

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

20 Giugno 2011

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy , con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico descritto in Figura 1, formato da un'asta omogenea di massa m e lunghezza ℓ . L'estremo B dell'asta può scorrere sull'asse Ox e l'altro estremo A può scorrere su un circonferenza di raggio $r < \ell$ centrata nell'origine.

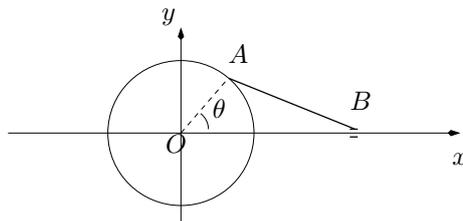


Figura 1

Usando come coordinata l'angolo θ che OA forma con l'asse Ox

- (i) calcolare la velocità angolare dell'asta;
- (ii) trovare le coordinate del centro istantaneo di rotazione.

Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$, con asse Oz verticale ascendente, e si consideri il sistema meccanico descritto in Figura 2, composto da un disco omogeneo di massa m e raggio r . Il disco rotola senza strisciare su una guida circolare di raggio R centrata nell'origine e giacente nel piano Oxy . Inoltre la retta tangente al disco nel punto di contatto P con la guida corrisponde alla tangente alla guida nello stesso punto.

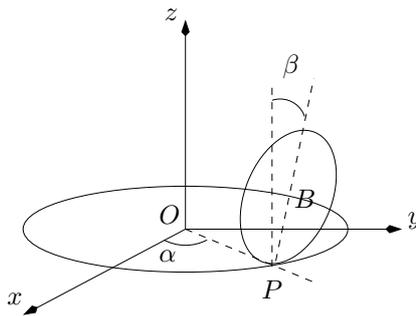


Figura 2

Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione g . Detto B il baricentro del disco, si usino come coordinate l'angolo α tra OP ed Ox e l'angolo β tra PB ed Oz .

- (i) Calcolare la velocità angolare del disco;¹
- (ii) scrivere la lagrangiana del sistema.

¹*Suggerimento:* usare un sistema di riferimento in cui il moto del disco è piano.

Terzo Esercizio

Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{q} \cdot \Lambda \mathbf{q}) , \quad \Lambda = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2) ,$$

con $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ ed $\omega_h > 0$ ($h = 1 \dots n$). Trovare una trasformazione canonica

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{I}, \phi) = \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

tale che la funzione di Hamilton del nuovo sistema hamiltoniano sia

$$K(\mathbf{I}) = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} ,$$

con $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$.