli N punti nel loro insieme:

QUANTITÀ DI MOTO TOTALE (MOMENTO LINEARE)

$$\vec{\mathbf{p}} = \sum_{j=1}^N \vec{\mathbf{p}}_j = \sum_{j=1}^N m_j \vec{\mathbf{v}}_j$$

MOMENTO ANGOLARE RISPETTO A UN POLO Q

$$\vec{\mathbf{M}}_Q = \sum_{j=1}^N (P_j - Q) \times m_j \vec{\mathbf{v}}_j$$

RISULTANTE DELLE FORZE \mathbf{F}_j

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{j=1}^N \vec{\mathbf{F}}_j$$

MOMENTO RISULTANTE DELLE FORZE \mathbf{F}_j RISPETTO A UN POLO Q

$$\vec{\mathbf{N}}_Q = \sum_{j=1}^N (P_j - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_j$$

ENERGIA CINETICA

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j |\vec{\mathbf{v}}_j|^2$$

LAVORO ELEMENTARE ALL'ISTANTE t DELLA FORZE $\vec{\mathbf{F}}_j$

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{j=1}^N \vec{\mathbf{F}}_j \cdot d\vec{\mathbf{x}}_j$$

1.4.1 Teoremi di scomposizione relativi al baricentro

Introduciamo la massa totale

$$m = \sum_{j=1}^N m_j$$

e le coordinate del baricentro $\mathbf{x}_B \in \mathbb{R}^3$, definite da

$$m(B - O) = \sum_{j=1}^N m_j (P_j - O) . \quad (1.14)$$

Definizione 3. *Dato un sistema di N punti materiali e fissato un sistema di riferimento Σ , il riferimento del baricentro è il sistema di riferimento Σ' centrato in B ed orientato come Σ .*

RAPPRESENTAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Dalla (1.14) segue subito che la quantità di moto totale corrisponde a quella di un punto avente massa totale m , che si muove come il baricentro del sistema:

$$\mathbf{p} = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}_j = m \mathbf{v}_B . \quad (1.15)$$

Proposizione 6. (teorema del centro di massa) *Il baricentro di un sistema di N punti si muove come un punto materiale di massa m su cui agisce la risultante \mathbf{F} delle forze che agiscono sui singoli punti:*

$$m\ddot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{F} . \quad (1.16)$$

Dimostrazione. Sia $t \rightarrow (\mathbf{x}_1(t) \dots \mathbf{x}_N(t))$ una soluzione delle equazioni di Newton (1.3). Derivando (1.15) si ottiene

$$m\ddot{\mathbf{x}}_B = \sum_{j=1}^N m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j .$$

□

SCOMPOSIZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE RISPETTO A UN POLO Q

Il momento angolare totale rispetto ad un polo $Q \in \mathbb{E}^3$ si può scomporre come somma di due componenti

$$\mathbf{M}_Q = m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{v}_B + \mathbf{M}^{(B)}, \quad \mathbf{M}^{(B)} = \sum_{j=1}^N m_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) . \quad (1.17)$$

La prima corrisponde al momento angolare rispetto a Q di un punto di massa m che si muove come il baricentro del sistema. La seconda, cioè $\mathbf{M}^{(B)}$, corrisponde al momento angolare nel sistema nel riferimento del baricentro e non dipende dalla scelta del polo.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_Q &= \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{v}_j + \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times m_j \mathbf{v}_j = \\ &= \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{v}_j + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times m \mathbf{v}_B . \end{aligned}$$

Inoltre

$$\sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{v}_B = \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{v}_B = m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{v}_B = 0$$

da cui segue la (1.17).

□

Osservazione 3. Se scriviamo \mathbf{M}_Q nel riferimento del baricentro il primo addendo in (1.17) si annulla. Quindi in tale riferimento il momento angolare non dipende dalla scelta del polo.

SCOMPOSIZIONE DEL MOMENTO RISULTANTE DELLE FORZE RISPETTO A UN POLO Q

Il momento risultante delle forze rispetto ad un polo $Q \in \mathbb{E}^3$ si può scomporre come somma di due componenti

$$\mathbf{N}_Q = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{F} + \mathbf{N}^{(B)}, \quad \mathbf{N}^{(B)} = \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_B) \quad (1.18)$$

la prima corrisponde al momento della forza risultante \mathbf{F} rispetto a Q , agente sul baricentro B del sistema, la seconda, cioè $\mathbf{N}^{(B)}$, corrisponde al momento risultante delle forze nel riferimento del baricentro e non dipende dalla scelta del polo.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_Q &= \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{F}_j + \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{F}_j = \\ &= \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{F}_j + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{F}. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{a}_B = \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{a}_B = m (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{a}_B = 0$$

da cui segue la (1.18). □

Osservazione 4. Se scriviamo \mathbf{N}_Q nel riferimento del baricentro il primo addendo in (1.18) si annulla per la Proposizione 6. Quindi in tale riferimento il momento risultante delle forze non dipende dalla scelta del polo.

SCOMPOSIZIONE DELL'ENERGIA CINETICA

L'energia cinetica del sistema si può scomporre come somma di due componenti

$$T = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_B|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) \quad (\text{teorema di König}). \quad (1.19)$$

la prima corrisponde all'energia cinetica di un punto materiale di massa m che si muove come il baricentro del sistema, la seconda corrisponde all'energia cinetica del sistema nel riferimento del baricentro. Questo risultato è noto come teorema di König.

Dimostrazione.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) + \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}_B \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^N m_j \right) \mathbf{v}_B \cdot \mathbf{v}_B .$$

Inoltre il secondo addendo a destra è nullo. \square

1.4.2 Forze interne e forze esterne

Scomponiamo la forza $\vec{\mathbf{F}}_i$ che agisce sul punto P_i come somma vettoriale di 2 contributi: $\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)} + \vec{\mathbf{F}}_i^{(E)}$. Il vettore $\vec{\mathbf{F}}_i^{(I)}$ si chiama **forza interna** ed è la somma delle forze che gli altri punti del sistema esercitano su P_i ; $\vec{\mathbf{F}}_i^{(E)}$ è la somma delle altre forze e si chiama **forza esterna**.

Quindi $\vec{\mathbf{F}}_i^{(E)} = \vec{\mathbf{F}}_i^{(E)}(\vec{\mathbf{x}}_i, \vec{\mathbf{v}}_i, t)$, cioè dipende solo dallo stato del punto P_i .

Ipotesi sulle forze interne (*forze di tipo classico*):

$$\vec{\mathbf{F}}_i^{(I)} = \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)}(\vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_N) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{\mathbf{F}}_{ij}(\vec{\mathbf{x}}_i, \vec{\mathbf{x}}_j), \quad (1.20)$$

cioè le $\vec{\mathbf{F}}_i^{(I)}$ sono puramente posizionali e sono somma vettoriale di interazioni a due corpi. Inoltre assumiamo che valgano le seguenti proprietà:

1. $\vec{\mathbf{F}}_{ij} + \vec{\mathbf{F}}_{ji} = 0, \quad \forall i, j,$
2. $\vec{\mathbf{F}}_{ij} \times \vec{\mathbf{r}}_{ij} = 0,$
3. $\vec{\mathbf{F}}_{ij} = f_{ij}(\rho_{ij}) \hat{\mathbf{r}}_{ij} .$

Osservazione 5. *Queste ipotesi sulle forze sono caratteristiche della Meccanica Classica: 1. e 2. corrispondono al principio di azione e reazione.*

Con queste ipotesi si dimostra che la risultante e il momento risultante delle forze interne (rispetto a qualunque polo Q) sono nulli. Infatti

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{R}}^{(I)} &= \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{\mathbf{F}}_{ij} = \sum_{1 \leq i < j \leq N} (\vec{\mathbf{F}}_{ij} + \vec{\mathbf{F}}_{ji}) = \vec{\mathbf{0}}, \\ \vec{\mathbf{N}}_Q^{(I)} &= \sum_{i=1}^N (P_i - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (P_i - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_{ij} = \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} (P_i - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_{ij} + (P_j - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_{ji} = \sum_{1 \leq i < j \leq N} (P_i - P_j) \times \vec{\mathbf{F}}_{ij} = \vec{\mathbf{0}}.\end{aligned}$$

1.4.3 Le equazioni cardinali

BILANCIO DEL MOMENTO ANGOLARE

$$\dot{\mathbf{M}}_Q = \mathbf{N}_Q - \mathbf{v}_Q \times \mathbf{p} \quad (1.21)$$

Dimostrazione. Basta derivare la formula che definisce \mathbf{M}_Q . \square

Con le ipotesi sulle forze interne fatte nella sezione precedente, le relazioni (1.16), (1.21) si possono scrivere

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{R}^{(E)} \\ \dot{\mathbf{M}}_Q &= \mathbf{N}_Q^{(E)} - \mathbf{v}_Q \times \mathbf{p} \end{cases} \quad (1.22)$$

Le (1.22) si chiamano **equazioni cardinali** della dinamica.

1.4.4 Sistemi di forze equivalenti

$$\mathcal{F} = \{(\vec{\mathbf{F}}_1, P_1) \dots (\vec{\mathbf{F}}_m, P_m)\} \quad \mathcal{G} = \{(\vec{\mathbf{G}}_1, Q_1) \dots (\vec{\mathbf{G}}_n, Q_n)\}$$

\mathcal{F} e \mathcal{G} si dicono equivalenti se hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo O qualunque.

Notiamo che se i sistemi \mathcal{F} e \mathcal{G} hanno la stessa risultante ($\vec{\mathbf{R}}^{\mathcal{F}} = \vec{\mathbf{R}}^{\mathcal{G}}$) e lo stesso momento risultante delle forze rispetto a un polo O fissato ($\vec{\mathbf{N}}_O^{\mathcal{F}} = \vec{\mathbf{N}}_O^{\mathcal{G}}$), allora i due sistemi hanno lo stesso momento risultante rispetto ad un qualunque polo O' :

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{N}}_{O'}^{\mathcal{F}} &= \sum_{h=1}^m (\vec{\mathbf{x}}_{P_h} - \vec{\mathbf{x}}_{O'}) \times \vec{\mathbf{F}}_h = \vec{\mathbf{N}}_O^{\mathcal{F}} + (\vec{\mathbf{x}}_O - \vec{\mathbf{x}}_{O'}) \times \vec{\mathbf{R}}^{\mathcal{F}} = \\ &= \vec{\mathbf{N}}_O^{\mathcal{G}} + (\vec{\mathbf{x}}_O - \vec{\mathbf{x}}_{O'}) \times \vec{\mathbf{R}}^{\mathcal{G}} = \sum_{k=1}^n (\vec{\mathbf{x}}_{Q_k} - \vec{\mathbf{x}}_{O'}) \times \vec{\mathbf{G}}_k = \vec{\mathbf{N}}_{O'}^{\mathcal{G}}\end{aligned}$$

Proposizione 7. *Ogni sistema di forze applicate $\mathcal{F} = \{(\vec{\mathbf{F}}_1, P_1) \dots (\vec{\mathbf{F}}_m, P_m)\}$ è equivalente ad un sistema costituito da una forza e da una coppia.*

Dimostrazione. Sia $\vec{\mathbf{R}} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i$ la risultante delle forze ed $\vec{\mathbf{N}}_O = \sum_i (P_i - O) \times \vec{\mathbf{F}}_i$ il momento risultante rispetto ad un polo fissato $O \in \mathbb{E}^3$. Considero il sistema di forze

$$\mathcal{G} = \{(\vec{\mathbf{R}}, O), (\vec{\mathbf{F}}, Q_1), (-\vec{\mathbf{F}}, Q_2)\}$$

con $Q_1, Q_2 \in \mathbb{E}^3$, $\vec{\mathbf{F}} \in \mathbb{V}^3$ scelti in modo che il momento della coppia $(Q_1 - Q_2) \times \vec{\mathbf{F}}$ sia uguale a $\vec{\mathbf{N}}_O$. Si verifica facilmente che \mathcal{G} è equivalente a \mathcal{F} .

□

Osserviamo che nelle equazioni cardinali (1.22) appaiono solamente la risultante ed il momento risultante delle forze, quindi considerando un sistema equivalente di forze otteniamo le stesse equazioni differenziali.

ESEMPIO: consideriamo il caso della forza di gravità

$$\mathcal{F} = \{(\vec{\mathbf{F}}_i, P_i)\}_{i=1 \dots N}, \quad \vec{\mathbf{F}}_i = -m_i g \hat{\mathbf{e}}_3.$$

Il sistema di forze \mathcal{F} è equivalente a $\mathcal{G} = \{(\vec{\mathbf{R}}, B)\}$ formato da un'unica forza $\vec{\mathbf{R}} = -mg \hat{\mathbf{e}}_3$ applicata al baricentro B del sistema.

1.4.5 Sistemi conservativi

Proposizione 8. *Le forze interne di tipo classico ammettono l'energia potenziale*

$$V^{(I)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N V_{ij}(\rho_{ij}), \quad \text{con} \quad \frac{d}{d\rho_{ij}} V_{ij}(\rho_{ij}) = f_{ij}(\rho_{ij}) \quad (1.23)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^{(I)}}{\partial \mathbf{x}_k} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^N V_{ij} = \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \frac{\partial V_{ik}}{\partial \mathbf{x}_k} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \frac{\partial V_{kj}}{\partial \mathbf{x}_k} \right) = \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \frac{\partial V_{ki}}{\partial \mathbf{x}_k} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \frac{dV_{ki}}{d\rho_{ki}} \frac{\partial \rho_{ki}}{\partial \mathbf{x}_k} = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N f_{ki} \frac{\mathbf{r}_{ki}}{\rho_{ki}} = -\mathbf{F}_k^{(I)}. \end{aligned}$$

□

Proposizione 9. (teorema dell'energia cinetica) Sia $t \rightarrow \mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_1(t) \dots \mathbf{x}_N(t))$ una soluzione delle equazioni di Newton (1.3). Allora

$$\dot{T} = \Pi .$$

Se le forze interne sono di tipo classico, con energia potenziale $V^{(I)}$, allora

$$\frac{d}{dt}(T + V^{(I)}) = \Pi^{(E)} . \quad (1.24)$$

Dimostrazione.

$$\Pi = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{v}_j = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^N \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_j \right) = \dot{T} .$$

Se le forze interne ammettono l'energia potenziale $V^{(I)}$,

$$\frac{d}{dt} V^{(I)} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial V^{(I)}}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \mathbf{v}_i = - \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)} \cdot \mathbf{v}_i = -\Pi^{(I)} ,$$

da cui segue (1.24). □

Definizione 4. La forza \mathbf{F}_j che agisce sul punto P_j si dice *conservativa* se è puramente posizionale ($\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{x})$) e se esiste una funzione scalare $V_j(x)$ tale che $\mathbf{F}_j = -\nabla_{\mathbf{x}_j} V_j$.

Definizione 5. Un sistema meccanico di N punti materiali si dice **conservativo** se le forze che agiscono sui punti sono puramente posizionali e se esiste una funzione scalare $V(\mathbf{x})$ tale che $\mathbf{F}_j = -\nabla_{\mathbf{x}_j} V$, per $j = 1 \dots N$. La funzione V si chiama *energia potenziale del sistema*.

Osservazione 6. Nei sistemi conservativi le forze agenti sui singoli punti si possono ricavare dall'unica funzione scalare V . Si dice anche che il sistema ammette *potenziale monogenico*.

Se le forze esterne $\vec{\mathbf{F}}_j^{(E)}$ sono tutte conservative allora la funzione $V^{(E)}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N V_j(\mathbf{x}_j)$ soddisfa

$$\mathbf{F}_j^{(E)} = -\nabla_{\mathbf{x}_j} V, j = 1 \dots N .$$

In questo caso introduciamo l'energia potenziale del sistema

$$V(\mathbf{x}) = V^{(I)}(\mathbf{x}) + V^{(E)}(\mathbf{x}) .$$

e la sua **energia totale**

$$E(\mathbf{x}_P, \dot{\mathbf{x}}_P) = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_P|^2 + V^{(I)}(\mathbf{x}) + V^{(E)}(\mathbf{x}) .$$

Proposizione 10. (*conservazione dell'energia*) *L'energia totale di un sistema di N punti materiali soggetto a forze interne di tipo classico e a forze esterne conservative si conserva.*

Dimostrazione. Usando la (1.24) si ha

$$\frac{d}{dt}(T + V^{(I)} + V^{(E)}) = \Pi^{(E)} + \frac{d}{dt}V^{(E)}.$$

Inoltre

$$\frac{d}{dt}V^{(E)} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial V^{(E)}}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \mathbf{v}_i = - \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{F}}_i^{(E)} \cdot \mathbf{v}_i = -\Pi^{(E)}.$$

□

1.4.6 Similitudine meccanica

Se le forze sono conservative, in alcuni casi è possibile ottenere informazioni sulle soluzioni senza bisogno di risolvere le equazioni del moto.

Esempio 2. (*riscaldamento di massa e tempo*)

Se $\mathbf{x}(t)$ soddisfa

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t) = -\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}(t))$$

poniamo $t_1 = \tau t$, $m_1 = \mu m$, con $\mu = \tau^2$. Allora $\mathbf{x}_1(t_1) = \mathbf{x}(t_1/\tau)$ soddisfa

$$m_1 \frac{d^2}{dt_1^2} \mathbf{x}_1(t_1) = -\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}_1(t_1))$$

infatti

$$\frac{d}{dt_1} \mathbf{x}_1(t_1) = \frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} \mathbf{x}\left(\frac{t_1}{\tau}\right), \quad \frac{d^2}{dt_1^2} \mathbf{x}_1(t_1) = \frac{1}{\tau^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}\left(\frac{t_1}{\tau}\right).$$

Esempio 3. (*riscaldamento della lunghezza con potenziali omogenei*)

Consideriamo un campo di forze conservativo con energia potenziale V . Assumiamo inoltre che V sia omogenea di grado α :

$$V(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^\alpha V(\mathbf{x}), \quad \forall \lambda > 0.$$

Ne segue che il gradiente $\nabla_{\mathbf{x}} V$ è omogeneo di grado $\alpha - 1$ (vedi Appendice, Sezione 9.2).

Se $\mathbf{x}(t)$ soddisfa

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t) = -\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}(t)) \tag{1.25}$$

Considero

$$\mathbf{x}_1(t) = \lambda \mathbf{x}(t)$$

e osservo che

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}_1(t) = m \lambda \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t) = -\lambda \nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}(t)) = -\lambda^{2-\alpha} \nabla_{\mathbf{x}} V(\lambda \mathbf{x}(t)) = -\lambda^{2-\alpha} \nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}_1(t)).$$

Se definisco $t_1 = \tau t$, $\mathbf{x}_2(t_1) = \mathbf{x}_1(t_1/\tau) = \lambda \mathbf{x}(t_1/\tau)$ ho che

$$m \frac{d^2}{dt_1^2} \mathbf{x}_2(t_1) = -\frac{\lambda^{2-\alpha}}{\tau^2} \nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}_2(t_1)).$$

Quindi la condizione per cui le orbite riscalate risolvano la stessa ODE è

$$\frac{\lambda^{2-\alpha}}{\tau^2} = 1. \quad (1.26)$$

Osservazione 7. Se $\alpha = 2$ (oscillatore armonico) dalla (1.26) si ha $\tau^2 = 1$ per ogni $\lambda > 0$. Se abbiamo un'orbita periodica $\mathbf{x}_{per}(t)$ di periodo T allora esiste tutta una famiglia a 1 parametro di orbite $\{\lambda \mathbf{x}_{per}(t)\}$, $\lambda > 0$ che hanno lo stesso periodo. Nel caso unidimensionale ($\mathbf{x}_{per} \in \mathbb{R}$) da tale famiglia si ottengono tutte le orbite nello spazio delle fasi, che risulta foliato in orbite periodiche isocrone.

Osservazione 8. Se $\alpha = -1$ (problema di Keplero, vedi Sezione 6.1), dalla (1.26) si ha $\tau^2 = \lambda^3$. Se $\mathbf{x}_{per}(t)$ è una soluzione periodica di periodo T allora la famiglia a un parametro $\{\lambda \mathbf{x}_{per}(t/\tau)\}$, con $\tau^2 = \lambda^3$, risolve la stessa equazione. Il rapporto tra i periodi di due soluzioni $\{\lambda_1 \mathbf{x}_{per}(t/\tau_1)\}$, $\{\lambda_2 \mathbf{x}_{per}(t/\tau_2)\}$ di questa famiglia è

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{3/2}$$

che corrisponde alla terza legge di Keplero.

Esempio 4. (trasformazioni di scala generali con potenziali omogenei)

Più in generale posso considerare trasformazioni di scala

$$t \rightarrow t_1 = \tau t, \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_1 = \lambda \mathbf{x}, \quad m \rightarrow m_1 = \mu m.$$

Se $\mathbf{x}(t)$ soddisfa (1.25) con V omogenea di grado α , allora $\mathbf{x}_1(t_1) = \lambda \mathbf{x}(t_1/\tau)$ soddisfa

$$m_1 \frac{d^2}{dt_1^2} \mathbf{x}_1(t_1) = -\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}_1(t_1))$$

solo se $\mu \lambda^{2-\alpha} / \tau^2 = 1$.

1.5 Alcuni risultati sul problema degli N corpi

Consideriamo N punti materiali $P_1 \dots P_N$ di masse $m_1 \dots m_N$ soggetti soltanto alla loro interazione mutua, dovuta a forze interne di tipo classico. Sia $V(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N)$ l'energia potenziale di tali forze, per cui il moto dei punti soddisfa le equazioni

$$m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = -\nabla_{\mathbf{x}_j} V(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N) .$$

*** definizione delle singolarità del problema degli N corpi: singolarità di collisione e pseudocollisioni (Painlevè, Von Zeipel, Xia). ***

Introduciamo il momento di inerzia del sistema rispetto al baricentro \mathbf{x}_B :

$$I(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N) = \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_B|^2 .$$

*** Il momento di inerzia è utile per studiare alcune proprietà qualitative delle soluzioni, vedi [14] ***

Dimostriamo che il momento di inerzia si può scrivere in termini delle distanze mutue tra i punti:

Proposizione 11. *Vale la seguente formula*

$$I = \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_B|^2 = \frac{1}{m} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N m_i m_j |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 . \quad (1.27)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N m_i m_j |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_i m_j (|\mathbf{x}_i|^2 + |\mathbf{x}_j|^2 - 2\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (m - m_i) |\mathbf{x}_i|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j (m - m_j) |\mathbf{x}_j|^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N m_i m_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) = \\ &= \left[m \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i|^2 - \sum_{i=1}^N m_i^2 |\mathbf{x}_i|^2 \right] - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N m_i m_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) = \\ &= m \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i|^2 - \sum_{i,j=1}^N m_i m_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) . \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_B|^2 &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\mathbf{x}_i - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{x}_j \right) \cdot \left(\mathbf{x}_i - \frac{1}{m} \sum_{h=1}^N m_h \mathbf{x}_h \right) = \\
&= \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i|^2 - 2 \sum_{i,j=1}^N \frac{m_i m_j}{m} \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{m^2} \sum_{i,j=1}^N m_i m_j \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = \\
&= \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i|^2 - \frac{2}{m} \sum_{i,j=1}^N m_i m_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) + \frac{1}{m} \sum_{i,j=1}^N m_i m_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) .
\end{aligned}$$

□

Osservazione 9. *Il risultato precedente è utile per interpretare alcune questioni sul moto degli N corpi in termini del moto delle distanze mutue (vedi Lagrange 1772, Albouy 1991).*

A meno di applicare una trasformazione galileiana, possiamo assumere che il baricentro degli N punti sia fermo nell'origine: $\mathbf{x}_B = \mathbf{0}$. Dimostriamo la seguente

Proposizione 12.

$$\ddot{I} = 4T + 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i$$

Dimostrazione. Basta derivare due volte $I(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N)$ rispetto a t ed usare le equazioni di Newton:

$$\dot{I} = 2 \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i, \quad \ddot{I} = 2 \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\mathbf{x}}_i|^2 + 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i .$$

□

Corollario 1. *(identità di Lagrange) Se le forze sono conservative e il potenziale U è omogeneo di grado α allora*

$$\ddot{I} = 4T + 2 \sum \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \mathbf{x}_i = 4T + 2\alpha U = 4h + 2(\alpha + 2)U ,$$

cioè \ddot{I} dipende solo dalla posizione dei punti e dall'energia totale.

Proposizione 13. *Se nel moto degli N corpi ($N \geq 2$) c'è una collisione totale allora il momento angolare totale è nullo.*

Dimostrazione. Vedi il primo capitolo di [14].

□

Proposizione 14. *Nel problema dei 3 corpi, se il momento angolare è nullo, allora i corpi si muovono in un piano fissato.*

Dimostrazione. Fissato un sistema di riferimento $Oxyz$ le tre componenti del momento angolare rispetto all'origine sono

$$M_1 = \sum_i m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i), M_2 = \sum_i m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i), M_3 = \sum_i m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i).$$

Possiamo assumere che il baricentro sia fermo nell'origine e che al tempo t_0 i 3 punti si trovino nel piano $z = 0$. Valgono allora le relazioni

$$\sum_i m_i y_i \dot{z}_i = \sum_i m_i x_i \dot{z}_i = \sum_i m_i \dot{z}_i = 0 \quad (t = t_0)$$

Ho quindi un sistema lineare omogeneo nelle incognite $m_i \dot{z}_i, i = 1, 2, 3$ al tempo t_0 . Questo implica che

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (t = t_0)$$

oppure che le \dot{z}_i siano tutte nulle.

Nel primo caso i 3 corpi al tempo t_0 stanno su una retta, infatti i punti di coordinate $(x_1, y_1, 1), (x_2, y_2, 1), (x_3, y_3, 1)$ stanno in un piano che passa per l'origine ed anche nel piano $z = 1$. Ne segue che anche i punti di coordinate $(x_1, y_1, 0), (x_2, y_2, 0), (x_3, y_3, 0)$, che corrispondono alle posizioni dei 3 corpi al tempo t_0 , sono allineati. Posso allora ruotare gli assi coordinati in modo che $\dot{z}_3 = 0$ per $t = t_0$. Assumiamo che $\dot{z}_1 \neq 0$ (per $\dot{z}_2 \neq 0$ il ragionamento è simile); allora ottengo che c'è una collisione tra P_1 e P_2 al tempo t_0 . Infatti

$$0 = \sum_i m_i y_i \dot{z}_i = m_1 y_1 \dot{z}_1 + m_2 y_2 \dot{z}_2 = m_1 (y_1 - y_2) \dot{z}_1$$

poichè $m_1 \dot{z}_1 + m_2 \dot{z}_2 = 0$. Inoltre, similmente,

$$0 = \sum_i m_i x_i \dot{z}_i = m_1 (x_1 - x_2) \dot{z}_1.$$

L'unica possibilità è dunque che $\dot{z}_i = 0, i = 1, 2, 3$ ed i corpi restano nel piano $z = 0$ per il teorema di unicità.

□