Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
1 Marzo 2011

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da un disco omogeneo di massa m e raggio R che può rotolare senza strisciare su una guida rettilinea incernierata nell'origine, che a sua volta può ruotare nel piano Oxy. Il piano del disco si mantiene sempre ortogonale a Oxy e tutti i vincoli sono ideali. Sul sistema agisce la forza di una molla che congiunge il baricentro B del disco al punto $(x, y, z) \equiv (0, 0, R)$; inoltre su B agisce una forza costante $F\mathbf{e}_x$, con $F \neq 0$ ed $\mathbf{e}_x$ il versore dell'asse Ox.
Utilizzando come coordinate l'ascissa s di B sulla guida e l'angolo ϕ che la guida forma con l'asse Ox

1. scrivere la lagrangiana del sistema;
2. calcolare i punti di equilibrio del corrispondente sistema lagrangiano e discuterne la stabilità.
3. trovare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno ad una configurazione di equilibrio stabile.

Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente e si consideri il moto di un punto materiale di massa m sulla superficie di equazioni parametriche

$$x = a\cos\theta\cos\phi, \quad y = a\cos\theta\sin\phi, \quad z = b\sin\theta$$

con $a, b > 0$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\phi \in [0, 2\pi)$. Il punto è soggetto alla forza di gravità, di accelerazione g.

1. Scrivere la lagrangiana del sistema;
2. usare il metodo di Routh per ridurre il numero di gradi di libertà;

3. dimostrare che, se $\dot{\phi}\cos\theta \neq 0$ all'istante iniziale, esiste un'unica circonferenza corrispondente alle traiettorie delle orbite con θ costante (*suggerimento*: usare il cambiamento di variabili $u = \sin\theta$).

Terzo Esercizio

Si completino le relazioni

$$Q_1 = \arctan q_1 \,, \qquad Q_2 = e^{q_2}$$

ad una trasformazione canonica

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \longrightarrow (P_1, P_2, Q_1, Q_2)$$

e si utilizzi tale trasformazione per integrare il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}\left[p_1^2(1+q_1^2)^2 + p_2^2 e^{-2q_2} + \arctan^2 q_1 + e^{2q_2}\right] \,,$$

con condizioni iniziali

$$p_1(0) = \frac{1}{1+\tan^2(1)}, \quad p_2(0) = 1, \quad q_1(0) = \tan(1), \quad q_2(0) = 0 \,.$$