ESSAI

SUR

LE PROBLÈME DES TROIS CORPS.

Juvat integros accedere fontes.
LUCR.

(Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris, tome IX, 1772.)

AVERTISSEMENT.

Ces Recherches renferment une Méthode pour résoudre le Problème des trois Corps, différente de toutes celles qui ont été données jusqu'à présent. Elle consiste à n'employer dans la détermination de l'orbite de chaque Corps d'autres éléments que les distances entre les trois Corps, c'est-à-dire, le triangle formé par ces Corps à chaque instant. Pour cela, il faut d'abord trouver les équations qui déterminent ces mêmes distances par le temps; ensuite, en supposant les distances connues, il faut en déduire le mouvement relatif des Corps par rapport à un plan fixe quelconque. On verra, dans le premier Chapitre, comment je m'y suis pris pour remplir ces deux objets, dont le second surtout demande une analyse délicate et assez compliquée. A la fin de ce Chapitre, je rassemble les principales formules que j'ai trouvées, et qui renferment la solution du Problème des trois Corps pris dans toute sa généralité.

Le deuxième chapitre a pour objet d'examiner comment et dans quels cas les trois Corps pourraient se mouvoir en sorte que leurs distances fussent toujours constantes, ou gardassent au moins entre elles des rapports constants. Je trouve que ces conditions ne peuvent avoir lieu que dans deux cas : l'un, lorsque les trois Corps sont rangés dans une même ligne droite, et l'autre, lorsqu'ils forment un triangle équilatéral; alors chacun des trois Corps décrit autour des deux autres des cercles ou des sections coniques, comme s'il n'y avait que deux Corps. Cette recherche n'est à la vérité que de pure curiosité; mais j'ai cru qu'elle ne serait pas déplacée dans un Ouvrage qui roule principalement sur le Problème des trois Corps, envisagé dans toute son étendue.

Dans le troisième Chapitre, je suppose que la distance de l'un des trois Corps aux deux autres soit fort grande, et j'applique la solution générale du Chapitre premier à cette hypothèse, qui est, comme l'on sait, celle de la Terre, de la Lune et du Soleil.

Enfin, dans le quatrième Chapitre, je traite en particulier de la Théorie de la Lune; j'y donne les formules qui renferment cette Théorie, et je fais voir, par un léger essai de calcul, comment on doit se servir de ces formules pour en déduire les inégalités du mouvement de la Lune autour de la Terre.

Le défaut de temps et d'autres occupations indispensables ne m'ont pas permis d'entrer là-dessus dans tout le détail nécessaire pour répondre d'une manière convenable aux principaux points de la question proposée par l'Académie : aussi ai-je d'abord hésité si je lui présenterais ces Recherches pour le Concours, et je ne m'y suis déterminé que par l'espérance que cette illustre Compagnie trouvera peut-être ma Méthode pour résoudre le Problème des trois Corps digne de quelque attention, tant par sa nouveauté et sa singularité que par les difficultés considérables de calcul qu'elle renferme.

Si l'Académie daigne honorer mon travail de son suffrage, ce sera un puissant motif pour m'engager à le perfectionner, et je ne désespère pas de pouvoir tirer de ma Méthode une Théorie de la Lune aussi complète qu'on puisse le demander dans l'état d'imperfection où est encore l'Analyse.

CHAPITRE PREMIER.

FORMULES GÉNÉRALES POUR LA SOLUTION DU PROBLÈME DES TROIS CORPS.

I.

Soient A, B, C les masses des trois Corps qui s'attirent mutuellement en raison directe des masses et en raison inverse du carré des distances; soient nommées de plus x, y, z les coordonnées rectangles de l'orbite du Corps B autour du Corps A, x', y', z' les coordonnées rectangles de l'orbite du Corps C autour du même Corps A, coordonnées qu'on suppose toujours parallèles à trois lignes fixes et perpendiculaires entre elles; enfin soient r, r', r'' les distances entre les Corps A et B, A et C, B et C, en sorte que l'on ait

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},\quad r''=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}.$$

On aura, comme on sait, en prenant l'élément du temps dt constant, les six équations suivantes

$$(\mathrm{A})\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{A+B}{r^3}+\frac{C}{r''^3}\right)x+C\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{r''^3}\right)x'=0,\\
&\frac{d^2y}{dt^2}+\left(\frac{A+B}{r^3}+\frac{C}{r''^3}\right)y+C\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{r''^3}\right)y'=0,\\
&\frac{d^2z}{dt^2}+\left(\frac{A+B}{r^3}+\frac{C}{r''^3}\right)z+C\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{r''^3}\right)z'=0;
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{B})\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2x'}{dt^2}+\left(\frac{A+C}{r'^3}+\frac{B}{r''^3}\right)x'+B\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r''^3}\right)x=0,\\
&\frac{d^2y'}{dt^2}+\left(\frac{A+C}{r'^3}+\frac{B}{r''^3}\right)y'+B\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r''^3}\right)y=0,\\
&\frac{d^2z'}{dt^2}+\left(\frac{A+C}{r'^3}+\frac{B}{r''^3}\right)z'+B\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r''^3}\right)z=0;
\end{aligned}\right.$$

à l'aide desquelles on pourra déterminer les orbites relatives des Corps B et C autour du Corps A.

Si l'on fait encore

$$x' - x = x'', \quad y' - y = y'', \quad z' - z = z'',$$

en sorte que x'', y'', z'' soient les coordonnées rectangles de l'orbite du Corps C autour de B, on aura

$$r'' = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

et, retranchant respectivement les trois premières équations des trois dernières, on aura ces trois-ci

$$(\text{C}) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2x''}{dt^2} + \left(\frac{\text{B}+\text{C}}{r''^3} + \frac{\text{A}}{r^3}\right) x'' + \text{A}\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right) x' = 0, \\ &\frac{d^2y''}{dt^2} + \left(\frac{\text{B}+\text{C}}{r''^3} + \frac{\text{A}}{r^3}\right) y'' + \text{A}\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right) y' = 0, \\ &\frac{d^2z''}{dt^2} + \left(\frac{\text{B}+\text{C}}{r''^3} + \frac{\text{A}}{r^3}\right) z'' + \text{A}\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right) z' = 0, \end{aligned}\right.$$

qui exprimeront le mouvement relatif du Corps C autour du Corps B.

Il est bon de remarquer l'analogie qu'il y a entre ces neuf équations (A), (B), (C); c'est que les équations (A) se changent en les équations (B) en y changeant seulement B en C, x en x', y en y', z en z', r en r', et réciproquement; et que de même ces équations se changent en les équations (C) en y changeant A en C, x en x'', y en y'', z en z'', r en r'', et *vice versâ;* et la même analogie aura lieu dans toutes les formules que nous trouverons par la suite.

II.

Qu'on multiplie la première des équations (A) par y et la seconde par x, et qu'ensuite on les retranche l'une de l'autre, on aura

$$\frac{y\,d^2x - x\,d^2y}{dt^2} + \text{C}\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r''^3}\right)(yx' - xy') = 0.$$

Combinant de même les deux premières des équations (B) et les deux premières des équations (C), on aura ces deux-ci

$$\frac{y'd^2x' - x'd^2y'}{dt^2} + \mathrm{B}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r''^3}\right)(xy' - yx') = 0,$$

$$\frac{y''d^2x'' - x''d^2y''}{dt^2} + \mathrm{A}\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right)(x'y'' - y'x'') = 0.$$

Mais

$$x'' = x' - x, \quad y'' = y' - y;$$

donc

$$x'y'' - y'x'' = xy' - yx';$$

donc, en ajoutant ensemble les trois équations précédentes, après avoir divisé la première par C, la seconde par B et la troisième par A, on aura celle-ci

$$\frac{yd^2x - xd^2y}{\mathrm{C}dt^2} + \frac{y'd^2x' - x'd^2y'}{\mathrm{B}dt^2} + \frac{y''d^2x'' - x''d^2y''}{\mathrm{A}dt^2} = 0.$$

On trouvera de la même manière ces deux autres équations

$$\frac{zd^2x - xd^2z}{\mathrm{C}dt^2} + \frac{z'd^2x' - x'd^2z'}{\mathrm{B}dt^2} + \frac{z''d^2x'' - x''d^2z''}{\mathrm{A}dt^2} = 0,$$

$$\frac{zd^2y - yd^2z}{\mathrm{C}dt^2} + \frac{z'd^2y' - y'd^2z'}{\mathrm{B}dt^2} + \frac{z''d^2y'' - y''d^2z''}{\mathrm{A}dt^2} = 0.$$

De sorte qu'on aura, en intégrant,

$$(\mathrm{D})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{ydx - xdy}{\mathrm{C}dt} + \frac{y'dx' - x'dy'}{\mathrm{B}dt} + \frac{y''dx'' - x''dy''}{\mathrm{A}dt} = a,\\ &\frac{zdx - xdz}{\mathrm{C}dt} + \frac{z'dx' - x'dz'}{\mathrm{B}dt} + \frac{z''dx'' - x''dz''}{\mathrm{A}dt} = b,\\ &\frac{zdy - ydz}{\mathrm{C}dt} + \frac{z'dy' - y'dz'}{\mathrm{B}dt} + \frac{z''dy'' - y''dz''}{\mathrm{A}dt} = c,\end{aligned}\right.$$

a, b, c étant des constantes arbitraires.

De plus, si l'on multiplie la première des équations (A) par $\frac{dx}{\mathrm{C}}$, la première des équations (B) par $\frac{dx'}{\mathrm{C}}$, et la première des équations (C) par

$\frac{dx''}{A}$, et qu'ensuite on les ajoute ensemble, on aura, à cause de $x'' = x' - x$,

$$\frac{dx\,d^2x}{C\,dt^2} + \frac{dx'\,d^2x'}{B\,dt^2} + \frac{dx''\,d^2x''}{A\,dt^2} + (A+B+C)\left(\frac{x\,dx}{C r^3} + \frac{x'\,dx'}{B r'^3} + \frac{x''\,dx''}{A r''^3}\right) = 0.$$

On trouvera de même

$$\frac{dy\,d^2y}{C\,dt^2} + \frac{dy'\,d^2y'}{B\,dt^2} + \frac{dy''\,d^2y''}{A\,dt^2} + (A+B+C)\left(\frac{y\,dy}{C r^3} + \frac{y'\,dy'}{B r'^3} + \frac{y''\,dy''}{A r''^3}\right) = 0,$$

$$\frac{dz\,d^2z}{C\,dt^2} + \frac{dz'\,d^2z'}{B\,dt^2} + \frac{dz''\,d^2z''}{A\,dt^2} + (A+B+C)\left(\frac{z\,dz}{C r^3} + \frac{z'\,dz'}{B r'^3} + \frac{z''\,dz''}{A r''^3}\right) = 0.$$

Donc, ajoutant ensemble ces trois équations et mettant

$r\,dr$ à la place de $x\,dx + y\,dy + z\,dz$,
$r'\,dr'$ à la place de $x'\,dx' + y'\,dy' + z'\,dz'$,
$r''dr''$ à la place de $x''dx'' + y''dy'' + z''dz''$,

on aura une équation intégrable dont l'intégrale sera

$$\text{(E)}\quad \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{C\,dt^2} + \frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{B\,dt^2} + \frac{dx''^2+dy''^2+dz''^2}{A\,dt^2} - 2(A+B+C)\left(\frac{1}{Cr} + \frac{1}{Br'} + \frac{1}{Ar''}\right) = f,$$

f étant une constante arbitraire.

Ce sont là les seules intégrales exactes qu'on ait pu trouver jusqu'à présent; or, comme il y a en tout six variables x, y, z, x', y', z', il est clair que, si l'on pouvait trouver encore deux autres intégrales, le problème serait réduit aux premières différences; mais on ne saurait guère se flatter d'y parvenir dans l'état d'imperfection où est encore l'Analyse.

III.

Supposons, pour abréger,

$$u^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2},$$

$$u'^2 = \frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{dt^2},$$

$$u''^2 = \frac{dx''^2 + dy''^2 + dz''^2}{dt^2},$$

en sorte que u, u', u'' expriment les vitesses relatives des Corps B, C autour de A, et de C autour de B; il est clair qu'on aura

$$\frac{d^2(r^2)}{2\,dt^2} = \frac{x\,d^2x + y\,d^2y + z\,d^2z}{dt^2} + u^2,$$

$$\frac{d^2(r'^2)}{2\,dt^2} = \frac{x'\,d^2x' + y'\,d^2y' + z'\,d^2z'}{dt^2} + u'^2,$$

$$\frac{d^2(r''^2)}{2\,dt^2} = \frac{x''\,d^2x'' + y''\,d^2y'' + z''\,d^2z''}{dt^2} + u''^2.$$

Donc, mettant dans ces équations au lieu de

$$\frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{d^2y}{dt^2},\quad \frac{d^2z}{dt^2},\quad \frac{d^2x'}{dt^2},\dots$$

leurs valeurs tirées des équations (A), (B), (C), et faisant attention que

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2,\quad x''^2 + y''^2 + z''^2 = r''^2,$$

et

$$xx' + yy' + zz' = \frac{r^2 + r'^2 - r''^2}{2},$$

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = x'^2 + y'^2 + z'^2 - (x'x + y'y + z'z) = \frac{r'^2 + r''^2 - r^2}{2},$$

on aura, après avoir fait passer tous les termes du même côté,

$$(\mathrm{F})\quad \begin{cases} \dfrac{d^2(r^2)}{2\,dt^2} + \left(\dfrac{A+B}{r^3} + \dfrac{C}{r''^3}\right) r^2 + \dfrac{C}{2}\left(\dfrac{1}{r'^3} - \dfrac{1}{r''^3}\right)(r^2 + r'^2 - r''^2) - u^2 = 0,\\[2ex] \dfrac{d^2(r'^2)}{2\,dt^2} + \left(\dfrac{A+C}{r'^3} + \dfrac{B}{r''^3}\right) r'^2 + \dfrac{B}{2}\left(\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{1}{r''^3}\right)(r^2 + r'^2 - r''^2) - u'^2 = 0,\\[2ex] \dfrac{d^2(r''^2)}{2\,dt^2} + \left(\dfrac{B+C}{r''^3} + \dfrac{A}{r^3}\right) r''^2 + \dfrac{A}{2}\left(\dfrac{1}{r'^3} - \dfrac{1}{r^3}\right)(r'^2 + r''^2 - r^2) - u''^2 = 0. \end{cases}$$

Donc, si l'on peut avoir les valeurs de u^2, u'^2, u''^2 exprimées en r, r', r'' seulement, on aura trois équations entre ces trois dernières variables et le temps t, à l'aide desquelles on pourra à chaque instant déterminer la position relative des Corps.

30.

IV.

Or on a, en différentiant les valeurs de u^2, u'^2, u''^2,

$$u\,du = \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2},$$

$$u'\,du' = \frac{dx'\,d^2x' + dy'\,d^2y' + dz'\,d^2z'}{dt^2},$$

$$u''du'' = \frac{dx''\,d^2x'' + dy''\,d^2y'' + dz''\,d^2z''}{dt^2};$$

donc, si l'on fait ici les mêmes substitutions que ci-dessus, et qu'on suppose pour un moment

$$dV = x'\,dx + y'\,dy + z'\,dz,$$

$$dV' = x\,dx' + y\,dy' + z\,dz',$$

$$dV'' = x'dx'' + y'dy'' + z'dz'',$$

à cause de

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = r\,dr,\quad x'\,dx' + y'\,dy' + z'\,dz' = r'\,dr',\quad x''dx'' + y''\,dy'' + z''dz'' = r''dr'',$$

on aura

$$u\,du = -\left(\frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r''^3}\right) r\,dr - C\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r''^3}\right) dV,$$

$$u'\,du' = -\left(\frac{A+C}{r'^3} + \frac{B}{r''^3}\right) r'\,dr' - B\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r''^3}\right) dV',$$

$$u''du'' = -\left(\frac{B+C}{r''^3} + \frac{A}{r^3}\right) r''dr'' - A\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right) dV''.$$

Soit, pour abréger,

$$dR = \frac{2\,r\,dr}{r''^3} + 2\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r''^3}\right) dV,$$

$$dR' = \frac{2\,r'dr'}{r''^3} + 2\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r''^3}\right) dV',$$

$$dR'' = \frac{2\,r''dr''}{r^3} + 2\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right) dV'',$$

et l'on aura

$$u^2 = \frac{2(A+B)}{r} - CR,$$

$$u'^2 = \frac{2(A+C)}{r'} - BR',$$

$$u''^2 = \frac{2(B+C)}{r''} - AR'';$$

de sorte que les équations (F) deviendront

$$(G)\left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2(r^2)}{2dt^2} - \frac{A+B}{r} + C\left[\frac{r^2}{r''^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r''^3}\right)(r^2 + r'^2 - r''^2) + R\right] = 0,\\
&\frac{d^2(r'^2)}{2dt^2} - \frac{A+C}{r'} + B\left[\frac{r'^2}{r''^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r''^3}\right)(r^2 + r'^2 - r''^2) + R'\right] = 0,\\
&\frac{d^2(r''^2)}{2dt^2} - \frac{B+C}{r''} + A\left[\frac{r''^2}{r^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right)(r'^2 + r''^2 - r^2) + R''\right] = 0;
\end{aligned}\right.$$

et il ne restera plus qu'à trouver les valeurs de

$$dV, \quad dV', \quad dV''.$$

Pour cela, je fais

$$d\rho = x'\,dx + y'\,dy + z'\,dz - x\,dx' - y\,dy' - z\,dz',$$

et comme l'on a

$$xx' + yy' + zz' = \frac{r^2 + r'^2 - r''^2}{2},$$

on aura, en différentiant,

$$x\,dx' + y\,dy' + z\,dz' + x'\,dx + y'\,dy + z'\,dz = r\,dr + r'\,dr' - r''\,dr'';$$

donc

$$dV = \frac{r\,dr + r'\,dr' - r''\,dr'' + d\rho}{2},$$

$$dV' = \frac{r\,dr + r'\,dr' - r''\,dr'' - d\rho}{2},$$

et ensuite

$$dV'' = r'dr' - dV,$$

savoir

$$dV'' = \frac{r'\,dr' + r''\,dr'' - r\,dr - d\rho}{2}.$$

Tout se réduit donc maintenant à avoir la valeur de $d\rho$; pour y parvenir, je différentie, et j'ai

$$d^2\rho = x'\,d^2x + y'\,d^2y + z'\,d^2z - x\,d^2x' - y\,d^2y' - z\,d^2z' ;$$

je substitue à la place de d^2x, d^2y, d^2z, ... les valeurs tirées des équations (A) et (B), et faisant les autres substitutions convenables, je trouve

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r''^3} - \frac{A+C}{r'^3} - \frac{B}{r''^3}\right)(r^2 + r'^2 - r''^2) - C\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r''^3}\right)r'^2 + B\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r''^3}\right)r^2,$$

ou bien

$$\frac{2\,d^2\rho}{dt^2} + A\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)(r^2 + r'^2 - r''^2) + B\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r''^3}\right)(r'^2 - r^2 - r''^2) + C\left(\frac{1}{r''^3} - \frac{1}{r'^3}\right)(r^2 - r'^2 - r''^2) = 0.$$

V.

Supposons, pour mettre nos formules sous une forme plus simple,

$$\frac{r'^2 + r''^2 - r^2}{2} = p, \qquad \frac{r^2 + r''^2 - r'^2}{2} = p', \qquad \frac{r^2 + r'^2 - r''^2}{2} = p'',$$

$$\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r''^3} = q, \qquad \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r''^3} = q', \qquad \frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3} = q'' = q - q',$$

$$\frac{u'^2 + u''^2 - u^2}{2} = v, \qquad \frac{u^2 + u''^2 - u'^2}{2} = v', \qquad \frac{u^2 + u'^2 - u''^2}{2} = v'',$$

et l'on aura d'abord, pour la détermination de $d\rho$, cette équation

$$\text{(H)} \qquad \frac{d^2\rho}{dt^2} + Cpq - Bp'q' - Ap''q'' = 0.$$

On aura ensuite

$$dV = \frac{dp'' + d\rho}{2}, \quad dV' = \frac{dp'' - d\rho}{2}, \quad dV'' = \frac{dp - d\rho}{2},$$

d'où

$$dR = \frac{2rdr}{r''^3} + q(dp''+d\rho),$$

$$dR' = \frac{2r'dr'}{r''^3} + q'(dp''-d\rho),$$

$$dR'' = \frac{2r''dr''}{r^3} + q''(dp - d\rho).$$

Mais

$$\frac{1}{r''^3} = \frac{1}{r^3} - q', \quad 2rdr = dp' + dp'';$$

donc

$$\frac{2r\,dr}{r''^3} = \frac{2dr}{r^2} - q'(dp' + dp'');$$

on trouvera de même

$$\frac{2r'dr'}{r''^3} = \frac{2dr'}{r'^2} - q(dp + dp''),$$

$$\frac{2r''dr''}{r^3} = \frac{2dr''}{r''^2} + q'(dp' + dp);$$

de sorte qu'en substituant ces valeurs, et faisant pour plus de simplicité

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} dQ = q'dp' - q''dp'' - q\,d\rho, \\ dQ' = q\,dp + q''dp'' + q'd\rho, \\ dQ'' = -q\,dp - q'dp' + q''d\rho, \end{cases}$$

on aura

$$R = -\frac{2}{r} - Q, \quad R' = -\frac{2}{r'} - Q', \quad R'' = -\frac{2}{r''} - Q'',$$

et de là

$$\text{(J)} \quad \begin{cases} u^2 = \dfrac{2(A+B+C)}{r} + CQ, \\ u'^2 = \dfrac{2(A+B+C)}{r'} + BQ', \\ u''^2 = \dfrac{2(A+B+C)}{r''} + AQ''. \end{cases}$$

Maintenant on aura

$$\frac{r^2}{r''^3} = \frac{1}{r} - q'(p' + p''),$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r''^3}\right)(r^2 + r'^2 - r''^2) = qp'';$$

donc, ajoutant ces deux équations, et mettant q'' à la place de $q - q'$, on aura

$$\frac{r^2}{r''^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r''^3}\right)(r^2 + r'^2 - r''^2) = \frac{1}{r} - p'q' + p''q'';$$

on trouvera de même

$$\frac{r'^2}{r''^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r''^3}\right)(r^2 + r'^2 - r''^2) = \frac{1}{r'} - pq - p''q'',$$

$$\frac{r''^2}{r^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right)(r'^2 + r''^2 - r^2) = \frac{1}{r''} + pq + p'q';$$

donc, faisant toutes ces substitutions dans les équations (G) ou (F) des Articles précédents, elles deviendront celles-ci

$$(\mathrm{K}) \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2(r^2)}{2\,dt^2} - \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}}{r} - \mathrm{C}\,(p'q' - p''q'' + \mathrm{Q}) = 0,\\ &\frac{d^2(r'^2)}{2\,dt^2} - \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}}{r'} - \mathrm{B}\,(pq + p''q'' + \mathrm{Q}') = 0,\\ &\frac{d^2(r''^2)}{2\,dt^2} - \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}}{r''} - \mathrm{A}(-pq - p'q' + \mathrm{Q}'') = 0.\end{aligned}\right.$$

Ainsi l'on pourra, à l'aide de ces trois équations, déterminer les trois rayons r, r' et r'' en t, ce qui donnera pour chaque instant la position relative des Corps entre eux.

Il est bon de remarquer que, si l'on divise la première de ces équations par C, la seconde par B et la troisième par A, et qu'ensuite on les ajoute ensemble, on aura (à cause de $d\mathrm{Q} + d\mathrm{Q}' + d\mathrm{Q}'' = 0$, et par conséquent $\mathrm{Q} + \mathrm{Q}' + \mathrm{Q}'' = \text{const.}$) celle-ci

$$(\mathrm{L}) \quad \frac{d^2(r^2)}{2\mathrm{C}\,dt^2} + \frac{d^2(r'^2)}{2\mathrm{B}\,dt^2} + \frac{d^2(r''^2)}{2\mathrm{A}\,dt^2} - (\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})\left(\frac{1}{\mathrm{C}r} + \frac{1}{\mathrm{B}r'} + \frac{1}{\mathrm{A}r''}\right) = \text{const.},$$

laquelle pourra tenir lieu d'une quelconque des trois équations (K).

VI.

On peut encore mettre les mêmes équations (K) sous une autre forme que voici.

Je multiplie la première de ces équations par $d(r^2)$, et je l'intègre ensuite pour avoir

$$\frac{d(r^2)^2}{4dt^2} - 2(A+B+C)r - C\int(p'q' - p''q'')\,d(r^2) - C\int Q\,d(r^2) + L = 0,$$

L étant une constante arbitraire.

Or

$$\int Q\,d(r^2) = Qr^2 - \int r^2 dQ;$$

mais

$$dQ = q'dp' - q''dp'' - q\,d\rho;$$

de plus, à cause de $r^2 = p' + p''$, on aura

$$\begin{aligned}&(p'q' - p''q'')\,d(r^2) - r^2(q'dp' - q''dp'')\\ &\quad = -(p'q' - p''q'')(dp' + dp'') + (p' + p'')(q'dp' - q''dp'') = q(p''dp' - p'dp'');\end{aligned}$$

de sorte que si l'on fait, pour abréger,

$$dP = q(p''dp' - p'dp'' - r^2 d\rho),$$

on aura, en négligeant la constante L qui peut être censée contenue dans P, et divisant toute l'équation par r^2,

$$\frac{dr^2}{dt^2} - \frac{2(A+B+C)}{r} + C\left(\frac{P}{r^2} - Q\right) = 0.$$

Faisant de même

$$dP' = q'(p''dp - p\,dp'' + r'^2 d\rho),$$

$$dP'' = q''(p\,dp' - p'dp + r''^2 d\rho),$$

on trouvera par des opérations semblables aux précédentes

$$\frac{dr'^2}{dt^2} - \frac{2(A+B+C)}{r'} + B\left(\frac{P'}{r'^2} - Q'\right) = 0,$$

$$\frac{dr''^2}{dt^2} - \frac{2(A+B+C)}{r''^2} + A\left(\frac{P''}{r''^2} - Q''\right) = 0.$$

Et, si l'on retranche ces équations respectivement des équations (K) trouvées ci-dessus, qu'ensuite on divise les équations restantes par r, r', r'', on aura ces trois-ci

$$(M)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{A+B+C}{r^2} - C\left(\frac{p'q' - p''q''}{r} + \frac{P}{r^3}\right) = 0,\\ &\frac{d^2r'}{dt^2} + \frac{A+B+C}{r'^2} - B\left(\frac{pq + p''q''}{r'} + \frac{P'}{r'^3}\right) = 0,\\ &\frac{d^2r''}{dt^2} + \frac{A+B+C}{r''^2} - A\left(\frac{-pq - p'q'}{r''} + \frac{P''}{r''^3}\right) = 0.\end{aligned}\right.$$

VII.

Nous avons donc réduit les six équations primitives (A), (B) qui renferment la solution du Problème des trois Corps pris dans toute sa généralité à trois autres équations entre les trois distances r, r', r'' et le temps t. Il est vrai que ces réduites renferment chacune deux signes d'intégration (ce qui est évident en substituant les valeurs de Q, Q', Q'', ou de P, P', P'' et de $d\rho$), et qu'à cet égard elles sont moins simples que les équations primitives; mais, d'un autre côté, elles ont l'avantage de ne renfermer aucun radical, ce qui me paraît d'une grande importance dans ces sortes de Problèmes.

Supposons donc qu'on ait déterminé par les équations (K) ou (M) les trois variables r, r', r'' en t; on ne connaîtra encore par là que la position relative des Corps, c'est-à-dire, le triangle que les trois Corps forment à chaque instant; ainsi il reste à voir comment on pourra déterminer ensuite l'orbite même de chaque Corps, c'est-à-dire, les six variables x, y, z, x', y', z'.

VIII.

Pour cet effet, nous remarquerons d'abord qu'en connaissant r, r', r'' on connaîtra aussi u u', u'', et dV, dV', dV'' par les formules de l'Article V. De sorte qu'on aura $\left(\text{en mettant } p'' \text{ à la place de } \frac{r^2+r'^2-r''^2}{2}\right.$ et v'' à la place de $\left.\frac{u^2+u'^2-u''^2}{2}\right)$ les dix équations suivantes

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2+z^2=r^2,\\
&x'^2+y'^2+z'^2=r'^2,\\
&xx'+yy'+zz'=p'',\\
&x\,dx+y\,dy+z\,dz=r\,dr,\\
&x'\,dx'+y'\,dy'+z'\,dz'=r'\,dr',\\
&x'\,dx+y'\,dy+z'\,dz=dV,\\
&x\,dx'+y\,dy'+z\,dz'=dV',\\
&dx^2+dy^2+dz^2=u^2\,dt^2,\\
&dx'^2+dy'^2+dz'^2=u'^2\,dt^2,\\
&dx\,dx'+dy\,dy'+dz\,dz'=v''\,dt^2.
\end{aligned}$$

Or, en regardant les quantités $x, y, z, x', y', z', dx, dy, dz, dx', dy', dz'$ comme autant d'inconnues, il est clair que les équations précédentes ne suffisent pas pour les déterminer, puisqu'on aurait douze inconnues, et seulement dix équations; mais, si l'on joint à ces équations les trois équations (D) de l'Article II, on aura alors une équation de plus qu'il n'y a d'inconnues, et la difficulté ne consistera qu'à résoudre ces équations.

IX.

J'observe, à l'égard des équations de l'Article précédent, qu'elles ne peuvent tenir lieu que de neuf équations, parce que, en éliminant quelques-unes des inconnues, il arrive que les autres s'en vont d'elles-mêmes, de sorte qu'on tombe par ce moyen dans une équation où il n'entre plus que les quantités r^2, r'^2, p'',.... Pour le prouver de la manière la plus simple qu'il est possible, je prends d'abord les trois équations

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = r\,dr,$$
$$x'dx + y'dy + z'dz = dV,$$
$$dx'dx + dy'dy + dz'dz = v''dt^2,$$

et j'en tire par les règles ordinaires de l'élimination les valeurs de dx, dy, dz; j'aurai, en faisant, pour abréger,

$$\alpha = y'dz' - z'dy', \quad \alpha' = z\,dy' - y\,dz', \quad \alpha'' = yz' - y'z,$$
$$\beta = z'dx' - x'dz', \quad \beta' = x\,dz' - z\,dx', \quad \beta'' = zx' - z'x,$$
$$\gamma = x'dy' - y'dx', \quad \gamma' = y\,dx' - x\,dy', \quad \gamma'' = xy' - yx',$$
$$\delta = x(y'dz' - z'dy') - y(x'dz' - z'dx') + z(x'dy' - y'dx'),$$

j'aurai, dis-je,

$$dx = \frac{\alpha\,r\,dr + \alpha' dV + \alpha'' v'' dt^2}{\delta},$$
$$dy = \frac{\beta\,r\,dr + \beta' dV + \beta'' v'' dt^2}{\delta},$$
$$dz = \frac{\gamma\,r\,dr + \gamma' dV + \gamma'' v'' dt^2}{\delta}.$$

Or je remarque que l'on a

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (x'^2 + y'^2 + z'^2)(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) - (x'dx' + y'dy' + z'dz')^2\\ &= r'^2 u'^2 dt^2 - (r'dr')^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= (x^2 + y^2 + z^2)(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) - (x\,dx' + y\,dy' + z\,dz')^2\\ &= r^2 u'^2 dt^2 - dV'^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 &= (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (xx' + yy' + zz')^2\\ &= r^2 r'^2 - p''^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= (x'dx' + y'dy' + z'dz')(x\,dx' + y\,dy' + z\,dz')\\ &\quad - (xx' + yy' + zz')(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)\\ &= r'dr'dV' - p''u'^2 dt^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' &= (x'dx' + y'dy' + z'dz')(xx' + yy' + zz') \\ &\quad - (x\,dx' + y\,dy' + z\,dz')(x'^2 + y'^2 + z'^2) \\ &= p''r'dr' - r'^2 dV',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' &= (x\,dx' + y\,dy' + z\,dz')(xx' + yy' + zz') \\ &\quad - (x'dx' + y'dy' + z'dz')(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= p''dV' - r^2 r'dr';\end{aligned}$$

de sorte que, si l'on carre les trois équations précédentes, et qu'on les ajoute ensuite ensemble, on aura, après avoir multiplié par δ^2, et fait les substitutions convenables,

$$\begin{aligned}\delta^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) &= (r\,dr)^2[r'^2u'^2dt^2 - (r'\,dr')^2] + dV^2(r^2u'^2dt^2 - dV'^2) \\ &\quad + (v''dt^2)^2(r^2r'^2 - p''^2) + 2\,r\,dr\,dV(r'dr'dV' - p''u'^2dt^2) \\ &\quad + 2\,r\,dr\,v''dt^2(p''r'dr' - r'^2dV') + 2\,dV\,v''dt^2(p''dV' - r^2r'dr').\end{aligned}$$

De même, si l'on prend les trois équations

$$\begin{aligned}xx + yy + zz &= r^2, \\ x'x + y'y + z'z &= p'', \\ x\,dx' + y\,dy' + z\,dz' &= dV',\end{aligned}$$

et qu'on en tire les valeurs de x, y et z, il est facile de voir qu'on aura pour x, y, z les mêmes expressions que l'on a trouvées plus haut pour dx, dy, dz, en y changeant seulement $r\,dr$ en r^2, dV en p'' et $v''dt^2$ en dV'; donc, faisant les mêmes opérations et les mêmes substitutions que ci-dessus, on aura cette autre équation

$$\begin{aligned}\delta^2(x^2 + y^2 + z^2) &= r^4[r'^2u'^2dt^2 - (r'dr')^2] + p''^2(r^2u'^2dt^2 - dV'^2) \\ &\quad + dV'^2(r^2r'^2 - p''^2) + 2\,r^2p''(r'dr'dV' - p''u'^2dt^2) \\ &\quad + 2\,r^2dV'(p''r'dr' - r'^2dV') + 2p''dV'(p''dV' - r^2r'dr').\end{aligned}$$

Or on a

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = u^2dt^2, \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

donc on aura les deux équations suivantes

$$\begin{aligned}\delta^2 u^2 dt^2 = {} & (r\,dr)^2(r'^2 u'^2 dt^2 - r'^2 dr'^2) + dV^2(r^2 u'^2 dt^2 - dV'^2)\\ & + (v'' dt^2)^2(r^2 r'^2 - p''^2) + 2r\,dr\,dV(r'\,dr'\,dV' - p'' u'^2 dt^2)\\ & + 2r\,dr\,v''\,dt^2(p'' r'\,dr' - r'^2 dV') + 2dV\,v''\,dt^2(p''\,dV' - r^2 r'\,dr'),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta^2 r^2 = {} & r^4(r'^2 u'^2 dt^2 - r'^2 dr'^2) + p''^2(r^2 u'^2 dt^2 - dV'^2)\\ & + dV'^2(r^2 r'^2 - p''^2) + 2r^2 p''(r'\,dr'\,dV' - p'' u'^2 dt^2)\\ & + 2r^2 dV'(p'' r'\,dr' - r'^2 dV') + 2p''\,dV'(p''\,dV' - r^2 r'\,dr').\end{aligned}$$

D'où, chassant δ^2, on aura une équation entre les seules quantités connues r^2, r'^2, ...

X.

Si l'on tire de la dernière équation la valeur de δ^2, on aura, en réduisant et effaçant ce qui se détruit,

$$\delta^2 = r'^2(r^2 u'^2 dt^2 - r^2 dr'^2 - dV'^2) + 2p'' r'\,dr'\,dV' - p''^2 u'^2 dt^2;$$

et, cette valeur de δ^2 étant substituée dans l'autre équation, on aura

$$\begin{aligned} & r'^2(r^2 u'^2 dt^2 - r^2 dr'^2 - dV'^2)u^2 dt^2 + (2p'' r'\,dr'\,dV' - p''^2 u'^2 dt^2)u^2 dt^2\\ & = (r\,dr)^2(r'^2 u'^2 dt^2 - r'^2 dr'^2) + dV^2(r^2 u'^2 dt^2 - dV'^2)\\ & \quad + (v'' dt^2)^2(r^2 r'^2 - p''^2) + 2r\,dr\,dV(r'\,dr'\,dV' - p'' u'^2 dt^2)\\ & \quad + 2r\,dr\,v''\,dt^2(p'' r'\,dr' - r'^2 dV') + 2dV\,v''\,dt^2(p''\,dV' - r^2 r'\,dr');\end{aligned}$$

ou bien, en ordonnant les termes,

$$\begin{aligned} & (r^2 r'^2 - p''^2)(u^2 u'^2 - v''^2)\,dt^4 + (r\,dr.r'\,dr' - dV\,dV')^2\\ & - [r^2(r'\,dr')^2 - 2p'' r'\,dr'\,dV' + r'^2 dV'^2]\,u^2 dt^2\\ & - [r'^2(r\,dr)^2 - 2p'' r\,dr\,dV + r^2 dV^2]\,u'^2 dt^2\\ & - 2[p''(r\,dr.r'\,dr' + dV\,dV') - r^2 r'\,dr'\,dV - r'^2 r\,dr\,dV']\,v''\,dt^2 = 0.\end{aligned}$$

Or (Article V)

$$dV = \frac{dp'' + d\rho}{2}, \quad \text{et} \quad dV' = \frac{dp'' - d\rho}{2};$$

de plus on a, par les formules du même Article,

$$r^2 = p' + p'', \quad r'^2 = p + p'', \quad r''^2 = p + p',$$

et de même

$$u^2 = v' + v'', \quad u'^2 = v + v'', \quad u''^2 = v + v';$$

donc, si l'on fait ces substitutions, et qu'on suppose pour plus de simplicité

$$\Sigma = p\left(\frac{2\,r\,dr}{dt}\right)^2 + p'\left(\frac{dp''}{dt}\right)^2 + p''\left(\frac{dp'}{dt}\right)^2 - 2\left(p''\frac{dp'}{dt} - p'\frac{dp''}{dt}\right)\frac{d\rho}{dt} + r^2\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2,$$

$$\Sigma' = p'\left(\frac{2\,r'dr'}{dt}\right)^2 + p\left(\frac{dp''}{dt}\right)^2 + p''\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + 2\left(p''\frac{dp}{dt} - p\frac{dp''}{dt}\right)\frac{d\rho}{dt} + r'^2\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2,$$

$$\Sigma'' = p''\left(\frac{2\,r''dr''}{dt}\right)^2 + p'\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + p\left(\frac{dp'}{dt}\right)^2 + 2\left(p\frac{dp'}{dt} - p'\frac{dp}{dt}\right)\frac{d\rho}{dt} + r''^2\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2,$$

l'équation suivante deviendra, après avoir été multipliée par $\frac{16}{dt^4}$,

$$(\mathrm{N}) \quad 16(pp' + pp'' + p'p'')(vv' + vv'' + v'v'') - 4(\Sigma v + \Sigma' v' + \Sigma'' v'') + \left(\frac{dp\,dp' + dp\,dp'' + dp'\,dp'' + d\rho^2}{dt^2}\right)^2 = 0.$$

Il faut donc que cette équation ait lieu en même temps que les trois équations (K) de l'Article V; de sorte que, comme elle ne contient d'ailleurs que les mêmes variables que les équations (K), et qu'elle est d'un ordre moins élevé d'une unité que celle-ci, on pourra la regarder comme une intégrale de ces mêmes équations (K), mais intégrale particulière à cause qu'elle ne renferme aucune nouvelle constante; ainsi, si l'on intègre les équations (K) en y ajoutant les constantes nécessaires, ces constantes devront être telles qu'elles satisfassent à l'équation (N). De sorte que, si l'on ne veut pas se servir de cette dernière équation à la place de l'une des équations (K), il faudra néanmoins y avoir égard dans la détermination des constantes; mais pour cela il suffira d'y supposer partout $t = 0$.

Au reste nous ferons toujours usage de cette équation pour déterminer la constante qui doit entrer dans la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$, résultante de l'intégration de l'équation (H) de l'Article V.

XI.

Reprenons maintenant les équations (D) de l'Article II, et faisant, pour abréger,

$$\lambda = y\,dx - x\,dy,\quad \lambda' = y'\,dx' - x'\,dy',\quad \lambda'' = y''\,dx'' - x''\,dy'',$$

$$\mu = z\,dx - x\,dz,\quad \mu' = z'\,dx' - x'\,dz',\quad \mu'' = z''\,dx'' - x''\,dz'',$$

$$\nu = z\,dy - y\,dz,\quad \nu' = z'\,dy' - y'\,dz',\quad \nu'' = z''\,dy'' - y''\,dz'',$$

on aura, après avoir multiplié par dt,

$$(\mathrm{O})\qquad \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\mathrm{C}} + \dfrac{\lambda'}{\mathrm{B}} + \dfrac{\lambda''}{\mathrm{A}} = a\,dt, \\[2ex] \dfrac{\mu}{\mathrm{C}} + \dfrac{\mu'}{\mathrm{B}} + \dfrac{\mu''}{\mathrm{A}} = b\,dt, \\[2ex] \dfrac{\nu}{\mathrm{C}} + \dfrac{\nu'}{\mathrm{B}} + \dfrac{\nu''}{\mathrm{A}} = c\,dt. \end{cases}$$

Or je trouve, comme plus haut,

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2 = r^2u^2\,dt^2 - (r\,dr)^2,$$

et par analogie

$$\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = r'^2u'^2\,dt^2 - (r'\,dr')^2,$$

$$\lambda''^2 + \mu''^2 + \nu''^2 = r''^2u''^2\,dt^2 - (r''\,dr')^2;$$

je trouve de même

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = (xx' + yy' + zz')(dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz') - (x'\,dx + y'\,dy + z'\,dz)(x\,dx' + y\,dy' + z\,dz')$$

$$= p''\upsilon''\,dt^2 - d\mathrm{V}\,d\mathrm{V}' = p''\upsilon''\,dt^2 - \left(\frac{dp''}{2}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{2}\right)^2,$$

et par analogie

$$\lambda\lambda'' + \mu\mu'' + \nu\nu'' = p'\upsilon'\,dt^2 - \left(\frac{dp'}{2}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{2}\right)^2,$$

$$\lambda'\lambda'' + \mu'\mu'' + \nu'\nu'' = p\upsilon\,dt^2 - \left(\frac{dp}{2}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{2}\right)^2.$$

Donc, si l'on fait, pour plus de simplicité,

$$\Pi = r^2 u^2 - \left(\frac{r\,dr}{dt}\right)^2,$$

$$\Pi' = r'^2 u'^2 - \left(\frac{r'\,dr'}{dt}\right)^2,$$

$$\Pi'' = r''^2 u''^2 - \left(\frac{r''\,dr''}{dt}\right)^2,$$

et

$$\Psi = p\nu - \left(\frac{dp}{2\,dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{2\,dt}\right)^2,$$

$$\Psi' = p'\nu' - \left(\frac{dp'}{2\,dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{2\,dt}\right)^2,$$

$$\Psi'' = p''\nu'' - \left(\frac{dp''}{2\,dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{2\,dt}\right)^2,$$

en sorte que l'on ait

$$\begin{aligned} &\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \Pi\,dt^2, && \lambda'\lambda'' + \mu'\mu'' + \nu'\nu'' = \Psi\,dt^2,\\ &\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = \Pi'\,dt^2, && \lambda\lambda'' + \mu\mu'' + \nu\nu'' = \Psi'\,dt^2,\\ &\lambda''^2 + \mu''^2 + \nu''^2 = \Pi''\,dt^2, && \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = \Psi''\,dt^2, \end{aligned}$$

on aura, en carrant les trois équations (O) et les ajoutant ensemble,

$$\text{(P)} \qquad \frac{\Pi}{C^2} + \frac{\Pi'}{B^2} + \frac{\Pi''}{A^2} + \frac{2\Psi}{AB} + \frac{2\Psi'}{AC} + \frac{2\Psi''}{BC} = a^2 + b^2 + c^2,$$

équation qui est aussi, comme l'on voit, d'un ordre moins élevé d'une unité que les équations (K); et comme elle renferme la constante arbitraire $a^2 + b^2 + c^2$ qui ne se trouve point dans les équations (K), on peut la regarder comme une intégrale complète de ces mêmes équations.

XII.

On pourrait croire que l'équation (E) que nous avons trouvée dans l'Article II pourrait ainsi, en y substituant les valeurs de u, u' et u'', donner une nouvelle intégrale, mais il est facile de voir qu'il n'en résulterait qu'une équation identique, car l'équation dont il s'agit se réduit d'abord à

$$\frac{u^2}{C} + \frac{u'^2}{B} + \frac{u''^2}{A} - 2(A+B+C)\left(\frac{1}{Cr} + \frac{1}{Br'} + \frac{1}{Ar''}\right) = f;$$

et, mettant pour u, u' et u'' leurs valeurs tirées des formules (J), on aura, en rejetant ce qui se détruit,

$$Q + Q' + Q'' = f,$$

ce qui ne renferme aucune nouvelle condition, car les quantités Q, Q', Q'' sont déjà d'elles-mêmes telles que $dQ + dQ' + dQ'' = 0$ (Article V).

Au reste, si l'on combine l'équation

$$Q + Q' + Q'' = f$$

avec les équations (N) et (P), après y avoir substitué les valeurs de u, u' et u'', on pourra, par le moyen de ces trois équations, déterminer les trois quantités Q, Q' et Q'', lesquelles ne renfermeront par conséquent que les variables finies r, r', r'' et leurs différentielles premières dr, dr', dr'' avec la quantité $\frac{d\rho}{dt}$; ainsi, substituant ces valeurs dans les équations (K), on aura trois équations du second ordre entre les variables r, r' et r'', dans lesquelles il n'y aura plus qu'à substituer la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$. Donc, si à l'aide d'une de ces équations on élimine la quantité $\frac{d\rho}{dt}$ des deux autres, on aura d'abord deux équations purement du second ordre entre les variables r, r', r'' et t; ensuite, si l'on différentie la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$, et qu'on mette la valeur de $\frac{d^2\rho}{dt^2}$ dans l'équation (H), on aura une troisième équation entre les mêmes variables, qui ne sera que du troisième ordre. De sorte que l'on aura, par ce moyen, pour la détermination des variables r, r' et r'', deux équations différentielles du second ordre et une du troisième; et ces équations suffiront, comme on le verra dans un moment, pour la solution complète du Problème des trois Corps.

Nous croyons cependant qu'il est encore plus simple et plus commode pour le calcul de substituer dans les équations (K) les valeurs de Q, Q′ et Q″ tirées des équations (J); car, quoique les équations résultantes puissent monter à des ordres plus élevés que le second, elles auront toujours ce grand avantage que les variables s'y trouveront peu mêlées entre elles, et que l'analogie qui y règne facilitera beaucoup leur résolution.

XIII.

Des dix équations de l'Article VIII il n'en reste donc plus que neuf, et des trois équations (D) de l'Article II, ou (O) de l'Article XI, il n'en reste plus que deux; de sorte qu'on n'aura en tout que onze équations pour la détermination des six variables x, y, z, x', y', z' et de leurs différentielles $dx, dy, \ldots$; d'où l'on voit qu'il est impossible de déterminer ces variables directement et par les seules opérations de l'Algèbre; mais on pourra en venir à bout au moyen d'une intégration, comme on va le voir.

Je suppose que l'on veuille connaître les valeurs de x, y, z; on aura d'abord l'équation

$$(\mathrm{Q}) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Ensuite, multipliant les trois équations (O) de l'Article XI respectivement par λ, μ, ν, et les ajoutant ensemble, on aura

$$\frac{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}{\mathrm{C}} + \frac{\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu'}{\mathrm{B}} + \frac{\lambda\lambda''+\mu\mu''+\nu\nu''}{\mathrm{A}} = (a\lambda + b\mu + c\nu)dt;$$

ou bien, en faisant les substitutions du même Article,

$$(\mathrm{R}) \quad \left(\frac{\Pi}{\mathrm{C}} + \frac{\Psi''}{\mathrm{B}} + \frac{\Psi'}{\mathrm{A}}\right) dt = a(y\,dx - x\,dy) + b(z\,dx - x\,dz) + c(z\,dy - y\,dz).$$

Enfin, multipliant les mêmes équations (O) respectivement par z, $-y$, x, et les ajoutant ensemble, on aura

$$\frac{\lambda z - \mu y + \nu x}{\mathrm{C}} + \frac{\lambda' z - \mu' y + \nu' x}{\mathrm{B}} + \frac{\lambda'' z - \mu'' y + \nu'' x}{\mathrm{A}} = (az - by + cx)\,dt.$$

Or il est aisé de voir que l'on a $\lambda z - \mu y + \nu x = 0$, et que

$-\lambda' z + \mu' y - \nu' x$ est la même quantité que nous avons désignée plus haut par δ (Article IX); donc, puisqu'on a déjà trouvé (Article X)

$$\delta^2 = (r^2 r'^2 - p''^2) u'^2 dt^2 - r^2 r'^2 dr'^2 + 2p'' r' dr' dV' - r'^2 dV'^2,$$

on aura, en faisant les substitutions du même Article X,

$$(\lambda' z - \mu' y + \nu' x)^2 = \left[(pp' + pp'' + p' p'') u'^2 - \frac{\Sigma'}{4} \right] dt^2,$$

et par analogie

$$(\lambda'' z - \mu'' y + \nu'' x)^2 = \left[(pp' + pp'' + p' p'') u''^2 - \frac{\Sigma''}{4} \right] dt^2.$$

De sorte que l'équation ci-dessus deviendra

$$(\mathrm{S}) \quad \frac{\frac{1}{2}\sqrt{4(pp'+pp''+p'p'')u'^2 - \Sigma'}}{\mathrm{B}} + \frac{\frac{1}{2}\sqrt{4(pp'+pp''+p'p'')u''^2 - \Sigma''}}{\mathrm{A}} = az - by + cx.$$

Ainsi on aura trois équations (Q), (R) et (S), à l'aide desquelles on pourra déterminer facilement les valeurs de x, y, z, dès qu'on connaîtra celles de r, r' et r''.

On peut trouver de semblables formules pour la détermination de x', y', z'; et même, sans faire un nouveau calcul, il suffira de changer dans les précédentes B en C et C en B, d'accentuer les lettres qui n'ont point d'accent et d'effacer l'accent de celles qui en ont un, sans toucher à celles qui ont deux accents. Il faut seulement observer que la quantité $d\rho$ ne change point de valeur, mais seulement de signe, lorsqu'on change entre elles les masses A, B, C et les lettres accentuées, ce qui se voit clairement par l'équation (H) de l'Article V.

XIV.

Supposons, pour abréger,

$$\mathrm{T} = \frac{\Pi}{\mathrm{C}} + \frac{\Psi''}{\mathrm{B}} + \frac{\Psi'}{\mathrm{A}},$$

$$\mathrm{Z} = \frac{\sqrt{4(pp' + pp'' + p'p'') u'^2 - \Sigma'}}{2\mathrm{B}} + \frac{\sqrt{4(pp' + pp'' + p'p'') u''^2 - \Sigma''}}{2\mathrm{A}},$$

et l'on aura ces trois équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$
$$az - by + cx = Z,$$
$$a(ydx - xdy) + b(zdx - xdz) + c(zdy - ydz) = T\,dt.$$

Comme les constantes a, b, c sont arbitraires (Article II) et ne dépendent que de la position du plan de projection des orbites des Corps B et C autour du Corps A, il est facile de voir qu'on peut prendre ce plan de manière que l'on ait $b = 0$ et $c = 0$; car pour cela il suffira qu'on ait $b = 0$ et $c = 0$ au commencement du mouvement, c'est-à-dire, lorsque $t = 0$.

Supposant donc $b = 0$ et $c = 0$, on aura

$$az = Z, \quad a(ydx - xdy) = T\,dt;$$

donc

$$z = \frac{Z}{a},$$

et, à cause de $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, on aura

$$x^2 + y^2 = r^2 - \frac{Z^2}{a^2};$$

donc

$$\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \frac{aT\,dt}{a^2r^2 - Z^2};$$

de sorte qu'en faisant

$$d\varphi = \frac{aT\,dt}{a^2r^2 - Z^2},$$

on aura

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\varphi,$$

et de là

$$z = \frac{Z}{a}, \quad y = \sqrt{r^2 - \frac{Z^2}{a^2}}\sin\varphi, \quad x = \sqrt{r^2 - \frac{Z^2}{a^2}}\cos\varphi.$$

XV.

Mais si l'on ne veut pas s'astreindre à la supposition de $b=0$ et $c=0$, ce qui oblige de prendre le plan de projection d'une manière déterminée, voici comment on pourra déterminer les quantités x, y, z avec toute la généralité possible.

Soient

$$lz - my + nx = X, \quad \lambda z - \mu y + \nu x = Y,$$

l, m, n, λ, μ, ν étant des coefficients indéterminés, et X, Y deux nouvelles variables; on aura

$$YdX - XdY = (m\nu - n\mu)(y\,dx - x\,dy) + (n\lambda - l\nu)(z\,dx - x\,dz) + (l\mu - m\lambda)(z\,dy - y\,dz);$$

donc, faisant

$$m\nu - n\mu = ka, \quad n\lambda - l\nu = kb, \quad l\mu - m\lambda = kc,$$

on aura l'équation (Article XIV)

$$YdX - XdY = kT\,dt.$$

Supposons maintenant que l'on ait

$$f(X^2 + Y^2) + gZ^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

substituant les valeurs de X, Y et Z en x, y et z, et comparant ensuite les termes qui contiennent les mêmes puissances de x, y et z, on aura ces six équations

$$\begin{aligned} &f(l^2 + \lambda^2) + ga^2 = 1, \quad && f(lm + \lambda\mu) + gab = 0, \\ &f(m^2 + \mu^2) + gb^2 = 1, && f(ln + \lambda\nu) + gac = 0, \\ &f(n^2 + \nu^2) + gc^2 = 1, && f(mn + \mu\nu) + gbc = 0, \end{aligned}$$

lesquelles, étant combinées avec les trois précédentes, serviront à déterminer les neuf inconnues l, m, n, λ, μ, ν, f, g, k.

XVI.

Cela fait, on aura donc, à cause de $x^2+y^2+z^2=r^2$, l'équation

$$f(X^2+Y^2)+gZ^2=r^2,$$

d'où

$$f(X^2+Y^2)=r^2-gZ^2;$$

donc

$$\frac{Y\,dX-X\,dY}{X^2+Y^2}=\frac{fkT\,dt}{r^2-gZ^2}.$$

Donc, si l'on fait

$$d\varphi=\frac{fkT\,dt}{r^2-gZ^2},$$

on aura

$$Y=\sqrt{\frac{r^2-gZ^2}{f}}\sin\varphi,\qquad X=\sqrt{\frac{r^2-gZ^2}{f}}\cos\varphi.$$

Ainsi l'on connaîtra les trois quantités X, Y, Z, à l'aide desquelles on pourra déterminer x, y, z.

Pour cela, on prendra les trois équations

$$lz-my+nx=X,\quad \lambda z-\mu y+\nu x=Y,\quad az-by+cx=Z,$$

et on les ajoutera ensemble après les avoir multipliées respectivement : 1° par $fl, f\lambda, ga$; 2° par $fm, f\mu, gb$; 3° par $fn, f\nu, gc$; on aura sur-le-champ, en vertu des équations de l'Article précédent,

$$z=f(lX+\lambda Y)+gaZ,\quad y=-f(mX+\mu Y)-gbZ,\quad x=f(nX+\nu Y)+gcZ.$$

XVII.

Maintenant, comme on a supposé

$$x^2+y^2+z^2=f(X^2+Y^2)+gZ^2,$$

on aura, en substituant les valeurs de x, y, z qu'on vient de trouver, et comparant les termes homogènes,

$$f(l^2+m^2+n^2)=1, \qquad l\lambda+m\mu+n\nu=0,$$
$$f(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)=1, \qquad la+mb+nc=0,$$
$$g(a^2+b^2+c^2)=1, \qquad \lambda a+\mu b+\nu c=0,$$

et ces équations devront être identiques avec les six qu'on a trouvées ci-dessus (Article XV), et pourront par conséquent être employées à la place de celles-là pour la détermination des inconnues l, m,....

Or, comme il faut satisfaire en même temps à ces trois autres équations (Article XV)

$$m\nu-n\mu=ka, \quad n\lambda-l\nu=kb, \quad l\mu-m\lambda=kc,$$

je remarque que, si l'on ajoute ensemble ces dernières équations après les avoir multipliées respectivement : 1° par l, m, n; 2° par λ, μ, ν, on aura ces deux-ci

$$k(la+mb+nc)=0, \quad k(\lambda a+\mu b+\nu c)=0,$$

lesquelles s'accordent avec la cinquième et la sixième des précédentes; ainsi l'on peut déjà réduire à une seule les trois équations dont il s'agit, et l'on y satisfera par la détermination de l'inconnue k. Or, si l'on ajoute ensemble les carrés de ces équations, on aura

$$\begin{aligned}k^2(a^2+b^2+c^2)&=(m\nu-n\mu)^2+(n\lambda-l\nu)^2+(l\mu-m\lambda)^2\\&=(l^2+m^2+n^2)(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)-(l\lambda+m\mu+n\nu)^2=\frac{1}{f^2}\end{aligned}$$

en vertu des six équations ci-dessus; de sorte qu'on aura

$$k=\frac{1}{f\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Donc il n'y aura plus qu'à satisfaire aux six équations trouvées plus haut : c'est ce qu'on pourra exécuter de plusieurs manières à cause qu'il y a plus d'indéterminées que d'équations.

On aura d'abord

$$g = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2};$$

ensuite, si l'on chasse λ des deux équations

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0, \quad \lambda a + \mu b + \nu c = 0,$$

on aura

$$(am - bl)\mu + (an - cl)\nu = 0,$$

et, chassant μ, on aura de même

$$(bl - am)\lambda + (bn - cm)\nu = 0,$$

d'où je conclus qu'on aura

$$\lambda = (cm - bn)\delta, \quad \mu = (an - cl)\delta, \quad \nu = (bl - am)\delta,$$

δ étant une inconnue qu'on déterminera par l'équation

$$f(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = 1,$$

laquelle donnera

$$f\delta^2[(cm - bn)^2 + (an - cl)^2 + (bl - am)^2] = 1;$$

mais on a

$$(cm-bn)^2+(an-cl)^2+(bl-am)^2=(a^2+b^2+c^2)(l^2+m^2+n^2)-(al+bm+cn)^2=\frac{1}{fg},$$

à cause de

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{g}, \quad l^2 + m^2 + n^2 = \frac{1}{f}, \quad al + bm + cn = 0$$

par les équations ci-dessus; donc on aura

$$\frac{\delta^2}{g} = 1, \quad \delta = \sqrt{g} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c}},$$

et il ne restera qu'à satisfaire à ces deux équations

$$f(l^2+m^2+n^2)=1, \quad la+mb+nc=0.$$

Supposons, pour plus de simplicité,

$$a=h\cos\alpha, \quad b=h\sin\alpha\cos\varepsilon, \quad c=h\sin\alpha\sin\varepsilon;$$

on aura

$$\delta=\sqrt{g}=\frac{1}{h},$$

de sorte que

$$h=\sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

et la seconde des deux équations précédentes deviendra

$$l\cos\alpha+\sin\alpha(m\cos\varepsilon+n\sin\varepsilon)=0;$$

soit donc

$$l=\sin\alpha\sin\eta,$$

et l'on aura, en faisant pour plus de simplicité $f=1$,

$$\sin^2\alpha\sin^2\eta+m^2+n^2=1, \quad \cos\alpha\sin\eta+m\cos\varepsilon+n\sin\varepsilon=0.$$

Donc

$$m\cos\varepsilon+n\sin\varepsilon=-\cos\alpha\sin\eta;$$

donc

$$\begin{aligned} m^2+n^2-(m\cos\varepsilon+n\sin\varepsilon)^2 &= (m\sin\varepsilon-n\cos\varepsilon)^2 \\ &= 1-\sin^2\alpha\sin^2\eta-\cos^2\alpha\sin^2\eta=1-\sin^2\eta=\cos^2\eta; \end{aligned}$$

et, tirant la racine carrée,

$$m\sin\varepsilon-n\cos\varepsilon=\cos\eta;$$

de sorte qu'on aura

$$m=\sin\varepsilon\cos\eta-\cos\alpha\cos\varepsilon\sin\eta,$$

$$n=-\cos\varepsilon\cos\eta-\cos\alpha\sin\varepsilon\sin\eta;$$

et de là on trouvera les valeurs de λ, μ, ν par les formules précédentes.

On aura de cette manière

$$
\begin{aligned}
l &= \sin\alpha \sin\eta,\\
m &= \sin\varepsilon \cos\eta - \cos\alpha \cos\varepsilon \sin\eta,\\
n &= -\cos\varepsilon \cos\eta - \cos\alpha \sin\varepsilon \sin\eta,\\
\lambda &= \sin\alpha \cos\eta,\\
\mu &= -\sin\varepsilon \sin\eta - \cos\alpha \cos\varepsilon \cos\eta,\\
\nu &= \cos\varepsilon \sin\eta - \cos\alpha \sin\varepsilon \cos\eta.
\end{aligned}
$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les expressions de x, y et z de l'Article XVI, il est facile de voir que les quantités X, Y et $\frac{Z}{h}$ ne sont autre chose que les coordonnées rectangles de la même courbe, qui est représentée par les coordonnées x, y, z, mais rapportée à un autre plan de projection, dont la position dépend des angles α, ε et η. En effet, si l'on considère les deux plans des coordonnées x, y, et des coordonnées X, Y, l'angle α sera celui de l'inclinaison de ces deux plans, l'angle η sera celui que la ligne d'interjection de ces plans fait avec l'axe des abscisses x, et l'angle ε sera celui que l'axe des abscisses X comprend avec la même ligne d'intersection. Or, comme l'expression des coordonnées X, Y et $\frac{Z}{h}$ est plus simple que celle des coordonnées x, y, z, il est clair que le plan de projection auquel appartiennent les coordonnées X, Y et $\frac{Z}{h}$ est plus propre que tout autre plan pour y rapporter les mouvements des trois Corps, ou plutôt le mouvement relatif de deux de ces Corps autour du troisième.

On voit donc que la position du plan de projection n'est point du tout indifférente, et que, parmi tous les plans possibles qu'on peut faire passer par le Corps A, il y en a un qui doit être choisi de préférence, parce que les mouvements des Corps B et C autour de A sont par rapport à ce plan les plus simples qu'il est possible.

Cette remarque, qui me paraît de quelque importance dans le Problème des trois Corps, n'avait pas encore été faite, parce que personne, que je sache, n'avait jusqu'à présent envisagé ce Problème d'une manière aussi générale que nous venons de le faire.

XVIII.

Nous prendrons donc, à la place des coordonnées x, y, z, celles-ci X, Y, $\frac{Z}{h}$, pour représenter le mouvement du Corps B autour de A; et comme l'on a, à cause de $h = \frac{1}{\sqrt{g}}$ (Article XV),

$$X^2 + Y^2 + \left(\frac{Z}{h}\right)^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

$$Y = \sqrt{r^2 - \left(\frac{Z}{h}\right)^2} \sin\varphi, \quad X = \sqrt{r^2 - \left(\frac{Z}{h}\right)^2} \cos\varphi,$$

il est clair que φ sera l'angle décrit par le Corps B autour de A dans le plan de projection, c'est-à-dire, la longitude du Corps B dans ce même plan; et que $\frac{Z}{hr}$ sera le sinus de la latitude. Ainsi on aura (Article XVI), à cause de $f = 1$,

$$k = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{h}.$$

Pour le Corps B :

Rayon recteur de l'orbite .... r,

Longitude .... $\int \frac{T\,dt}{h\left[r^2 - \left(\frac{Z}{h}\right)^2\right]}$,

Sinus de la latitude .... $\frac{Z}{hr}$.

Pour le Corps C :

Rayon recteur de l'orbite .... r',

Longitude .... $\int \frac{T'\,dt}{h\left[r'^2 - \left(\frac{Z'}{h}\right)^2\right]}$,

Sinus de la latitude .... $\frac{Z'}{hr'}$.

Les valeurs de T et de Z sont données par les formules de l'Article XIV, et pour avoir celles de T′ et Z′ il n'y aura qu'à changer dans celles-là l'accent zéro en ′ et ′ en zéro, et ensuite B en C et C en B.

Quant à la quantité h, c'est une constante arbitraire qui dépend du mouvement initial des Corps; mais il faudra la prendre telle, qu'elle s'accorde avec l'équation (P) de l'Article XI, dans laquelle le second membre est

$$a^2 + b^2 + c^2 = h^2;$$

de sorte qu'il n'y aura qu'à prendre pour h la racine carrée de la valeur du premier membre de cette équation lorsqu'on y fait $t = 0$.

XIX.

Les formules que nous venons de trouver servent à déterminer les orbites des Corps B et C autour du Corps A par rapport à un plan fixe passant par ce même Corps; mais il faut voir encore comment on peut déterminer, par leur moyen, la position mutuelle de ces orbites. Pour cela, nous commencerons par remarquer que si l'on considère le triangle formé à chaque instant par les trois Corps A, B, C, et dont les trois côtés sont r, r' et r'', et qu'on nomme ζ, ζ', ζ'' les trois angles opposés à ces côtés, on aura, comme on le sait, par la Géométrie élémentaire,

$$\cos\zeta = \frac{r'^2 + r''^2 - r^2}{2r'r''} = \frac{p}{r'r''},$$

$$\cos\zeta' = \frac{r^2 + r''^2 - r'^2}{2rr''} = \frac{p'}{rr''},$$

$$\cos\zeta'' = \frac{r^2 + r'^2 - r''^2}{2rr'} = \frac{p''}{rr'}.$$

Or on a (Article VIII)

$$p'' = xx' + yy' + zz';$$

donc

$$\cos\zeta'' = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'},$$

ζ'' étant l'angle formé au centre du Corps A par les rayons recteurs r et r' des deux autres corps B et C.

Qu'on imagine maintenant deux plans passant, l'un par le Corps A et par les deux points infiniment proches dans lesquels s'est trouvé le Corps B au commencement et à la fin du temps infiniment petit dt, et l'autre par le même Corps A, et par les deux points infiniment proches où le Corps C était au commencement et à la fin du même temps dt; ces deux plans seront ceux des orbites des Corps B et C autour de A, et ils se couperont nécessairement dans une ligne droite passant par le Corps A, laquelle sera donc la ligne des nœuds des deux orbites.

Soit ω l'inclinaison de ces deux plans l'un à l'autre, ξ la distance du Corps B à l'intersection des deux plans ou à la ligne des nœuds, c'est-à-dire, l'angle compris entre le rayon r et la ligne des nœuds, et ξ' la distance du Corps C à la même ligne des nœuds, c'est-à-dire, l'angle formé par le rayon r' et la ligne des nœuds; si l'on imagine une sphère décrite autour de A comme centre, et que par les points où les deux rayons r, r' et la ligne des nœuds traversent la surface de cette sphère, dont nous supposerons le rayon égal à 1, on mène des arcs de grands cercles, on aura un triangle sphérique dont les trois côtés seront ξ, ξ' et ζ'', et dont l'angle opposé au côté ζ'' sera ω; de sorte qu'on aura, par les formules connues,

$$\cos\zeta'' = \cos\xi\cos\xi' + \sin\xi\sin\xi'\cos\omega;$$

donc

$$\cos\xi\cos\xi' + \sin\xi\sin\xi'\cos\omega = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}.$$

Supposons maintenant que pendant le temps dt le Corps B décrive autour de A l'angle infiniment petit $d\theta$, et que le Corps C décrive l'angle $d\theta'$, il est clair que, tandis que les lignes x, y, z, r croissent de leurs différentielles dx, dy, dz, dr, l'angle ξ croîtra de $d\theta$, et l'angle ω demeurera le même, parce qu'on suppose que la position des plans des orbites des Corps B et C est la même au commencement et à la fin de l'instant dt; de même, en faisant croître les lignes x', y', z', r' de leurs différentielles dx', dy', dz', dr', il n'y aura que l'angle ξ' qui variera en croissant de $d\theta'$. Or, comme l'équation précédente doit être identique et indépendante de la loi des mouvements des Corps B et C, il est clair qu'on pourra y faire varier les quantités x, y, z, r et ξ qui appartiennent au Corps B indépendamment des quantités x', y', z', r' et Z' qui appartiennent au Corps C, et *vice versâ* celles-ci indépendamment de celles-là; d'où il suit qu'en faisant varier d'abord x, y, z, r et ξ, ensuite x', y', z', r' et ξ', enfin les unes et les autres en même temps, on tirera de l'équation dont il s'agit les trois suivantes

$$(-\sin\xi\cos\xi' + \cos\xi\sin\xi'\cos\omega)\,d\theta = -\frac{(xx'+yy'+zz')\,dr}{r^2 r'} + \frac{x'dx+y'dy+z'dz}{rr'},$$

$$(-\cos\xi\sin\xi' + \sin\xi\cos\xi'\cos\omega)\,d\theta' = -\frac{(xx'+yy'+zz')\,dr'}{rr'^2} + \frac{x\,dx'+y\,dy'+z\,dz'}{rr'},$$

$$\begin{aligned}(\sin\xi\sin\xi' + \cos\xi\cos\xi'\cos\omega)\,d\theta\,d\theta' &= \frac{(xx'+yy'+zz')\,dr\,dr'}{r^2 r'^2} - \frac{(x'dx+y'dy+z'dz)\,dr'}{rr'^2} \\ &\quad - \frac{(x\,dx'+y\,dy'+z\,dz')\,dr}{r^2 r'} + \frac{dx\,dx'+dy\,dy'+dz\,dz'}{rr'}.\end{aligned}$$

Donc, si l'on fait dans toutes ces équations les substitutions de l'Article VIII, on aura ces quatre-ci

$$\cos\xi\cos\xi' + \sin\xi\sin\xi'\cos\omega = \frac{p''}{rr'},$$

$$-\sin\xi\cos\xi' + \cos\xi\sin\xi'\cos\omega = -\frac{p''\,dr + r\,dV}{r^2 r'\,d\theta},$$

$$-\cos\xi\sin\xi' + \sin\xi\cos\xi'\cos\omega = -\frac{p''\,dr' + r'\,dV'}{rr'^2\,d\theta},$$

$$\sin\xi\sin\xi' + \cos\xi\cos\xi'\cos\omega = \frac{p''\,dr\,dr' - dV.\,r\,dr' - dV'.\,r'\,dr + rr'v''\,dt^2}{r^2 r'^2\,d\theta\,d\theta'}.$$

Or il est facile de concevoir que le carré du petit espace que parcourt le Corps B dans le temps dt est exprimé également par $dx^2 + dy^2 + dz^2$ et par $r^2\,d\theta^2 + dr^2$, de sorte qu'on aura

$$r\,d\theta = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 - dr^2}$$

et par conséquent (Articles VIII et XI)

$$d\theta = \frac{\sqrt{u^2dt^2 - dr^2}}{r} = \frac{dt\sqrt{\Pi}}{r^2},$$

et de même

$$d\theta' = \frac{\sqrt{u'^2 dt^2 - dr'^2}}{r'} = \frac{dt\sqrt{\Pi'}}{r'^2}.$$

Ainsi les seconds membres des quatre équations précédentes seront tous donnés, dès qu'on connaîtra r, r' et r'' en t (Article cité); de sorte qu'on aura quatre équations entre les trois inconnues ξ, ξ' et ω, par lesquelles on pourra non-seulement déterminer ces trois inconnues, mais encore avoir une équation entre les quantités r, r', r'', u, u',..., et cette équation sera la même que celle qu'on a déjà trouvée plus haut (Article X) par une voie bien différente.

XX.

Supposons, pour abréger, que les équations précédentes soient représentées ainsi

$$\cos\xi\cos\xi' + \sin\xi\sin\xi'\cos\omega = \lambda,$$
$$\sin\xi\cos\xi' - \cos\xi\sin\xi'\cos\omega = \mu,$$
$$\cos\xi\sin\xi' - \sin\xi\cos\xi'\cos\omega = \nu,$$
$$\sin\xi\sin\xi' + \cos\xi\cos\xi'\cos\omega = -\varpi,$$

en faisant

$$\lambda = \frac{p''}{rr'}, \quad \mu = \frac{p''dr + r\,d\text{V}}{r^2 r' d\theta}, \quad \nu = \frac{p''dr' + r'd\text{V}'}{rr'^2 d\theta'},$$
$$\varpi = \frac{-p''dr\,dr' + d\text{V}.r\,dr' + d\text{V}'.r'dr - rr'v''dt^2}{r^2 r'^2 d\theta\, d\theta'};$$

il est facile de réduire ces quatre équations à ces deux-ci

$$\cos(\xi \pm \xi')(1 \mp \cos\omega) = \lambda \pm \varpi,$$
$$\sin(\xi \pm \xi')(1 \mp \cos\omega) = \mu \pm \nu,$$

lesquelles, à cause de l'ambiguïté des signes, équivalent réellement à quatre équations. Élevant ces deux équations au carré, et ensuite les ajoutant ensemble, on a

$$(1 \mp \cos\omega)^2 = (\lambda \pm \varpi)^2 + (\mu \pm \nu)^2,$$

d'où, à cause de l'ambiguïté des signes, on tire

$$-\cos\omega = \lambda\varpi + \mu\nu, \qquad 1 + \cos^2\omega = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \varpi^2;$$

de sorte qu'éliminant $\cos\omega$ on aura

$$1 + (\lambda\varpi + \mu\nu)^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \varpi^2.$$

Si l'on substitue dans cette équation les valeurs de λ, μ, ν, ϖ, comme aussi celles de $d\theta$ et de $d\theta'$, on aura une équation qui sera la même que l'équation (N) de l'Article X; ce qui peut servir à confirmer la bonté de nos calculs.

L'équation

$$-\cos\omega = \lambda\varpi + \mu\nu$$

donnera

$$\cos\omega = \frac{p''v''dt^2 - dV\,dV'}{r^2 r'^2 d\theta\, d\theta'} = \frac{\Psi''}{\sqrt{\Pi\Pi'}},$$

ce qui fera connaître l'inclinaison ω des deux orbites.

Connaissant ω, on connaîtra aisément ξ et ξ'; car, en multipliant les deux équations

$$\cos(\xi + \xi')(1 - \cos\omega) = \lambda + \varpi,$$
$$\cos(\xi - \xi')(1 + \cos\omega) = \lambda - \varpi$$

l'une par l'autre, on aura celle-ci

$$\tfrac{1}{2}(\cos 2\xi + \cos 2\xi')\sin^2\omega = \lambda^2 - \varpi^2;$$

et de même les deux autres équations

$$\sin(\xi + \xi')(1 - \cos\omega) = \mu + \nu, \qquad \sin(\xi - \xi')(1 + \cos\omega) = \mu - \nu,$$

étant multipliées ensemble, donneront

$$-\tfrac{1}{2}(\cos 2\xi - \cos 2\xi')\sin^2\omega = \mu^2 - \nu^2,$$

d'où l'on tire

$$\cos 2\xi = \frac{\lambda^2 - \varpi^2 - \mu^2 + \nu^2}{\sin^2\omega}, \qquad \cos 2\xi' = \frac{\lambda^2 - \varpi^2 + \mu^2 - \nu^2}{\sin^2\omega},$$

ou bien, en mettant à la place de ϖ^2 sa valeur

$$1 + \cos^2\omega - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2,$$

tirée de l'équation trouvée ci-dessus, on aura, à cause de $\cos^2\omega = 1 - \sin^2\omega$,

$$\cos 2\xi = 1 + \frac{2(\lambda^2 + \nu^2 - 1)}{\sin^2\omega}, \quad \cos 2\xi' = 1 + \frac{2(\lambda^2 + \mu^2 - 1)}{\sin^2\omega},$$

d'où l'on tire

$$\sin\xi = \frac{\sqrt{1 - \lambda^2 - \nu^2}}{\sin\omega}, \quad \sin\xi' = \frac{\sqrt{1 - \lambda^2 - \mu^2}}{\sin\omega};$$

c'est-à-dire, en substituant les valeurs de λ, μ, ν, et faisant attention que $r^2 d\theta^2 = u^2 dt^2 - dr^2$ et $r'^2 d\theta'^2 = u'^2 dt^2 - dr'^2$,

$$\sin\xi = \frac{\sqrt{(r^2 r'^2 - p''^2)\, u'^2 dt^2 - r^2(r'dr')^2 + 2p''(r'dr')\, dV' - r'^2 dV'^2}}{rr'^2 \sin\omega\, d\theta'},$$

$$\sin\xi' = \frac{\sqrt{(r^2 r'^2 - p''^2)\, u^2 dt^2 - r'^2(rdr)^2 + 2p''(rdr)\, dV - r^2 dV^2}}{r'r^2 \sin\omega\, d\theta},$$

ou bien (Article XIII)

$$\sin\xi = \frac{\sqrt{4(pp' + pp'' + p'p'')\, u'^2 - \Sigma'}}{2r\sqrt{\Pi'}\sin\omega},$$

$$\sin\xi' = \frac{\sqrt{4(pp' + pp'' + p'p'')\, u^2 - \Sigma}}{2r'\sqrt{\Pi}\sin\omega}.$$

XXI.

Si l'on veut que les trois Corps se meuvent dans un même plan, on aura alors $\omega = 0$, et par conséquent $\cos\omega = 1$ et $\sin\omega = 0$; donc

$$\Sigma = 4(pp' + pp'' + p'p'')\, u^2, \quad \Sigma' = 4(pp' + pp'' + p'p'')\, u'^2,$$

et par analogie

$$\Sigma'' = 4(pp' + pp'' + p'p'')\, u''^2.$$

De sorte que les quantités Z et Z' (Article XIV) seront nulles, et par conséquent les mouvements des trois Corps s'exécuteront dans le même plan que nous avons pris pour le plan de projection (Article XVIII). Or, si l'on substitue les valeurs de u^2, u'^2, u''^2 tirées des équations précédentes dans l'équation (P) de l'Article XI, on aura une équation en r, r', r'' et $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dr'}{dt}$, $\frac{d\rho}{dt}$, par laquelle on pourra déterminer cette dernière quantité $\frac{d\rho}{dt}$; substituant ensuite la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$ dans celles de Σ, Σ', Σ'', on aura les valeurs de u^2, u'^2, u''^2 exprimées en r, r', r'' et $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dr'}{dt}$, $\frac{dr''}{dt^2}$ seulement; ainsi, mettant ces valeurs de u^2, u'^2, u''^2 dans les équations (F) de l'Article III, on aura enfin trois équations en r, r', r'' et t, lesquelles seront simplement différentielles du second ordre, au lieu que les équations générales (K) de l'Article V montent au quatrième ordre, lorsqu'on les délivre des signes d'intégration.

Au reste je crois que, dans le cas même dont il s'agit, ces dernières équations seront toujours préférables, parce qu'elles ont l'avantage singulier de ne renfermer aucun radical, ce qui n'aurait point lieu dans les équations où l'on emploierait les valeurs de u, u', u'' déterminées par les équations ci-dessus, valeurs qui renfermeraient nécessairement des radicaux carrés.

RÉCAPITULATION.

XXII.

Pour résumer ce qui vient d'être démontré dans ce Chapitre, soient nommées : A, B, C les masses des trois Corps; r, r', r'' les distances entre les Corps A et B, A et C, B et C; et supposant, pour abréger,

$$p = \frac{r'^2 + r''^2 - r^2}{2}, \quad p' = \frac{r^2 + r''^2 - r'^2}{2}, \quad p'' = \frac{r^2 + r'^2 - r''^2}{2},$$

$$q = \frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r''^3}, \quad q' = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r''^3}, \quad q'' = \frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3} = q - q',$$

on aura, en prenant l'élément du temps dt pour constant,

$$\text{(H)} \qquad \frac{d^2\rho}{dt^2} + Cpq - Bp'q' - Ap''q'' = 0;$$

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} dQ = q'\,dp' - q''dp'' - q\,d\rho, \\ dQ' = q\,dp + q''dp'' + q'd\rho, \\ dQ'' = -q\,dp - q'\,dp' + q''d\rho; \end{cases}$$

$$\text{(K)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2(r^2)}{2\,dt^2} - \dfrac{A+B+C}{r} - C(p'q' - p''q'' + Q) = 0, \\ \dfrac{d^2(r'^2)}{2\,dt^2} - \dfrac{A+B+C}{r'} - B\,(pq + p''q'' + Q') = 0, \\ \dfrac{d^2(r''^2)}{2\,dt^2} - \dfrac{A+B+C}{r''} - A(-pq - p'q' + Q'') = 0. \end{cases}$$

Ces équations serviront à déterminer les valeurs des distances r, r', r'' en t; après quoi on pourra trouver directement et sans aucune intégration les valeurs de tous les autres éléments, d'où dépend la détermination des orbites des Corps B et C autour du Corps A.

En effet, si l'on nomme

$$\left.\begin{matrix} u, \\ u', \\ u'', \end{matrix}\right\} \text{ la vitesse du Corps } \left\{\begin{matrix} B, \\ C, \\ C, \end{matrix}\right. \text{ autour de } \left\{\begin{matrix} A, \\ A, \\ B, \end{matrix}\right.$$

on aura d'abord

$$\text{(J)} \qquad \begin{cases} u^2 = \dfrac{2(A+B+C)}{r} + CQ, \\ u'^2 = \dfrac{2(A+B+C)}{r'} + BQ', \\ u''^2 = \dfrac{2(A+B+C)}{r''} + AQ''. \end{cases}$$

Si l'on nomme ensuite

φ l'angle parcouru par le Corps B autour de A dans un plan supposé fixe et passant par A, c'est-à-dire, la longitude de B,

ψ l'angle de la latitude de B par rapport à ce même plan,
φ' la longitude de C,
ψ' sa latitude,

et qu'on fasse, pour abréger,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} &= pp' + pp'' + p'p'' = r^2 r'^2 - p''^2 = \tfrac{1}{4}(2r^2r'^2 + 2r^2r''^2 + 2r'^2r''^2 - r^4 - r'^4 - r''^4)\\
&= -\tfrac{1}{4}(r + r' + r'')(r + r' - r'')(r - r' + r'')(r - r' - r''),
\end{aligned}$$

$$\Sigma = p\left(\frac{d(r^2)}{dt}\right)^2 + p'\left(\frac{dp''}{dt}\right)^2 + p''\left(\frac{dp'}{dt}\right)^2 - 2\left(p''\frac{dp'}{dt} - p'\frac{dp''}{dt}\right)\frac{d\rho}{dt} + r^2\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2,$$

$$\Sigma' = p'\left(\frac{d(r'^2)}{dt}\right)^2 + p\left(\frac{dp''}{dt}\right)^2 + p''\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + 2\left(p''\frac{dp}{dt} - p\frac{dp''}{dt}\right)\frac{d\rho}{dt} + r'^2\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2,$$

$$\Sigma'' = p''\left(\frac{d(r''^2)}{dt}\right)^2 + p'\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + p\left(\frac{dp'}{dt}\right)^2 + 2\left(p\frac{dp'}{dt} - p'\frac{dp}{dt}\right)\frac{d\rho}{dt} + r''^2\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2,$$

$$\Pi = r^2u^2 - \left(\frac{d(r^2)}{2dt}\right)^2,$$

$$\Pi' = r'^2u'^2 - \left(\frac{d(r'^2)}{2dt}\right)^2,$$

$$\Pi'' = r''^2u''^2 - \left(\frac{d(r''^2)}{2dt}\right)^2,$$

$$\Psi = pv - \left(\frac{dp}{2dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{2dt}\right)^2,$$

$$\Psi' = p'v' - \left(\frac{dp'}{2dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{2dt}\right)^2,$$

$$\Psi'' = p''v'' - \left(\frac{dp''}{2dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{2dt}\right)^2,$$

en supposant

$$v = \frac{u'^2 + u''^2 - u^2}{2},\qquad v' = \frac{u^2 + u''^2 - u'^2}{2},\qquad v'' = \frac{u^2 + u'^2 - u''^2}{2},$$

on aura sur-le-champ

$$\sin\psi = \frac{\frac{1}{\mathrm{B}}\sqrt{4\mathrm{P}u'^2 - \Sigma'} + \frac{1}{\mathrm{A}}\sqrt{4\mathrm{P}u''^2 - \Sigma''}}{2hr},\qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\frac{\Pi}{\mathrm{C}} + \frac{\Psi'}{\mathrm{A}} + \frac{\Psi''}{\mathrm{B}}}{hr^2\cos^2\psi},$$

et

$$\sin\psi' = \frac{\frac{1}{C}\sqrt{4Pu^2-\Sigma} + \frac{1}{A}\sqrt{4Pu''^2-\Sigma''}}{2hr'}, \quad \frac{d\varphi'}{dt} = \frac{\frac{\Pi'}{B} + \frac{\Psi}{A} + \frac{\Psi''}{C}}{hr'^2\cos^2\psi'}.$$

Il faut remarquer que ces formules renferment deux constantes qui ne sont pas arbitraires, mais qui doivent être déterminées par des équations particulières; ce sont : l'une la constante h, et l'autre la constante qui peut être ajoutée à la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$ déduite de l'équation (H) par la voie de l'intégration.

Voici donc les équations qui serviront à déterminer ces constantes

$$\text{(N)}\qquad 16PU - 4(\Sigma v + \Sigma' v' + \Sigma'' v'') + \left(\frac{dp\,dp' + dp\,dp'' + dp'\,dp'' + d\rho^2}{dt^2}\right)^2 = 0,$$

en supposant

$$U = vv' + vv'' + v'v'' = u^2u'^2 - v''^2 = \tfrac{1}{4}(2u^2u'^2 + 2u^2u''^2 + 2u'^2u''^2 - u^4 - u'^4 - u''^4)$$

et

$$\text{(P)}\qquad \frac{\Pi}{C^2} + \frac{\Pi'}{B^2} + \frac{\Pi''}{A^2} + 2\left(\frac{\Psi}{AB} + \frac{\Psi'}{AC} + \frac{\Psi''}{BC}\right) = h^2.$$

On pourrait, si l'on voulait, employer ces équations à la place de deux quelconques des équations (K); mais, comme elles sont assez compliquées, il vaudra mieux ne s'en servir que dans la détermination des constantes dont il s'agit; et pour cela il est clair qu'on y pourra supposer partout $t = 0$.

Or si, pour plus de simplicité, on suppose que, lorsque $t = 0$, on ait $\frac{dr}{dt} = 0$, $\frac{dr'}{dt} = 0$, et que de plus les rayons r, r' coïncident, en sorte que l'angle ζ'' compris entre ces rayons (Article XIX) soit nul, ce qui est toujours permis lorsque cet angle est variable, on aura, à cause de $r''^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\zeta''$ (Article cité),

$$r''^2 = (r' - r)^2, \quad \frac{dp''}{dt} = 0;$$

donc

$$\frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{dp'}{dt} = 0, \quad \frac{dp''}{dt} = 0;$$

de sorte que l'équation (N) deviendra

$$16\,\mathrm{PU} - 4(r^2v + r'^2v' + r''^2v'')\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^4 = 0;$$

mais à cause de $r''^2 = (r'-r)^2$ on aura $\mathrm{P}=0$; donc aussi $\frac{d\rho}{dt} = 0$. Ainsi il faudra prendre la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$, en sorte qu'elle devienne nulle lorsque $t = 0$ (*).

L'équation (P) se simplifiera aussi beaucoup par les mêmes suppositions, et elle deviendra

$$(\mathrm{P}') \qquad h^2 = \frac{r^2u^2}{\mathrm{C}^2} + \frac{r'^2u'^2}{\mathrm{B}^2} + \frac{r''^2u''^2}{\mathrm{A}^2} + 2\left(\frac{pv}{\mathrm{AB}} + \frac{p'v'}{\mathrm{AC}} + \frac{p''v''}{\mathrm{BC}}\right),$$

où il faudra prendre pour r, r', r'', u, u', u'' les valeurs qui répondent à $t = 0$.

Quant aux constantes qui pourront entrer dans les valeurs de Q, Q' et Q'', elles seront entièrement arbitraires et ne dépendront que des valeurs initiales de u, u', u'', qui sont à volonté.

Enfin, si l'on nomme encore

$d\theta$ l'angle élémentaire décrit par le Corps B autour du Corps A dans l'instant dt,

$d\theta'$ l'angle correspondant décrit par le corps C autour de A,

ω l'inclinaison mutuelle des orbites des Corps B et C autour de A,

ξ la distance du Corps B au nœud de ces deux orbites,

ξ' la distance du Corps C au même nœud,

on aura

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{\Pi}}{r^2}, \quad \frac{d\theta'}{dt} = \frac{\sqrt{\Pi'}}{r'^2},$$

$$\cos\omega = \frac{\Psi''}{\sqrt{\Pi\Pi'}}, \quad \sin\xi = \frac{\sqrt{4\mathrm{P}u'^2 - \Sigma'}}{2r\sin\omega\sqrt{\Pi'}}, \quad \sin\xi' = \frac{\sqrt{4\mathrm{P}u^2 - \Sigma}}{2r'\sin\omega\sqrt{\Pi}}.$$

(*) Il faut remarquer que, dans le cas dont il s'agit ici, l'équation (N) est encore satisfaite si l'on prend

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = 4(r^2v + r'^2v' + r''^2v'').$$

(*Note de l'Éditeur.*)

CHAPITRE II.

SOLUTION DU PROBLÈME DES TROIS CORPS DANS DIFFÉRENTS CAS.

XXIII.

Nous allons examiner dans ce Chapitre quelques cas particuliers, où le Problème des trois Corps se simplifie beaucoup et admet une solution exacte ou presque exacte; quoique ces cas n'aient pas lieu dans le Système du monde, nous croyons cependant qu'ils méritent l'attention des Géomètres, parce qu'il en peut résulter des lumières pour la solution générale du Problème des trois Corps.

XXIV.

Le premier cas qui se présente est celui où les trois distances r, r', r'' seraient constantes, en sorte que le triangle formé par ces Corps demeurât toujours le même et ne fît que changer de position.

On aura dans ce cas

$$dr = 0, \quad dr' = 0, \quad dr'' = 0,$$

et par conséquent aussi

$$dp = 0, \quad dp' = 0, \quad dp'' = 0;$$

donc les trois équations (K) deviendront

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{A+B+C}{r} + C(p'q' - p''q'' + Q) = 0,\\ &\frac{A+B+C}{r'} + B(pq + p''q'' + Q') = 0,\\ &\frac{A+B+C}{r''} + A(-pq - p'q' + Q'') = 0;\end{aligned}\right.$$

d'où l'on voit que les quantités Q, Q', Q'' seront pareillement constantes, en sorte qu'on aura

$$dQ = 0, \quad dQ' = 0, \quad dQ'' = 0,$$

moyennant quoi les équations (I) se réduiront à celles-ci

$$q\,d\rho = 0, \quad q'd\rho = 0, \quad q''d\rho = 0,$$

lesquelles donneront ou $q = 0$, $q' = 0$, $q'' = 0$, ou $d\rho = 0$. Examinons séparément ces deux cas.

XXV.

Soit d'abord

$$q = 0, \quad q' = 0, \quad q'' = 0;$$

donc

$$r = r' = r'';$$

de sorte que le triangle formé par les trois Corps sera équilatère; les équations (a) donneront donc

$$CQ = BQ' = AQ'' = -\frac{A + B + C}{r},$$

et, ces valeurs étant substituées dans les formules (J), on aura

$$u^2 = u'^2 = u''^2 = \frac{A + B + C}{r}.$$

Maintenant on aura

$$p = p' = p'' = \frac{r^2}{2}, \quad v = v' = v'' = \frac{u^2}{2};$$

donc

$$P = \frac{3r^4}{4}, \quad U = \frac{3u^4}{4};$$

de plus l'équation (H) donnera $\frac{d^2\rho}{dt^2} = 0$, par conséquent

$$\frac{d\rho}{dt} = \alpha,$$

α étant une constante arbitraire qui doit satisfaire à l'équation (N).

Or on trouve

$$\Sigma = \Sigma' = \Sigma'' = r^2\alpha^2;$$

de sorte que l'équation dont nous parlons deviendra

$$9r^4u^4 - 6r^2u^2\alpha^2 + \alpha^4 = 0,$$

c'est-à-dire,

$$(3r^2u^2 - \alpha^2)^2 = 0,$$

d'où

$$\alpha^2 = 3r^2u^2 = 3(A + B + C)r.$$

Ainsi l'on aura satisfait à toutes les équations du Problème; de sorte que la valeur de r demeurera indéterminée; d'où il s'ensuit que le système des trois Corps peut se mouvoir de manière que les trois Corps forment toujours un triangle quelconque équilatéral.

Ayant trouvé

$$P = \frac{3r^4}{4}, \quad \Sigma = \Sigma' = \Sigma'' = r^2\alpha^2 = 3r^4u^2,$$

on aura

$$4Pu^2 - \Sigma = 0, \quad 4Pu'^2 - \Sigma' = 0, \quad 4Pu''^2 - \Sigma'' = 0;$$

donc

$$\sin\psi = 0, \quad \sin\psi' = 0;$$

d'où l'on voit que les trois Corps seront toujours nécessairement dans un même plan.

On trouve ensuite

$$\Pi = \Pi' = \Pi'' = r^2u^2,$$

$$\Psi = \Psi' = \Psi'' = pv + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{r^2u^2}{4} + \frac{3r^2u^2}{4} = r^2u^2;$$

donc, à cause de $\psi = 0$ et $\psi' = 0$, on aura

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi'}{dt} = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)\frac{u^2}{h};$$

mais l'équation (P) donnera

$$h^2 = \left(\frac{1}{C^2} + \frac{1}{B^2} + \frac{1}{A^2} + \frac{2}{AB} + \frac{2}{AC} + \frac{2}{BC}\right)r^2u^2,$$

ou bien

$$h^2 = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{B} + \frac{1}{A}\right)^2 r^2u^2,$$

par conséquent

$$h = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) ru;$$

donc

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi'}{dt} = \frac{u}{r} = \sqrt{\frac{A+B+C}{r^3}}.$$

Ainsi les Corps B et C ne feront que tourner autour du Corps A avec une vitesse angulaire constante et égale à $\sqrt{\frac{A+B+C}{r^3}}$.

XXVI.

Examinons maintenant l'autre cas, où $\frac{d\rho}{dt} = 0$ sans que q, q', q'' soient nuls, et substituons d'abord dans les équations (J) les valeurs de CQ, BQ′ et AQ″ tirées des équations (a) ci-dessus; on aura

$$(b)\qquad \left\{\begin{aligned} u^2 &= \frac{A+B+C}{r} - C(p'q' - p''q''),\\ u'^2 &= \frac{A+B+C}{r'} - B(pq + p''q''),\\ u''^2 &= \frac{A+B+C}{r''} - A(-pq - p'q'); \end{aligned}\right.$$

d'où l'on voit que les vitesses relatives des Corps seront aussi constantes, mais non pas égales entre elles comme dans le cas précédent.

Or, puisqu'il faut que $\frac{d\rho}{dt} = 0$, on aura donc aussi $\frac{d^2\rho}{dt^2} = 0$, et l'équation (H) deviendra

$$(c)\qquad Cpq - Bp'q' - Ap''q'' = 0.$$

Ensuite l'équation (N) deviendra (à cause de $dr = 0$, $dr' = 0$, $dr'' = 0$, et $dp = 0$, $dp' = 0$, $dp'' = 0$, $d\rho = 0$)

$$16\,PU = 0,$$

savoir

$$P = 0, \quad \text{ou} \quad U = 0;$$

ainsi, en combinant l'une ou l'autre de ces équations avec l'équation précédente (c), on pourra, par leur moyen, déterminer deux quelconques des trois indéterminées r, r', r'', et le Problème sera résolu.

Supposons d'abord $P = 0$, on aura

$$(r + r' + r'')(r + r' - r'')(r - r' + r'')(r - r' - r'') = 0;$$

donc, puisque r, r', r'' sont supposées positives, on aura ces équations

$$r + r' - r'' = 0, \quad \text{ou} \quad r - r' + r'' = 0, \quad \text{ou} \quad r - r' - r'' = 0,$$

d'où l'on tire

$$r'' = r + r', \quad \text{ou} \quad r' = r + r'', \quad \text{ou} \quad r = r' + r'';$$

c'est-à-dire, que l'une des trois distances doit être égale à la somme des deux autres, ce qui montre que les trois Corps doivent être toujours rangés dans une même ligne droite.

Imaginons que les trois Corps A, B, C soient rangés de suite dans la même direction, en sorte que l'on ait

$$r'' = r' - r,$$

et, faisant pour plus de simplicité $r' = mr$, il n'y aura qu'à substituer dans l'équation (c) mr à la place de r', et $(m-1)r$ à la place de r''; l'inconnue r s'en ira, et l'on aura une équation qui servira à déterminer m. On trouvera donc

$$p = \frac{m^2 + (m-1)^2 - 1}{2} r^2 = (m^2 - m) r^2,$$

$$p' = \frac{1 + (m-1)^2 - m^2}{2} r^2 = (1 - m) r^2,$$

$$p'' = \frac{1 + m^2 - (m-1)^2}{2} r^2 = m r^2,$$

$$q = \left[\frac{1}{m^3} - \frac{1}{(m-1)^3}\right] \frac{1}{r^3} = -\frac{3m^2 - 3m + 1}{m^3 (m-1)^3} \frac{1}{r^3},$$

$$q' = \left[1 - \frac{1}{(m-1)^3}\right] \frac{1}{r^3} = \frac{m^3 - 3m^2 + 3m}{(m-1)^3} \frac{1}{r^3},$$

$$q'' = \left(\frac{1}{m^3} - 1\right) \frac{1}{r^3} = \frac{1 - m^3}{m^3} \frac{1}{r^3};$$

et, ces substitutions étant faites dans l'équation (c), elle deviendra, après avoir été multipliée par $m^2(m-1)^2 r$,

$$(d)\quad C(-3m^2+3m-1)+Bm^3(m^2-3m+3)-A(m-1)^2(1-m^3)=0,$$

laquelle étant ordonnée par rapport à m montera au cinquième degré, et aura par conséquent toujours une racine réelle.

Il est bon de remarquer ici que, quoique nous ayons supposé $r''=r'-r$, la solution n'en renfermera pas moins tous les cas possibles, à cause que les distances r, r', r'', étant prises sur une même ligne droite, peuvent être positives ou négatives, suivant la différente position des Corps.

Maintenant, à cause de

$$dr=0,\quad dr'=0,\quad dr''=0,\quad d\rho=0,$$

on aura

$$\Sigma=0,\quad \Sigma'=0,\quad \Sigma''=0;$$

de sorte que, comme on a déjà $P=0$, on aura

$$\sin\psi=0,\quad \sin\psi'=0,$$

ce qui montre que les trois Corps doivent se mouvoir dans un plan fixe.

XXVII.

Supposons maintenant l'autre facteur U égal à zéro, on aura

$$U=vv'+vv''+v'v''=u^2u'^2-v''^2=0.$$

Or les équations (b) donnent

$$\frac{u^2}{r^2}-\frac{u'^2}{r'^2}=-(A+B+C)q''-\frac{C}{r^2}(p'q'-p''q'')+\frac{B}{r'^2}(pq+p''q''),$$

d'où, en multipliant par $r^2r'^2$, et mettant à la place de r^2 et r'^2 leurs valeurs $p'+p''$ et $p+p''$, on aura, à cause de $q''=q-q'$,

$$r'^2u^2-r^2u'^2=(-Cq+Bq'-Aq'')P+(Cpq-Bp'q'-Ap''q'')p'';$$

mais

$$Cpq - Bp'q' - Ap''q'' = 0$$

par l'équation (c); donc on aura simplement

$$r'^2u^2 - r^2u'^2 = (-Cq + Bq' - Aq'')P,$$

et l'on trouvera de même par analogie

$$r''^2u^2 - r^2u''^2 = (Cq + Bq' - Aq'')P,$$

$$r''^2u'^2 - r'^2u''^2 = (Cq + Bq' + Aq'')P,$$

d'où il est facile de tirer

$$p''u^2 - r^2v'' = -CqP, \quad p''u'^2 - r'^2v'' = -Bq'P,$$

et par conséquent

$$v'' = \frac{p''u^2 + CqP}{r^2} = \frac{p''u'^2 + Bq'P}{r'^2};$$

donc

$$v''^2 = \frac{p''^2u^2u'^2 + p''P(Bq'u^2 + Cqu'^2) + BCqq'P^2}{r^2r'^2},$$

et de là, à cause de $P = r^2r'^2 - p''^2$,

$$U = u^2u'^2 - v''^2 = \frac{P}{r^2r'^2}[u^2u'^2 - p''(Bq'u^2 + Cqu'^2) - BCqq'P]$$

$$= \frac{P}{r^2r'^2}[(u^2 - Cqp'')(u'^2 - Bq'p'') - BCr^2r'^2qq'].$$

Mais les mêmes équations (b) donnent

$$u^2 - Cqp'' = \left(\frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r''^3}\right)r^2,$$

$$u'^2 - Bq'p'' = \left(\frac{A+C}{r'^3} + \frac{B}{r''^3}\right)r'^2;$$

donc, en substituant ces valeurs aussi bien que celles de q et q', on aura

$$U = P\left[\left(\frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r''^3}\right)\left(\frac{A+C}{r'^3} + \frac{B}{r''^3}\right) - BC\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r''^3}\right)\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r''^3}\right)\right],$$

ou bien

$$U = P\left[\frac{A^2}{r^3 r'^3} + \frac{B^2}{r^3 r''^3} + \frac{C^2}{r'^3 r''^3} + \frac{AB}{r^3}\left(\frac{1}{r'^3} + \frac{1}{r''^3}\right) + \frac{AC}{r'^3}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r''^3}\right) + \frac{BC}{r''^3}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r'^3}\right)\right].$$

D'où l'on voit que l'équation $U = 0$ ne peut donner que celle-ci $P = 0$, l'autre facteur de U ne pouvant jamais devenir nul, à cause que les rayons r, r', r'' et les masses A, B, C sont des quantités positives.

XXVIII.

L'équation $P = 0$ étant donc la seule qui puisse satisfaire au cas que nous examinons, ce cas n'aura lieu, comme nous l'avons vu plus haut, que lorsque les trois Corps seront rangés dans une même ligne droite, et que leurs distances seront dans le rapport exprimé par l'équation (d).

Or nous avons déjà trouvé que les trois Corps doivent se mouvoir dans un plan fixe; de sorte que, connaissant la vitesse u du Corps B autour de A, il n'y aura qu'à la diviser par r pour avoir la vitesse angulaire des Corps B et C; mais, si l'on veut faire usage des formules générales de l'Article XXII, on remarquera qu'à cause de $P = 0$ on a (Article XXVII)

$$\frac{u^2}{r^2} = \frac{u'^2}{r'^2} = \frac{u''^2}{r''^2};$$

mais les équations (b) donnent

$$\frac{u^2}{C} + \frac{u'^2}{B} + \frac{u''^2}{A} = (A + B + C)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right);$$

donc, substituant les valeurs précédentes de u'^2 et u''^2, et faisant, pour abréger,

$$k = \frac{(A + B + C)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right)}{\frac{r^2}{C} + \frac{r'^2}{B} + \frac{r''^2}{A}},$$

on aura

$$u^2 = kr^2, \quad u'^2 = kr'^2, \quad u''^2 = kr''^2;$$

donc aussi

$$v = kp, \quad v' = kp', \quad v'' = kp''.$$

Ainsi on aura (Article XXII)

$$\Pi = kr^4, \quad \Pi' = kr'^4, \quad \Pi'' = kr''^4,$$

$$\Psi = kp^2, \quad \Psi' = kp'^2, \quad \Psi'' = kp''^2;$$

mais, à cause de $P = 0$, on a

$$p^2 = r'^2 r''^2, \quad p'^2 = r^2 r''^2, \quad p''^2 = r^2 r'^2;$$

donc

$$\Psi = kr'^2 r''^2, \quad \Psi' = kr^2 r''^2, \quad \Psi'' = kr^2 r'^2;$$

donc l'équation (P) deviendra

$$h^2 = k\left(\frac{r^2}{C} + \frac{r'^2}{B} + \frac{r''^2}{A}\right)^2,$$

d'où

$$h = \left(\frac{r^2}{C} + \frac{r'^2}{B} + \frac{r''^2}{A}\right)\sqrt{k};$$

ensuite, à cause de $\psi = 0$ et $\psi' = 0$,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi'}{dt} = \frac{k}{h}\left(\frac{r^2}{C} + \frac{r'^2}{B} + \frac{r''^2}{A}\right) = \sqrt{k}.$$

XXIX.

Nous avons supposé ci-dessus que les rayons r, r', r'' étaient constants, et nous avons vu que cela ne peut avoir lieu que dans deux cas, savoir : lorsque ces trois rayons sont égaux entre eux, et lorsque l'un d'eux est égal à la somme des deux autres. Supposons maintenant que ces trois rayons soient seulement dans un rapport constant entre eux, et voyons dans quel cas cette condition pourra avoir lieu. Soit donc

$$r' = mr, \quad r'' = nr,$$

m et n étant des quantités constantes, et l'on aura d'abord (Article XXII)

$$p = \mu r^2, \quad p' = \mu' r^2, \quad p'' = \mu'' r^2,$$

$$q = \frac{\varpi}{r^3}, \quad q' = \frac{\varpi'}{r^3}, \quad q'' = \frac{\varpi''}{r^3},$$

en faisant, pour abréger,

$$\mu = \frac{m^2 + n^2 - 1}{2}, \quad \mu' = \frac{1 + n^2 - m^2}{2}, \quad \mu'' = \frac{1 + m^2 - n^2}{2},$$

$$\varpi = \frac{1}{m^3} - \frac{1}{n^3}, \quad \varpi' = 1 - \frac{1}{n^3}, \quad \varpi'' = \frac{1}{m^3} - 1 = \varpi - \varpi'.$$

Donc l'équation (H) deviendra

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{C\mu\varpi - B\mu'\varpi' - A\mu''\varpi''}{r} = 0,$$

ou bien, en faisant

$$\lambda = C\mu\varpi - B\mu'\varpi' - A\mu''\varpi'',$$

pour abréger,

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{\lambda}{r} = 0,$$

et intégrant

$$\frac{d\rho}{dt} = \alpha - \lambda \int \frac{dt}{r},$$

α étant une constante arbitraire égale à la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$ lorsque $t = 0$.

Ensuite on aura

$$dQ = 2(\mu'\varpi' - \mu''\varpi'')\frac{dr}{r^2} - \varpi\left(\alpha - \lambda\int\frac{dt}{r}\right)\frac{dt}{r^3},$$

$$dQ' = 2(\mu\varpi + \mu''\varpi'')\frac{dr}{r^2} + \varpi'\left(\alpha - \lambda\int\frac{dt}{r}\right)\frac{dt}{r^3},$$

$$dQ'' = 2(-\mu\varpi - \mu'\varpi')\frac{dr}{r^2} + \varpi''\left(\alpha - \lambda\int\frac{dt}{r}\right)\frac{dt}{r^3};$$

donc, en intégrant,

$$Q = -\frac{2(\mu'\varpi' - \mu''\varpi'')}{r} - \varpi\int\left(\alpha - \lambda\int\frac{dt}{r}\right)\frac{dt}{r^3} + k,$$

$$Q' = -\frac{2(\mu\varpi + \mu''\varpi'')}{r} + \varpi'\int\left(\alpha - \lambda\int\frac{dt}{r}\right)\frac{dt}{r^3} + k',$$

$$Q'' = -\frac{2(-\mu\varpi - \mu'\varpi')}{r} + \varpi''\int\left(\alpha - \lambda\int\frac{dt}{r}\right)\frac{dt}{r^3} + k'',$$

k, k' et k'' étant des constantes arbitraires.

Faisant toutes ces substitutions dans les équations (K), et divisant ensuite la seconde par m^2 et la troisième par n^2, elles deviendront celles-ci

$$\frac{d^2(r^2)}{2dt^2} - \frac{A + B + C(1 - \mu'\varpi' + \mu''\varpi'')}{r} + C\varpi\int\left(\alpha - \lambda\int\frac{dt}{r}\right)\frac{dt}{r^3} - Ck = 0,$$

$$\frac{d^2(r^2)}{2dt^2} - \frac{A + C + B[1 - (\mu\varpi + \mu''\varpi'')m]}{m^3 r} - \frac{B\varpi'}{m^2}\int\left(\alpha - \lambda\int\frac{dt}{r^3}\right)\frac{dt}{r^3} - \frac{Bk'}{m^2} = 0,$$

$$\frac{d^2(r^2)}{2dt^2} - \frac{B + C + A[1 + (\mu\varpi + \mu'\varpi')n]}{n^3 r} - \frac{A\varpi''}{n^2}\int\left(\alpha - \lambda\int\frac{dt}{r}\right)\frac{dt}{r^3} - \frac{Ak''}{n^2} = 0,$$

lesquelles devront être identiques; de sorte qu'on aura ces conditions à remplir :

1° $$A + B + C(1 - \mu'\varpi' + \mu''\varpi'') = \frac{A + C + B[1 - (\mu\varpi + \mu''\varpi'')m]}{m^3}$$
$$= \frac{B + C + A[1 + (\mu\varpi + \mu'\varpi')n]}{n^3};$$

2° $$C\varpi = -\frac{B\varpi'}{m^2} = -\frac{A\varpi''}{n^2}, \quad \text{ou bien} \quad \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \lambda = 0;$$

3° $$Ck = \frac{Bk'}{m^2} = \frac{Ak''}{n^2}.$$

Ces deux dernières conditions peuvent toujours se remplir par le moyen des constantes indéterminées k, k' et k''; ainsi la difficulté ne consiste qu'à satisfaire à celles des groupes 1° et 2°.

Or, si l'on fait, pour abréger,

$$\delta = \mu\mu' + \mu\mu'' + \mu'\mu'' = -\tfrac{1}{4}(1 + m + n)(1 + m - n)(1 - m + n)(1 - m - n),$$

on pourra réduire les deux équations du groupe 1° à celles-ci, par des transformations analogues à celles de l'Article XXVII,

$$(e)\quad (-C\varpi + B\varpi' - A\varpi'')\,\delta + \mu''\lambda = 0, \quad (C\varpi + B\varpi' - A\varpi'')\,\delta - \mu'\lambda = 0.$$

Ainsi il n'y aura qu'à combiner ces deux équations avec celles du groupe 2°, savoir

$$C\varpi = -\frac{B\varpi'}{m^2} = -\frac{A\varpi''}{n^2}, \quad \text{ou bien} \quad \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \lambda = 0;$$

ce qui fait deux cas que nous allons examiner séparément.

XXX.

Soit d'abord

$$C\varpi = -\frac{B\varpi'}{m^2} = -\frac{A\varpi''}{n^2};$$

donc

$$\varpi' = -\frac{m^2 C\varpi}{B}, \quad \text{et} \quad \varpi'' = -\frac{n^2 C\varpi}{A};$$

mais on a (Article XXIX)

$$\varpi - \varpi' - \varpi'' = 0;$$

donc

$$\varpi\left(1 + \frac{m^2 C}{B} + \frac{n^2 C}{A}\right) = 0,$$

savoir

$$\varpi\left(\frac{1}{C} + \frac{m^2}{B} + \frac{n^2}{A}\right) = 0.$$

Or il est visible que la quantité $\frac{1}{C} + \frac{m^2}{B} + \frac{n^2}{A}$ ne saurait jamais devenir nulle, à cause que les masses A, B, C sont des quantités positives; ainsi il faudra que l'on ait $\varpi = 0$, et par conséquent aussi $\varpi' = 0$, $\varpi'' = 0$; or, dans ce cas, on aura $\lambda = 0$, et les deux équations (e) ci-dessus auront lieu d'elles-mêmes; de sorte que toutes les conditions se trouveront remplies, et le Problème des trois Corps sera résoluble exactement dans l'hypothèse de

$$\varpi = 0, \quad \varpi' = 0, \quad \varpi'' = 0,$$

ce qui donnera

$$n = m = 1,$$

et par conséquent

$$r = r' = r'',$$

c'est-à-dire, les distances entre les Corps égales entre elles, comme dans le cas de l'Article XIV; mais avec cette différence, que dans le cas présent elles peuvent être variables.

Pour connaître le mouvement des Corps dans ce cas, on reprendra les équations différentielles de l'Article XXIX, lesquelles, en faisant

$$f = \mathrm{C}k = \mathrm{B}k' = \mathrm{A}k'',$$

se réduisent à cette équation unique

$$\frac{d^2(r^2)}{2dt^2} - \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}}{r} - f = 0.$$

Multipliant par $d(r^2)$, et intégrant ensuite, on aura

$$\left[\frac{d(r^2)}{2dt}\right]^2 - 2(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})\,r - fr^2 = \mathrm{H},$$

H étant une constante arbitraire; et de là

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{\mathrm{H} + 2(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})\,r + fr^2}},$$

moyennant quoi on connaîtra t en r, et *vice versâ*, r en t.

Maintenant, puisque $\varpi = 0$, $\varpi' = 0$, $\varpi'' = 0$, on aura

$$\mathrm{Q} = k,\quad \mathrm{Q}' = k',\quad \mathrm{Q}'' = k'';$$

donc (Article XXII)

$$u^2 = u'^2 = u''^2 = \frac{2(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})}{r} + f.$$

De plus, ayant $\lambda = 0$, on aura

$$\frac{d\rho}{dt} = \alpha,$$

et cette constante α devra être déterminée en sorte qu'elle satisfasse à l'équation (N); on peut donner pour cela à t telle valeur qu'on voudra; mais, en ne faisant aucune supposition particulière, l'équation (N) devra être identique avec celle que nous avons trouvée ci-dessus pour la détermination de r, et leur comparaison donnera la valeur de α.

En effet, à cause de $r = r' = r''$, on aura

$$p = p' = p'' = \frac{r^2}{2};$$

donc

$$P = \frac{3r^4}{4};$$

et de même, à cause de $u = u' = u''$, on aura

$$v = v' = v'' = \frac{u^2}{2};$$

donc

$$U = \frac{3u^4}{4};$$

ensuite

$$\Sigma = \Sigma' = \Sigma'' = \frac{r^2}{2}\left(\frac{2r\,dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{r\,dr}{dt}\right)^2 + r^2\alpha^2 = 3r^2\left(\frac{r\,dr}{dt}\right)^2 + r^2\alpha^2;$$

et l'équation (N) deviendra

$$9r^4u^4 - 6u^2\left[3r^2\left(\frac{r\,dr}{dt}\right)^2 + r^2\alpha^2\right] + \left[3\left(\frac{r\,dr}{dt}\right)^2 + \alpha^2\right]^2 = 0,$$

ou bien

$$\left[3r^2u^2 - 3\left(\frac{r\,dr}{dt}\right)^2 - \alpha^2\right]^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$3r^2u^2 - 3\left(\frac{r\,dr}{dt}\right)^2 - \alpha^2 = 0.$$

Or on a déjà trouvé

$$u^2 = \frac{2(A + B + C)}{r} + f;$$

donc, substituant cette valeur et résolvant l'équation, il viendra

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{-\frac{\alpha^2}{3} + 2(A+B+C)\,r + fr^2}}.$$

Comparant donc cette équation avec la précédente, on aura

$$H = -\frac{\alpha^2}{3},$$

et par conséquent

$$\alpha = \sqrt{-3H};$$

d'où l'on voit que H doit être nécessairement une quantité négative.

On aura ensuite

$$\Pi = \Pi' = \Pi'' = r^2u^2 - \left(\frac{r\,dr}{dt}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{3},$$

et

$$\Psi = \Psi' = \Psi'' = \frac{r^2u^2}{4} - \left(\frac{r\,dr}{2\,dt}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{4.3} + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2}{3};$$

donc l'équation (P) deviendra

$$\frac{\alpha^2}{3}\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{B} + \frac{1}{A}\right)^2 = h^2,$$

d'où l'on tire

$$h = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{B} + \frac{1}{A}\right).$$

Or, puisqu'on a déjà trouvé

$$\Sigma = \Sigma' = \Sigma'' = 3r^2\left(\frac{r\,dr}{dt}\right)^2 + r^2\alpha^2,$$

et que

$$3r^2u^2 - 3\left(\frac{r\,dr}{dt}\right)^2 - \alpha^2 = 0,$$

on aura

$$\Sigma = \Sigma' = \Sigma'' = 3r^4u^2;$$

d'ailleurs on a

$$4P = 3r^4, \quad \text{et} \quad u = u' = u'';$$

donc on aura

$$4Pu^2 - \Sigma = 0, \quad 4Pu'^2 - \Sigma' = 0, \quad 4Pu''^2 - \Sigma'' = 0;$$

et par conséquent

$$\sin\psi = 0, \quad \sin\psi' = 0,$$

c'est-à-dire,

$$\psi = 0, \quad \psi' = 0;$$

ce qui montre que les Corps B et C doivent se mouvoir dans un même plan fixe passant par le Corps A.

Maintenant, si l'on substitue dans les expressions de $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\varphi'}{dt}$ les valeurs de Π, Π', Ψ, Ψ', Ψ'' et de h trouvées ci-dessus, on aura

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi'}{dt} = \frac{\alpha}{r^2\sqrt{3}};$$

et par conséquent, en substituant la valeur ci-dessus de dt,

$$d\varphi = \frac{dr}{r\sqrt{-1 + \frac{6(A+B+C)}{\alpha^2}r + \frac{3f}{\alpha^2}r^2}},$$

qui est l'équation polaire d'une section conique rapportée au foyer, et dans laquelle $\frac{2(A+B+C)}{-f}$ est le grand axe et $\frac{2\alpha^2}{3(A+B+C)}$ le paramètre.

Ainsi les Corps B et C décriront dans ce cas autour du Corps A deux sections coniques semblables et égales, dont l'espèce et la forme dépendront des quantités arbitraires f et α, lesquelles pourront se déterminer par les équations

$$\alpha^2 = 3r^2u^2 - 3\left(\frac{r\,dr}{dt}\right)^2, \quad f = u^2 - \frac{2(A+B+C)}{r},$$

en donnant à u, r et $\frac{dr}{dt}$ les valeurs qui conviennent au premier instant.

XXXI.

Reste à examiner le cas où $\alpha = 0$ et $\lambda = 0$; or la supposition de $\lambda = 0$ réduit d'abord les équations (e) à celles-ci

$$(-C\varpi + B\varpi' - A\varpi'')\delta = 0, \quad (C\varpi + B\varpi' - A\varpi'')\delta = 0,$$

lesquelles donnent ou

$$\delta = 0,$$

ou bien

$$-C\varpi + B\varpi' - A\varpi'' = 0, \quad \text{et} \quad C\varpi + B\varpi' - A\varpi'' = 0,$$

c'est-à-dire,

$$C\varpi = 0 \quad \text{et} \quad B\varpi' - A\varpi'' = 0.$$

Or j'observe d'abord que ces deux dernières équations sont inutiles; car on aurait d'abord $\varpi = 0$, ensuite, à cause de $\varpi'' = \varpi - \varpi'$, on aurait $\varpi'' = -\varpi'$; de sorte que l'équation $B\varpi' - A\varpi'' = 0$ deviendrait $(B + A)\varpi' = 0$, ce qui donnerait $\varpi' = 0$; on aurait donc $\varpi = \varpi' = \varpi'' = 0$, ce qui rentre dans le cas que nous avons examiné ci-dessus.

Il faut donc faire $\delta = 0$, de sorte que la solution du Problème sera renfermée dans ces trois équations

$$\delta = 0, \quad \lambda = 0, \quad \alpha = 0.$$

La première donnera (Article XXIX)

$$(1 + m + n)(1 + m - n)(1 - m + n)(1 - m - n) = 0;$$

donc

$$1 \pm m \pm n = 0,$$

et par conséquent

$$r \pm r' \pm r'' = 0,$$

c'est-à-dire, que l'une des trois distances r, r', r'' doit être égale à la somme des deux autres, et conséquemment que les trois Corps doivent être toujours rangés dans une même ligne droite.

Ce cas est donc analogue à celui de l'Article XXVI, mais il est plus général, en ce que les distances entre les Corps peuvent être variables, pourvu que leurs rapports soient constants.

On déterminera ces rapports par l'équation $\lambda = 0$, et pour cela on pourra supposer, comme dans l'Article cité, que les trois Corps A, B, C soient disposés de suite dans une même ligne droite, en sorte que $r'' = r' - r$, ce qui donnera $n = m - 1$; on substituera donc cette valeur de n dans l'expression de λ de l'Article XXIX, et l'on aura une équation en m qui sera la même que l'équation (d) de l'Article XXVI. Mais il faut voir encore si la condition de $\alpha = 0$ peut avoir lieu; et comme la constante α doit être déterminée par l'équation (N), tout se réduit à savoir si cette équation peut subsister en y faisant $\alpha = 0$, c'est-à-dire, $\frac{d\rho}{dt} = 0$, à cause de $\frac{d\rho}{dt} = \alpha - \lambda \int \frac{dt}{r}$ (Article XXIX) et de $\lambda = 0$.

Or, en supposant $\frac{d\rho}{dt} = 0$, et substituant pour r', r'' et p, p', p'' leurs valeurs (Article cité), on aura

$$\mathrm{P} = (\mu\mu' + \mu\mu'' + \mu'\mu'')\, r^4,$$

$$\Sigma = (\mu + \mu'\mu''^2 + \mu''\mu'^2)\, r^2 \left(\frac{2r\,dr}{dt}\right)^2,$$

$$\Sigma' = (\mu' m^4 + \mu\mu''^2 + \mu''\mu^2)\, r^2 \left(\frac{2r\,dr}{dt}\right)^2,$$

$$\Sigma'' = (\mu'' n^4 + \mu'\mu^2 + \mu\mu'^2)\, r^2 \left(\frac{2r\,dr}{dt}\right)^2,$$

$$\frac{dp\,dp' + dp\,dp'' + dp'dp'' + d\rho^2}{dt^2} = (\mu\mu' + \mu\mu'' + \mu'\mu'')\left(\frac{2r\,dr}{dt}\right)^2;$$

mais, par la nature des quantités μ, μ', μ'', on a

$$\mu' + \mu'' = 1, \quad \mu + \mu'' = m^2, \quad \mu + \mu' = n^2;$$

de plus, on a, en vertu de l'équation $\delta = 0$,

$$\mu\mu' + \mu\mu'' + \mu'\mu'' = 0;$$

donc on aura aussi

$$\mu + \mu'\mu''^2 + \mu''\mu'^2 = 0, \quad \mu' m^4 + \mu\mu''^2 + \mu''\mu^2 = 0, \quad \mu'' n^4 + \mu'\mu^2 + \mu\mu'^2 = 0;$$

de sorte que toutes les quantités précédentes P, Σ,... seront nulles, et conséquemment l'équation (N) se trouvera vérifiée d'elle-même.

XXXII.

Maintenant il est clair qu'à cause de $\alpha = 0$ et $\lambda = 0$ les trois équations différentielles de l'Article XXIX se réduiront à celle-ci

$$\frac{d^2(r^2)}{2\,dt^2} - \frac{F}{r} - f = 0,$$

en faisant, pour abréger,

$$F = A + B + C(1 - \mu'\varpi' + \mu''\varpi''),$$
$$f = Ck = \frac{Bk'}{m^2} = \frac{Ak''}{n^2}.$$

Cette équation étant donc multipliée par $d(r^2)$, et ensuite intégrée, donnera

$$\left(\frac{r\,dr}{dt}\right)^2 - 2Fr - fr^2 = H,$$

H étant une constante arbitraire; d'où l'on tire

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{H + 2Fr + fr^2}},$$

moyennant quoi on déterminera t en r, et par conséquent r en t.

De plus, si dans les équations (J) de l'Article XXII on substitue les valeurs de Q, Q′, Q″ de l'Article XXIX, on aura, en vertu des équations du groupe 1° du même Article,

$$u^2 = \frac{2F}{r} + f, \quad u'^2 = \frac{2m^2F}{r} + m^2 f, \quad u''^2 = \frac{2n^2F}{r} + n^2 f;$$

donc

$$v = \frac{2\mu F}{r} + \mu f, \quad v' = \frac{2\mu' F}{r} + \mu' f, \quad v'' = \frac{2\mu'' F}{r} + \mu'' f.$$

De là on trouvera

$$\Pi = 2Fr + fr^2 - \left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 = -H,$$

$$\Pi' = m^4\left[2Fr + fr^2 - \left(\frac{rdr}{dt}\right)^2\right] = -Hm^4,$$

$$\Pi'' = -Hn^4,$$

$$\Psi = \mu^2\left[2Fr + fr^2 - \left(\frac{rdr}{dt}\right)^2\right] = -H\mu^2 = -Hm^2n^2,$$

$$\Psi' = -H\mu'^2 = -Hn^2,$$

$$\Psi'' = -H\mu''^2 = -Hm^2,$$

à cause de

$$\mu\mu' + \mu\mu'' + \mu'\mu'' = 0,$$

et par conséquent

$$\mu^2 = m^2n^2, \quad \mu'^2 = n^2, \quad \mu''^2 = m^2.$$

Donc, si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (P), elle deviendra

$$h^2 = -H\left(\frac{1}{C} + \frac{m^2}{B} + \frac{n^2}{A}\right)^2,$$

d'où

$$h = \left(\frac{1}{C} + \frac{m^2}{B} + \frac{n^2}{A}\right)\sqrt{-H},$$

d'où l'on voit que H doit être une quantité négative.

Or, à cause de $P = 0$ et de $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$, $\Sigma'' = 0$, on aura

$$\sin\psi = 0 \quad \text{et} \quad \sin\psi' = 0,$$

ce qui montre que les deux Corps B et C doivent se mouvoir dans un même plan fixe passant par le Corps A, et l'on trouvera ensuite pour les angles de rotation

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi'}{dt} = \frac{-H}{hr^2}\left(\frac{1}{C} + \frac{m^2}{B} + \frac{n^2}{A}\right) = \frac{\sqrt{-H}}{r^2}.$$

Et, si l'on substitue la valeur de dt, trouvée ci-dessus, on aura

$$d\varphi = \frac{dr}{r\sqrt{-1 + \frac{2F}{-H} r + \frac{f}{-H} r^2}},$$

équation polaire d'une section conique, rapportée au foyer, dans laquelle $\frac{2F}{f}$ sera le grand axe et $-\frac{2H}{F}$ le paramètre.

XXXIII.

Nous venons donc de voir que le Problème des trois Corps est résoluble exactement, soit que les distances entre les trois Corps soient constantes, ou qu'elles gardent seulement entre elles des rapports constants, et cela dans deux cas, savoir : lorsque les trois distances sont égales entre elles, en sorte que les trois Corps forment toujours un triangle équilatère, et lorsque l'une des distances est égale à la somme ou à la différence des deux autres, en sorte que les trois Corps se trouvent toujours rangés en ligne droite.

Or, si l'on suppose que les distances r, r', r'' soient variables, mais de manière que leurs valeurs ne s'écartent que très-peu de celles qu'elles devraient avoir pour que l'un des cas précédents eût lieu, il est clair que le Problème sera résoluble à très-peu près, et par les méthodes connues d'approximation; mais nous n'entrerons pas ici dans ce détail, qui nous écarterait trop de notre objet principal.

J'avoue, au reste, qu'on pourrait résoudre les Problèmes précédents d'une manière plus simple par les formules ordinaires du Problème des trois Corps entre les rayons vecteurs et les angles décrits par ces rayons, si l'on voulait se borner d'abord à l'hypothèse que les Corps se meuvent dans un même plan fixe; mais il ne serait pas aisé, ce me semble, d'en venir à bout par les mêmes formules, si l'on supposait, comme nous l'avons fait, que les Corps pussent se mouvoir dans des plans différents.

CHAPITRE III.

MODIFICATION DES FORMULES DU CHAPITRE PREMIER, POUR LE CAS OÙ L'ON SUPPOSE QUE L'UN DES TROIS CORPS SOIT ÉLOIGNÉ DES DEUX AUTRES.

XXXIV.

Le cas que nous allons examiner a lieu dans le Système du monde, par rapport à ces trois Planètes, le Soleil, la Terre et la Lune, dont les deux dernières sont beaucoup plus éloignées de la première qu'elles ne le sont l'une de l'autre; mais nous ne considérons ici le cas dont il s'agit que d'une manière générale, et seulement pour voir quelles modifications cette supposition doit apporter aux formules générales de l'Article XXII.

Supposons donc que le Corps C soit beaucoup plus éloigné des Corps A et B que ceux-ci ne le sont entre eux, en sorte que les quantités r' et r'' soient fort grandes par rapport à la quantité r; pour cela nous prendrons une quantité i, que nous supposerons constante et très-petite, et nous ferons

$$r' = \frac{R}{i}, \quad r'' = \frac{R'}{i},$$

en sorte que R et R′ soient des quantités finies et comparables à r. Or, si l'on nomme, comme dans l'Article XIX, ζ'' l'angle formé au centre du Corps A par les rayons vecteurs r et r' des Corps B et C, on aura

$$\cos\zeta'' = \frac{r^2 + r'^2 - r''^2}{2r'r},$$

d'où

$$r''^2 = r'^2 - 2r'r\cos\zeta'' + r^2,$$

ou bien

$$R'^2 = R^2 - 2iRr\cos\zeta'' + i^2r^2.$$

Donc, si l'on fait

$$z = r\cos\zeta'',$$

on aura

$$R'^2 = R^2 - 2iRz + i^2r^2;$$

donc

$$r'^2 = \frac{R^2}{i^2}, \quad r''^2 = \frac{R^2}{i^2} - \frac{2Rz}{i} + r^2.$$

De là on aura

$$\frac{1}{r'} = \frac{i}{R},$$

$$\frac{1}{r''} = \frac{i}{R} + \frac{i^2(2Rz - ir^2)}{2R^3} + \frac{3i^3(2Rz - ir^2)^2}{8R^5} + \frac{5i^4(2Rz - ir^2)^3}{16R^7} + \ldots$$

$$= \frac{i}{R} + \frac{i^2 z}{R^2} + \frac{i^3(3z^2 - r^2)}{2R^3} + \frac{i^4(5z^3 - 3zr^2)}{2R^4} + \ldots,$$

$$\frac{1}{r'^3} = \frac{i^3}{R^3},$$

$$\frac{1}{r''^3} = \frac{i^3}{R^3} + \frac{3i^4(2Rz - ir^2)}{2R^5} + \frac{15i^5(2Rz - ir^2)^2}{8R^7} + \frac{35i^6(2Rz - ir^2)^3}{16R^9} + \ldots$$

$$= \frac{i^3}{R^3} + \frac{3i^4 z}{R^4} + \frac{i^5(15z^2 - 3r^2)}{2R^5} + \frac{i^6(35z^3 - 15zr^2)}{2R^6} + \ldots$$

Donc (Article XXII)

$$p = \frac{R^2}{i^2} - \frac{Rz}{i}, \quad p' = -\frac{Rz}{i} + r^2, \quad p'' = \frac{Rz}{i},$$

$$q = -\frac{3i^4 z}{R^4} - \frac{i^5(15z^2 - 3r^2)}{2R^5} - \frac{i^6(35z^3 - 15zr^2)}{2R^6} - \ldots,$$

$$q' = \frac{1}{r^3} - \frac{i^3}{R^3} - \frac{3i^4 z}{R^4} - \frac{i^5(15z^2 - 3r^2)}{2R^5} - \frac{i^6(35z^3 - 15zr^2)}{2R^6} - \ldots,$$

$$q'' = -\frac{1}{r^3} + \frac{i^3}{R^3};$$

et de là

$$pq = -\frac{3i^2 z}{R^2} - \frac{i^3(9z^2 - 3r^2)}{2R^3} - \frac{i^4(20z^3 - 12zr^2)}{2R^4} - \ldots,$$

$$p'q' = -\frac{Rz}{ir^3} + \frac{1}{r} + \frac{i^2 z}{R^2} + \frac{i^3(3z^2 - r^2)}{R^3} + \frac{i^4(15z^3 - 9r^2 z)}{2R^4} + \frac{i^5(35z^4 - 30z^2r^2 + 3r^4)}{2R^5} + \ldots,$$

$$p''q'' = -\frac{Rz}{ir^3} + \frac{i^2 z}{R^2}.$$

Or, comme pq est une quantité très-petite de l'ordre de i^2, et que $p'q'$, $p''q''$ sont des quantités fort grandes de l'ordre de $\frac{1}{i}$, il est clair qu'en substituant les valeurs de ces quantités dans l'équation (H) les termes Cpq, $Bp'q'$, $Ap''q''$ ne pourront être homogènes, à moins que la masse C ne soit infiniment grande de l'ordre $\frac{1}{i^3}$ vis-à-vis des deux autres.

Supposons donc $C = \frac{D}{i^3}$, et l'équation (H) de l'Article XXII deviendra, après les substitutions,

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{1}{i}\left[\frac{(A+B)R}{r^3} - \frac{3D}{R^2}\right]z - \frac{B}{r} - \frac{D(9z^2 - 3r^2)}{2R^3} - \frac{iD(20z^3 - 12zr^2)}{2R^4} - \ldots = 0;$$

d'où l'on voit que la quantité $\frac{d^2\rho}{dt^2}$ est de l'ordre de $\frac{1}{i}$, de sorte que la quantité $\frac{d\rho}{dt}$ sera aussi du même ordre.

Donc, si l'on fait, pour abréger,

$$(f)\quad \frac{d\sigma}{dt} = \left[\frac{(A+B)R}{r^3} - \frac{3D}{R^2}\right]z - i\left[\frac{B}{r} + \frac{3D(3z^2 - r^2)}{2R^3}\right] - i^2\left[\frac{D(10z^3 - 6zr^2)}{R^4}\right] - \ldots,$$

on aura

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\sigma}{i},$$

et il faudra prendre la valeur de σ telle, qu'elle soit nulle lorsque $t = 0$.

XXXV.

$$q\,dp = -\frac{6i^2 z\,dR}{R^3} - \frac{i^3[(15z^2 - 3r^2)\,dR - 3z\,d(Rz)]}{R^4} - \ldots,$$

$$\begin{aligned} q'\,dp' = &-\frac{d(Rz)}{ir^3} + \frac{2\,dr}{r^2} + \frac{i^2\,d(Rz)}{R^3} + \frac{i^3[3z\,d(Rz) - R\,d(r^2)]}{R^4} \\ &+ \frac{i^4[(15z^2 - 3r^2)\,d(Rz) - 6Rz\,d(r^2)]}{2R^5} \\ &+ \frac{i^5[(35z^3 - 15zr^2)\,d(Rz) - (15z^2 - 3r^2)R\,d(r^2)]}{2R^6} + \ldots, \end{aligned}$$

$$q''\,dp'' = -\frac{d(Rz)}{ir^3} + \frac{i^2\,d(Rz)}{R^3}.$$

De sorte que les valeurs de dQ, dQ' et dQ'' deviendront

$$dQ = \frac{2\,dr}{r^2} + i^3\left[-\frac{d(r^2)}{R^3} + \frac{3z[d(Rz) - \sigma\,dt]}{R^4}\right]$$
$$+ i^4\left[-\frac{3z\,d(r^2)}{R^4} + \frac{(15z^2 - 3r^2)[d(Rz) - \sigma\,dt]}{2R^5}\right]$$
$$+ i^5\left[-\frac{(15z^2 - 3r^2)\,d(r^2)}{2R^5} + \frac{(35z^3 - 15zr^2)[d(Rz) - \sigma\,dt]}{2R^6}\right] + \ldots,$$

$$dQ' = -\frac{1}{i}\left[\frac{d(Rz) + \sigma\,dt}{r^3}\right] + i^2\left[\frac{-6z\,dR + d(Rz) + \sigma\,dt}{R^3}\right] + \ldots,$$

$$dQ'' = \frac{1}{i}\left[\frac{d(Rz) + \sigma\,dt}{r^3}\right] - \frac{2\,dr}{r^2} - i^2\left[\frac{-6z\,dR + d(Rz) + \sigma\,dt}{R^3}\right] + \ldots.$$

Donc, faisant toutes ces substitutions dans les équations (K), elles deviendront

$$(g)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2(r^2)}{2\,dt^2} - \frac{A+B}{r} - D\left[\frac{3z^2 - r^2}{R^3} + \int\left(-\frac{d(r^2)}{R^3} + \frac{3z[d(Rz) - \sigma\,dt]}{R^4}\right)\right]\\
&\qquad - iD\left[\frac{15z^3 - 9r^2z}{2R^4} + \int\left(-\frac{3z\,d(r^2)}{R^4} + \frac{(15z^2 - 3r^2)[d(Rz) - \sigma\,dt]}{2R^5}\right)\right]\\
&\qquad - i^2D\left[\frac{35z^4 - 30z^2r^2 + 3r^4}{2R^5}\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \int\left(-\frac{(15z^2 - 3r^2)\,d(r^2)}{2R^5} + \frac{(35z^3 - 15zr^2)[d(Rz) - \sigma\,dt]}{2R^6}\right)\right] - \ldots = \text{const.},
\end{aligned}\right.$$

$$\frac{d^2(R^2)}{2i^2\,dt^2} - \frac{D}{i^2R} + \frac{B}{i}\left[\frac{Rz}{r^3} + \int\frac{d(Rz) + \sigma\,dt}{r^3}\right] - \frac{i(A+B)}{R} - \ldots = \text{const.},$$

$$\frac{d^2(R^2)}{2i^2\,dt^2} - \frac{d^2(Rz)}{i\,dt^2} + \frac{d^2(r^2)}{2\,dt^2} - \frac{D}{i^2R}$$
$$- \frac{1}{i}\left[\frac{Dz}{R^2} + A\frac{Rz}{r^3} + A\int\frac{d(Rz) + \sigma\,dt}{r^3}\right]$$
$$- \frac{D(3z^2 - r^2)}{2R^3} - \frac{A}{r} - i\left[\frac{D(5z^3 - 3zr^2)}{2R^4} + \frac{A+B}{R}\right] - \ldots = \text{const.},$$

dont les deux dernières se réduisent à celles-ci

$$(h)\quad \frac{d^2(\mathrm{R}^2)}{2\,dt^2} - \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{R}} + i\mathrm{B}\left[\frac{\mathrm{Rz}}{r^3} + \int \frac{d(\mathrm{Rz}) + \sigma\,dt}{r^3}\right] - \frac{i^3(\mathrm{A}+\mathrm{B})}{\mathrm{R}} + \ldots = \text{const.},$$

$$(i)\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2(\mathrm{Rz})}{dt^2} + \frac{\mathrm{Dz}}{\mathrm{R}^2} + (\mathrm{A}+\mathrm{B})\left[\frac{\mathrm{Rz}}{r^3} + \int \frac{d(\mathrm{Rz}) + \sigma\,dt}{r^3}\right] \\ &\qquad - i\left[\frac{\mathrm{B}}{r} + \frac{\mathrm{D}(3\mathrm{z}^2 - r^2)}{2\mathrm{R}^3} + \mathrm{D}\int\left(-\frac{d(r^2)}{\mathrm{R}^3} + \frac{3\mathrm{z}[d(\mathrm{Rz}) - \sigma\,dt]}{\mathrm{R}^4}\right)\right] \\ &\qquad - i^2\mathrm{D}\left[\frac{5\mathrm{z}^3 - 3\mathrm{z}r^2}{\mathrm{R}^4} + \int\left(-\frac{3\mathrm{z}\,d(r^2)}{\mathrm{R}^4} + \frac{(15\mathrm{z}^2 - 3r^2)[d(\mathrm{Rz}) - \sigma\,dt]}{2\mathrm{R}^5}\right)\right] - \ldots = \text{const.}\end{aligned}\right.$$

Ainsi l'on aura, à la place des équations (K) de l'Article XXII, les trois équations (g), (h) et (i), dans lesquelles on n'a négligé que les quantités très-petites de l'ordre de i^3 et des ordres suivants, et ces équations serviront à trouver les valeurs de r, R et z en t; moyennant quoi le Problème sera résolu dans toute sa généralité, puisqu'il ne s'agira plus ensuite que de substituer ces valeurs dans les formules qui donnent les latitudes et les longitudes des Corps B et C (Article XXII). Or, comme la supposition de i très-petit simplifie aussi beaucoup les substitutions dont il s'agit, nous allons donner encore les valeurs de $\sin\psi$, $\sin\psi'$ et de $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\varphi'}{dt}$, exprimées en r, R et z; mais nous ne pousserons pas la précision au delà des quantités de l'ordre de i.

XXXVI.

Pour cela nous commencerons par chercher les valeurs des vitesses u, u', u''; or, si dans les équations (J) on substitue, à la place des quantités CQ, BQ′, AQ″, leurs valeurs tirées des équations (K), on a, en général,

$$u^2 = \frac{d^2(r^2)}{2\,dt^2} + \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}}{r} - \mathrm{C}(p'q' - p''q''),$$

$$u'^2 = \frac{d^2(r'^2)}{2\,dt^2} + \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}}{r'} - \mathrm{B}(pq + p''q''),$$

$$u''^2 = \frac{d^2(r''^2)}{2\,dt^2} + \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}}{r''} - \mathrm{A}(-pq - p'q').$$

Donc, faisant ici les mêmes substitutions que ci-dessus, et supposant, pour abréger,

$$(k)\quad \begin{cases} \mathrm{L} = \dfrac{d^2(r^2)}{2\,dt^2} + \dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{r} - \dfrac{\mathrm{D}(3z^2 - r^2)}{\mathrm{R}^3}, \\[2ex] \mathrm{M} = \dfrac{d^2(\mathrm{R}^2)}{2\,dt^2} + \dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{R}}, \\[2ex] \mathrm{N} = \dfrac{d^2(\mathrm{R}z)}{dt^2} + \dfrac{(\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{R}z}{r^3} - \dfrac{\mathrm{D}z}{\mathrm{R}^2}, \end{cases}$$

on aura

$$u^2 = \mathrm{L} - \frac{i\mathrm{D}(15z^3 - 9r^2z)}{2\mathrm{R}^4} - \ldots,$$

$$u'^2 = \frac{\mathrm{M}}{i^2} + \frac{\mathrm{BR}z}{ir^3} + \ldots,$$

$$u''^2 = \frac{\mathrm{M}}{i^2} + \frac{1}{i}\left(\frac{\mathrm{BR}z}{r^3} - \mathrm{N}\right) + \left[\mathrm{L} - \frac{\mathrm{B}}{r} + \frac{3\mathrm{D}(3z^2 - r^2)}{2\mathrm{R}^8}\right] + \ldots.$$

Or on a

$$\mathrm{P} = pp' + pp'' + p'p'' = pr^2 + p'p'' = \frac{\mathrm{R}^2(r^2 - z^2)}{i^2};$$

donc

$$\mathrm{P}u^2 = \frac{\mathrm{LR}^2(r^2 - z^2)}{i^2} - \frac{\mathrm{D}(r^2 - z^2)(15z^3 - 9r^2z)}{2i\mathrm{R}^2} - \ldots,$$

$$\mathrm{P}u'^2 = \frac{\mathrm{MR}^2(r^2 - z^2)}{i^4} + \frac{\mathrm{BR}^3z(r^2 - z^2)}{i^3r^3} + \ldots,$$

$$\mathrm{P}u''^2 = \frac{\mathrm{MR}^2(r^2 - z^2)}{i^4} + \frac{\mathrm{BR}^3z(r^2 - z^2)}{i^3r^3} - \frac{\mathrm{NR}^2(r^2 - z^2)}{i^3} - \ldots.$$

De plus, en faisant, pour abréger,

$$\Gamma = \frac{\mathrm{R}^2[d(r^2)]^2 + r^2[d(\mathrm{R}z)]^2 - 2\mathrm{R}z\,d(\mathrm{R}z)\,d(r^2)}{dt^2} + \frac{2\sigma[\mathrm{R}z\,d(r^2) - r^2\,d(\mathrm{R}z)]}{dt} + r^2\sigma^2,$$

$$\Delta = \frac{\mathrm{R}^2[d(\mathrm{R}z)]^2 + r^2[d(\mathrm{R}^2)]^2 - 2\mathrm{R}z\,d(\mathrm{R}z)\,d(\mathrm{R}^2)}{dt^2} + \frac{2\sigma[\mathrm{R}^2d(\mathrm{R}z) - \mathrm{R}z\,d(\mathrm{R}^2)]}{dt} + \mathrm{R}^2\sigma^2,$$

$$\Lambda = \frac{\mathrm{R}z\left[d(\mathrm{R}^2)\,d(r^2) + [d(\mathrm{R}z)]^2\right] - d(\mathrm{R}z)\,d(\mathrm{R}^2r^2)}{dt^2} - \frac{\sigma[\mathrm{R}^2\,d(r^2) - r^2\,d(\mathrm{R}^2)]}{dt} - \mathrm{R}z\sigma^2,$$

on aura

$$\Sigma = \frac{\Gamma}{i^2}, \quad \Sigma' = \frac{\Delta}{i^4}, \quad \Sigma'' = \frac{\Delta}{i^4} + \frac{2\Lambda}{i^3} + \frac{\Gamma}{i^2};$$

donc, substituant ces valeurs dans les expressions de $\sin\psi$ et $\sin\psi'$ (Article XXII), et faisant encore

$$h = \frac{k}{i^2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right),$$

$$\lambda = R^2(r^2 - z^2)\left(M + i\frac{BRz}{r^3}\right) - \frac{\Delta}{4},$$

$$\mu = R^2(r^2 - z^2)N + \frac{\Lambda}{2},$$

on aura, aux quantités de l'ordre i^2 près,

$$(l) \qquad \begin{cases} \sin\psi = \dfrac{A\sqrt{\lambda} + B\sqrt{\lambda - i\mu}}{k(A+B)r}, \\[2ex] \sin\psi' = \dfrac{iB\sqrt{\lambda - i\mu}}{k(A+B)R}, \end{cases}$$

ou bien

$$(l') \qquad \begin{cases} \sin\psi = \dfrac{\sqrt{\lambda}}{kr} - \dfrac{iB\mu}{2k(A+B)r\sqrt{\lambda}}, \\[2ex] \sin\psi' = \dfrac{iB\sqrt{\lambda}}{k(A+B)R}, \end{cases}$$

la quantité k étant une constante qu'on déterminera par l'équation (P'), comme on le verra ci-dessous.

Ainsi l'on connaîtra par ces formules les latitudes ψ et ψ' des Corps B et C par rapport à un plan fixe passant par A.

On voit par là qu'on aura à très-peu près

$$\frac{\sin\psi'}{\sin\psi} = \frac{iBr}{(A+B)R} = \frac{Br}{(A+B)r'},$$

ce qui donne un rapport bien simple et très-remarquable entre les latitudes des Corps B et C.

38.

XXXVII.

On trouvera ensuite

$$\Pi = \mathrm{L}r^2 - \left(\frac{d(r^2)}{2dt}\right)^2 - \frac{i\mathrm{D}(15z^3 - 9r^2z)r^2}{2\mathrm{R}^4} - \ldots,$$

$$\Pi' = \frac{1}{i^4}\left[\mathrm{MR}^2 - \left(\frac{d(\mathrm{R}^2)}{2dt}\right)^2\right] + \ldots,$$

$$\Pi'' = \frac{1}{i^4}\left[\mathrm{MR}^2 - \left(\frac{d(\mathrm{R}^2)}{2dt}\right)^2\right] + \frac{1}{i^3}\left(\frac{\mathrm{BR}^3z}{r^3} - \mathrm{NR}^2 - 2\mathrm{MR}z + \frac{d(\mathrm{R}^2)\,d(\mathrm{R}z)}{dt^2}\right) + \ldots,$$

et, à cause de

$$v = \frac{\mathrm{M}}{i^2} + \frac{1}{i}\left(\frac{\mathrm{BR}z}{r^3} - \frac{\mathrm{N}}{2}\right) + \ldots,$$

$$v' = -\frac{\mathrm{N}}{2i} + \mathrm{L} - \frac{\mathrm{B}}{2r} + \frac{3\mathrm{D}(3z^2 - r^2)}{4\mathrm{R}^3} + \ldots,$$

$$v'' = \frac{\mathrm{N}}{2i} + \frac{\mathrm{B}}{2r} - \frac{3\mathrm{D}(3z^2 - r^2)}{4\mathrm{R}^3} + \ldots,$$

on aura de même (Article XXII)

$$\Psi = \frac{1}{i^4}\left[\mathrm{MR}^2 - \left(\frac{d(\mathrm{R}^2)}{2dt}\right)^2\right] + \frac{1}{i^3}\left[\frac{\mathrm{BR}^3z}{r^3} - \frac{\mathrm{NR}^2}{2} - \mathrm{MR}z + \frac{d(\mathrm{R}^2)\,d(\mathrm{R}z)}{2dt^2}\right] + \ldots,$$

$$\Psi' = \frac{1}{i^2}\left[\frac{\mathrm{NR}z}{2} - \left(\frac{d(\mathrm{R}z)}{2dt}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{4}\right]$$
$$+ \frac{1}{i}\left[-\left(\mathrm{L} - \frac{\mathrm{B}}{2r} + \frac{3\mathrm{D}(3z^2 - r^2)}{4\mathrm{R}^3}\right)\mathrm{R}z - \frac{\mathrm{N}r^2}{2} + \frac{d(\mathrm{R}z)\,d(r^2)}{2dt^2}\right] + \ldots,$$

$$\Psi'' = \frac{1}{i^2}\left[\frac{\mathrm{NR}z}{2} - \left(\frac{d(\mathrm{R}z)}{2dt}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{4}\right] + \frac{1}{i}\left(\frac{\mathrm{B}}{2r} - \frac{3\mathrm{D}(3z^2 - r^2)}{4\mathrm{R}^3}\right)\mathrm{R}z + \ldots.$$

Donc, si l'on substitue ces valeurs dans les expressions de $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\varphi'}{dt}$, et que l'on fasse, pour abréger,

$$\varpi = \frac{NRz}{2} - \left(\frac{d(Rz)}{2\,dt}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{4},$$

$$\varepsilon = \frac{BRz}{2r} - \frac{3D(3z^2 - r^2)z}{4R^2},$$

$$\eta = -LRz - \frac{Nr^2}{2} + \frac{d(Rz)\,d(r^2)}{2\,dt^2},$$

$$\rho = MR^2 - \left(\frac{d(R^2)}{2\,dt}\right)^2,$$

$$\nu = -MRz - \frac{NR^2}{2} + \frac{d(R^2)\,d(Rz)}{2\,dt^2},$$

on aura

$$(m)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\varpi + i\left(\varepsilon + \dfrac{B}{A+B}\eta\right)}{kr^2\cos^2\psi}, \\ \frac{d\varphi'}{dt} &= \frac{\rho + \dfrac{iB}{A+B}\left(\dfrac{BR^3z}{r^3} + \nu\right)}{kR^2\cos^2\psi'}. \end{aligned}\right.$$

XXXVIII.

Voyons maintenant comment on doit déterminer la constante k et les autres constantes du Problème. Pour cela, on supposera, comme dans l'Article XXII, que, lorsque $t = 0$, on ait

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{dr'}{dt} = 0, \quad \zeta'' = 0;$$

par conséquent

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{dR}{dt} = 0, \quad z = r, \quad \frac{dz}{dt} = 0,$$

à cause de $z = r\cos\zeta''$; et l'équation (P') de l'Article cité donnera

$$(n)\qquad k^2 = MR^2 + iB\left(\frac{R^3}{r^2} - \frac{2MRr + NR^2}{A+B}\right),$$

d'où l'on tirera aisément la valeur de k, en ayant soin de rapporter les valeurs de R, r et de M, N au point où $t = 0$.

De plus on se souviendra que la valeur de σ doit être prise en sorte qu'elle soit nulle lorsque $t = 0$.

XXXIX.

Au reste il est bon de remarquer que, dès que l'on aura trouvé les latitudes ψ et ψ', on pourra avoir aisément les valeurs des vitesses en longitude $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\varphi'}{dt}$ par le moyen des vitesses réelles u et u'.

En effet, nommant $d\theta$ l'angle décrit par le rayon r dans le temps dt, on aura, comme nous l'avons vu dans l'Article XIX,

$$u^2 dt^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2;$$

or il est facile de voir que

$$d\theta^2 = \cos^2\psi\, d\varphi^2 + d\psi^2;$$

donc

$$u^2 dt^2 = r^2 \cos^2\psi\, d\varphi^2 + r^2 d\psi^2 + dr^2,$$

donc

$$(m')\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{\frac{u^2}{r^2} - \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dr}{r\,dt}\right)^2}}{\cos\psi},\\ &\text{et de même}\\ &\frac{d\varphi'}{dt} = \frac{\sqrt{\frac{u'^2}{r'^2} - \left(\frac{d\psi'}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dr'}{r'\,dt}\right)^2}}{\cos\psi'}; \end{aligned}\right.$$

donc, en substituant les valeurs de u^2 et u'^2, on aura

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{\frac{L}{r^2} - \frac{d\psi^2}{dt^2} - \left(\frac{dr}{r\,dt}\right)^2 - \frac{iD(15z^3 - 9r^2 z)}{2R^4 r^2}}}{\cos\psi},$$

$$\frac{d\varphi'}{dt} = \frac{\sqrt{\frac{M}{R^2} - \frac{d\psi'^2}{dt^2} - \left(\frac{dR}{R\,dt}\right)^2 + \frac{iBz}{Rr^3}}}{\cos\psi'}.$$

Ces formules peuvent quelquefois être plus commodes que les précédentes, surtout lorsque les quantités r, R varient très-peu, et que les latitudes ψ, ψ' sont fort petites.

CHAPITRE IV.

DE LA THÉORIE DE LA LUNE.

---

§ I. — *Application des formules du Chapitre précédent à cette Théorie.*

XL.

Pour faire cette application, il n'y a qu'à imaginer que le Corps A, que nous avons regardé comme immobile et auquel nous avons rapporté les mouvements des deux autres, soit la Terre, que le Corps B soit la Lune, et que le Corps C, que nous avons supposé beaucoup plus éloigné du Corps A que ne l'est le Corps B, soit le Soleil, dont la distance à la Terre est en effet très-grande par rapport à la distance entre la Terre et la Lune. Ainsi r sera le rayon vecteur de l'orbite de la Lune autour de la Terre, r' le rayon vecteur de l'orbite apparente du Soleil, et r'' sera la distance rectiligne entre le Soleil et la Lune.

De plus ψ représentera la latitude de la Lune par rapport à un plan fixe que nous prendrons pour l'écliptique, et ψ' représentera la latitude du Soleil; φ sera la longitude de la Lune et φ' celle du Soleil, comptées à l'ordinaire dans l'écliptique.

Pour savoir quel est ce plan que nous prenons ici pour l'écliptique, et que nous avons vu dans le Chapitre I être celui par rapport auquel les mouvements des Corps B et C sont les plus simples qu'il est possible, nous remarquerons que, d'après les suppositions de l'Article XXXVIII, on trouve, lorsque $t=0$,

$$\lambda=0,\quad \mu=0,\quad \nu=0;$$

de sorte qu'on aura aussi [Article XXXVI, formule (l)]

$$\psi=0,\quad \psi'=0;$$

donc, puisqu'on a en même temps (Article XXXVIII)

$$\frac{dr}{dt}=0,\quad \frac{dr'}{dt}=0,\quad \zeta''=0,$$

il s'ensuit que le plan dont il s'agit est celui dans lequel le Soleil et la Lune se trouvent en même temps, lorsqu'ils sont à la fois en conjonction et dans leurs apsides.

Maintenant, puisque nous avons fait (Article XXXIV)

$$r'=\frac{R}{i},$$

on aura

$$\frac{r}{r'}=i\,\frac{r}{R};$$

de sorte que, si l'on suppose (ce qui est permis) que les valeurs moyennes de r et de R soient égales à l'unité, on aura i égal à la valeur moyenne de $\frac{r}{r'}$, c'est-à-dire,

$$i=\frac{\text{parall. ☉}}{\text{parall. moy. ☾}};$$

or, en prenant $57'30''$ pour la parallaxe horizontale moyenne de la Lune et $9''$ pour celle du Soleil, on aurait $i=\frac{9}{3450}=\frac{1}{383}$ à très-peu près; d'où l'on voit que la quantité i sera en effet très-petite.

Or, comme les observations nous apprennent que les orbites de la Lune et du Soleil sont presque circulaires, il est clair que les variations des quantités r et R devront être fort petites; de sorte que, si l'on fait

$$r^2=1+x,\quad R^2=1+X,$$

x et X devront être des quantités assez petites par rapport à l'unité; et de plus elles ne devront contenir aucun terme constant; autrement les valeurs moyennes de r et R ne seraient plus égales à 1, contre l'hypothèse.

Donc le carré de la vitesse angulaire de la Lune $\frac{u^2}{r^2}$ sera à peu près égal à L, ou égal à

$$A + B - D(3z^2 - 1),$$

et le carré de la vitesse angulaire du Soleil autour de la Terre $\frac{u'^2}{r'^2}$ sera à peu près égal à M, ou égal à D (Article XXXVI).

Mais on sait que la vitesse angulaire de la Lune est à celle du Soleil environ comme 13 à 1, de sorte que leurs carrés sont à peu près entre eux comme 169 à 1; d'où l'on voit que la quantité D doit être beaucoup plus petite que la quantité A + B, et cela dans une raison peu différente de 1 à 169. Donc, si l'on suppose, ce qui est permis,

$$A + B = 1,$$

et que l'on fasse

$$D = \alpha^2,$$

on aura $\alpha = \frac{1}{13}$ environ, et α^2 sera presque égal à $2i$; en sorte que l'on pourra regarder les quantités i et α^2 comme du même ordre.

De plus on a, comme on sait,

$$\frac{☾}{☉} = i^3 6,$$

le nombre 6 étant, par la Théorie de la précession des équinoxes de M. d'Alembert, égal à environ $\frac{7}{3}$, et par celle des marées de M. Daniel Bernoulli égal à $\frac{5}{2}$; donc, puisque (Article XXXIV)

$$☾ = B, \quad ☉ = C = \frac{D}{i^3},$$

on aura

$$\mathrm{B} = 6\mathrm{D} = 6\alpha^2;$$

ainsi les quantités B et D seront à peu près du même ordre i.

Au reste, pour ce qui regarde la vraie valeur de α, il faudra la déterminer par le rapport connu entre le mouvement moyen du Soleil et celui de la Lune, rapport qui est, suivant les nouvelles Tables de M. Mayer, de

$$11^{\mathrm{s}}29^\circ 45' 40'',7 \quad \text{à} \quad 160^{\mathrm{s}}9^\circ 23' 5''\frac{1}{2}.$$

Quant au coefficient 6, qui est encore assez incertain, comme il se trouve partout multiplié par les coefficients très-petits α^2 et i, il suffira de le connaître à peu près, puisque l'erreur qui en pourrait résulter ne serait que de l'ordre de i^2.

XLI.

On fera donc toutes ces substitutions dans les formules (f), (g), (h), (i) du Chapitre précédent, et, mettant pour plus de simplicité y à la place de Rz, on aura

$$(p) \quad \begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} = {} & \mathrm{y}(1+\mathrm{x})^{-\frac{3}{2}} - 3\alpha^2 \mathrm{y}(1+\mathrm{X})^{-\frac{3}{2}} \\ & - i\alpha^2\left[6(1+\mathrm{x})^{-\frac{1}{2}} + \frac{9}{2}\mathrm{y}^2(1+\mathrm{X})^{-\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}(1+\mathrm{x})(1+\mathrm{X})^{-\frac{3}{2}}\right] \\ & - i^2\alpha^2\left[10\mathrm{y}^3(1+\mathrm{X})^{-\frac{7}{2}} - 6\mathrm{y}(1+\mathrm{x})(1+\mathrm{X})^{-\frac{5}{2}}\right] - \ldots, \end{aligned}$$

$$(q) \quad \begin{aligned} & \frac{d^2\mathrm{x}}{2\,dt^2} - (1+\mathrm{x})^{-\frac{1}{2}} \\ & - \alpha^2\left\{\begin{aligned} & 3\mathrm{y}^2(1+\mathrm{X})^{-\frac{5}{2}} - (1+\mathrm{x})(1+\mathrm{X})^{-\frac{3}{2}} \\ & - \int (1+\mathrm{X})^{-\frac{3}{2}} d\mathrm{x} + 3\int \mathrm{y}(1+\mathrm{X})^{-\frac{5}{2}}(d\mathrm{y} - \sigma\,dt) \end{aligned}\right\} \\ & - i\alpha^2\left\{\begin{aligned} & \frac{15}{2}\mathrm{y}^3(1+\mathrm{X})^{-\frac{7}{2}} - \frac{9}{2}\mathrm{y}(1+\mathrm{x})(1+\mathrm{X})^{-\frac{5}{2}} \\ & - 3\int \mathrm{y}(1+\mathrm{X})^{-\frac{5}{2}} d\mathrm{x} + \frac{15}{2}\int \mathrm{y}^2(1+\mathrm{X})^{-\frac{5}{2}}(d\mathrm{y} - \sigma\,dt) \\ & - \frac{3}{2}\int (1+\mathrm{x})(1+\mathrm{X})^{-\frac{3}{2}}(d\mathrm{y} - \sigma\,dt) \end{aligned}\right\} \end{aligned}$$

$$-i^2\alpha^2\left\{\begin{aligned}&\frac{35}{2}y^4(1+X)^{-\frac{9}{2}}-15y^2(1+x)(1+X)^{-\frac{7}{2}}+\frac{3}{2}(1+x)^2(1+X)^{-\frac{5}{2}}\\&-\frac{15}{2}\int y^2(1+X)^{-\frac{7}{2}}dx+\frac{3}{2}\int(1+x)(1+X)^{-\frac{5}{2}}dx\\&+\frac{35}{2}\int y^3(1+X)^{-\frac{9}{2}}(dy-\sigma\,dt)\\&-\frac{15}{2}\int y(1+x)(1+X)^{-\frac{7}{2}}(dy-\sigma\,dt)\end{aligned}\right\}$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \text{const.},$$

$$(r)\quad \frac{d^2X}{2\,dt^2}-\alpha^2(1+X)^{-\frac{1}{2}}$$
$$+\,i\alpha^2 6\left[y(1+x)^{-\frac{3}{2}}+\int(1+x)^{-\frac{3}{2}}(dy+\sigma\,dt)\right]+\ldots=\text{const.},$$

$$(s)\quad \frac{d^2y}{dt^2}+y(1+x)^{-\frac{3}{2}}+\int(1+x)^{-\frac{3}{2}}(dy+\sigma\,dt)$$
$$+\,\alpha^2\,y(1+X)^{-\frac{3}{2}}$$
$$-i\alpha^2\left\{\begin{aligned}&6(1+x)^{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}y^2(1+X)^{-\frac{5}{2}}-\frac{1}{2}(1+x)(1+X)^{-\frac{3}{2}}\\&-\int(1+X)^{-\frac{3}{2}}dx+3\int y(1+X)^{-\frac{5}{2}}(dy-\sigma\,dt)\end{aligned}\right\}$$
$$-i^2\alpha^2\left\{\begin{aligned}&5y^3(1+X)^{-\frac{7}{2}}-3y(1+x)(1+X)^{-\frac{5}{2}}\\&-3\int y(1+X)^{-\frac{5}{2}}dx+\frac{15}{2}\int y^2(1+X)^{-\frac{7}{2}}(dy-\sigma\,dt)\\&-\frac{3}{2}\int(1+x)(1+X)^{-\frac{5}{2}}(dy-\sigma\,dt)\end{aligned}\right\}$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\text{const.}$$

Or, comme les quantités x et X sont assez petites, on aura assez exactement

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}-\frac{5x^3}{16}+\frac{35x^4}{128}-\ldots,$$
$$(1+x)^{-\frac{3}{2}}=1-\frac{3x}{2}+\frac{15x^2}{8}-\frac{35x^3}{16}-\ldots,$$
$$(1+X)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{X}{2}+\frac{3X^2}{8}-\frac{5X^3}{16}+\frac{35X^4}{128}-\ldots,$$

$$(1+X)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3X}{2} + \frac{15X^2}{8} - \frac{35X^3}{16} + \ldots,$$

$$(1+X)^{-\frac{5}{2}} = 1 - \frac{5X}{2} + \frac{35X^2}{8} - \frac{105X^3}{16} + \ldots,$$

$$(1+X)^{-\frac{7}{2}} = 1 - \frac{7X}{2} + \frac{63X^2}{8} - \ldots,$$

$$(1+X)^{-\frac{9}{2}} = 1 - \frac{9X}{2} + \frac{99X^2}{8} - \ldots.$$

De sorte qu'en substituant ces valeurs dans les équations précédentes, et mettant de plus dans les trois dernières la valeur de σ tirée de la première par l'intégration, on aura trois équations en x, X, y et t, qui seront intégrables, du moins par approximation, par les méthodes connues, puisque les variables y seront toutes sous une forme rationnelle et entière.

XLII.

Ensuite on aura (Article XXXVI)

$$L = \frac{d^2x}{2\,dt^2} + (1+x)^{-\frac{1}{2}} - \alpha^2\left[3y^2(1+X)^{-\frac{5}{2}} - (1+x)(1+X)^{-\frac{3}{2}}\right],$$

$$M = \frac{d^2X}{2\,dt^2} + \alpha^2(1+X)^{-\frac{1}{2}},$$

$$N = \frac{d^2y}{dt^2} + y(1+x)^{-\frac{3}{2}} - \alpha^2 y(1+X)^{-\frac{3}{2}},$$

et de là

$$\lambda = M[(1+x)(1+X) - y^2] - \frac{1}{4}(1+X)\left(\frac{dy}{dt}+\sigma\right)^2 + \frac{1}{2}y\frac{dX}{dt}\left(\frac{dy}{dt}+\sigma\right) - \frac{1}{4}(1+x)\frac{dX^2}{dt^2}$$
$$+ i6\alpha^2\left[y(1+x)^{-\frac{1}{2}}(1+X) - y^3(1+x)^{-\frac{3}{2}}\right],$$

$$\mu = N[(1+x)(1+X) - y^2] - \frac{y}{2}\left(\sigma^2 + \frac{dy^2}{dt^2} - \frac{dx\,dX}{dt^2}\right)$$
$$- \frac{1}{2}(1+X)\frac{dx}{dt}\left(\frac{dy}{dt}+\sigma\right) - \frac{1}{2}(1+x)\frac{dX}{dt}\left(\frac{dy}{dt}-\sigma\right);$$

moyennant quoi on aura

$$(t)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin\psi &= \frac{(1+\mathrm{x})^{-\frac{1}{2}}}{k}\left(\sqrt{\lambda}-\frac{i\beta\alpha^2}{2}\,\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\right),\\ \sin\psi' &= \frac{i\beta\alpha^2(1+\mathrm{X})^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\lambda}}{k}; \end{aligned}\right.$$

enfin les formules de l'Article XXXIX donneront

$$(u)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{\cos\psi}\sqrt{\mathrm{L}(1+\mathrm{x})^{-1}-(1+\mathrm{x})^{-2}\frac{d\mathrm{x}^2}{4dt^2}-\frac{d\psi^2}{dt^2}-i\alpha^2\left[\frac{15}{2}\mathrm{y}^3(1+\mathrm{x})^{-1}(1+\mathrm{X})^{-\frac{7}{2}}-\frac{9}{2}\mathrm{y}(1+\mathrm{X})^{-\frac{5}{2}}\right]},\\ \frac{d\varphi'}{dt} &= \frac{1}{\cos\psi'}\sqrt{\mathrm{M}(1+\mathrm{X})^{-1}-(1+\mathrm{X})^{-2}\frac{d\mathrm{X}^2}{4dt^2}-\frac{d\psi'^2}{dt^2}+i\beta\alpha^2\mathrm{y}(1+\mathrm{X})^{-1}(1+\mathrm{x})^{-\frac{3}{2}}}; \end{aligned}\right.$$

et quant à la constante k, on la déterminera par l'équation

$$(x)\qquad k^2 = \mathrm{M}(1+\mathrm{X}-2i\alpha^2\beta\mathrm{y}) + i\alpha^2\beta(1+\mathrm{X})\left[(1+\mathrm{x})^{-\frac{3}{2}}\mathrm{y}-\mathrm{N}\right],$$

en y faisant $t=0$.

On se souviendra au reste que les valeurs de x, X et y doivent être prises en sorte que $\frac{d\mathrm{x}}{dt}$, $\frac{d\mathrm{X}}{dt}$, $\frac{d\mathrm{y}}{dt}$ soient nulles lorsque $t=0$, et que y devienne alors

$$\mathrm{R}r = (1+\mathrm{x})^{\frac{1}{2}}(1+\mathrm{X})^{\frac{1}{2}};$$

de plus il faudra aussi que la valeur de σ tirée par l'intégration de l'équation (p) soit telle, qu'elle s'évanouisse lorsque $t=0$.

§ II. — *De l'intégration des équations qui donnent les mouvements de la Lune et du Soleil.*

XLIII.

Le Problème des mouvements de la Lune et du Soleil se réduit à la recherche des quantités x, X et y, lesquelles dépendent de l'intégration des équations (q), (r), (s) de l'Article XLI, à quoi il faut joindre l'équation (p) comme subsidiaire. Si les variables x, X, y ne se trouvaient dans les équations que sous la forme linéaire, l'intégration serait facile par les méthodes connues; or il est aisé de voir que les termes où ces variables se trouvent multipliées entre elles sont tous fort petits, à cause que les coefficients α^2 et i sont très-petits et que les variables x et X sont aussi supposées fort petites; ainsi l'on pourra d'abord négliger les termes dont nous venons de parler, pour pouvoir trouver les premières valeurs approchées des variables, et ces valeurs serviront ensuite à en trouver d'autres plus exactes, et ainsi de suite.

Pour donner un essai du calcul qu'il faudra faire pour cet objet, nous rejetterons d'abord dans les équations du paragraphe précédent tous les termes multipliés par i, et qui dépendent de la parallaxe du Soleil; l'erreur sera d'autant plus petite que ces termes sont en même temps multipliés par la quantité très-petite α^2.

De cette manière, les équations (p), (q), (r), (s) deviendront

$$(\alpha) \qquad \frac{d\sigma}{dt} = y(1+x)^{-\frac{3}{2}} - 3\alpha^2 y(1+X)^{-\frac{3}{2}},$$

$$(\beta) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - 2(1+x)^{-\frac{1}{2}} - 2\alpha^2\left\{\begin{array}{l} 3y^2(1+X)^{-\frac{5}{2}} - (1+x)(1+X)^{-\frac{3}{2}} \\ -\int(1+X)^{-\frac{3}{2}}dx + 3\int y(1+X)^{-\frac{5}{2}}(dy - \sigma\,dt) \end{array}\right\} - \ldots\ldots = \text{const.},$$

$$(\gamma) \qquad \frac{d^2X}{dt^2} - 2\alpha^2(1+X)^{-\frac{1}{2}} = \text{const.},$$

$$(\delta) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + y(1+x)^{-\frac{3}{2}} + \alpha^2 y(1+X)^{-\frac{3}{2}} + \int(1+x)^{-\frac{3}{2}}(dy + \sigma\,dt) = \text{const.},$$

où il n'y aura plus qu'à réduire en série les puissances de $1+x$ et $1+X$.

XLIV.

Négligeons encore les produits de deux ou de plusieurs dimensions de x et X, on aura, à la place des équations précédentes, celles-ci

$$\frac{d\sigma}{dt} = y\left(1 - 3\alpha^2 - \frac{3x}{2} + \frac{9\alpha^2 X}{2}\right),$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 x}{dt^2} + (1 + 4\alpha^2)x - \frac{3x^2}{4}\\
&\qquad - 2\alpha^2\left[3y^2\left(1 - \frac{5X}{2}\right) + \frac{3X}{2} + 3\int\left(1 - \frac{5X}{2}\right)y(dy - \sigma\, dt)\right] = \text{const.},
\end{aligned}$$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \alpha^2 X = \text{const.},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y\left(1 + \alpha^2 - \frac{3x}{2} - \frac{3\alpha^2 X}{2}\right) + \int\left(1 - \frac{3x}{2}\right)(dy + \sigma\, dt) = \text{const.},$$

lesquelles, en substituant la valeur de σ, se réduisent à ces trois-ci

$$(\varepsilon) \qquad \frac{d^2 X}{dt^2} + \alpha^2 X = \text{const.},$$

$$(\zeta) \quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2 x}{dt^2} + (1 + 4\alpha^2)x - \frac{3x^2}{2}\\
&\qquad - 3\alpha^2\left[3y^2 - (1 - 3\alpha^2)\left(\int y\, dt\right)^2 + 3\int y\, dt\int yx\, dt\right]\\
&\qquad + 3\alpha^2\left\{\begin{aligned}&(5y^2 - 1)X + 5\int Xy\, dy + 9\alpha^2\int y\, dt\int yX\, dt\\ &\qquad - 5(1 - 3\alpha^2)\int Xy\, dt\int y\, dt\end{aligned}\right\} = \text{const.},
\end{aligned}\right.$$

$$(\eta) \quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2 y}{dt^2} + (2 + \alpha^2)y + (1 - 3\alpha^2)\int dt\int y\, dt\\
&\qquad - \frac{3}{2}\left[yx + \int x\, dy + \int dt\int yx\, dt + (1 - 3\alpha^2)\int x\, dt\int y\, dt\right]\\
&\qquad\qquad - \frac{3\alpha^2}{2}\left(Xy - 3\int dt\int yX\, dt\right) = \text{const.}
\end{aligned}\right.$$

XLV.

Comme les variables x et X sont supposées fort petites vis-à-vis de la variable Y qui est finie, on peut d'abord négliger dans l'équation (η) les termes qui renferment x et X; on aura ainsi cette première équation approchée

$$\frac{d^2 \mathrm{Y}}{dt^2} + (2 + \alpha^2)\mathrm{Y} + (1 - 3\alpha^2)\int dt \int \mathrm{Y}\, dt = \text{const.},$$

laquelle étant différentiée deux fois devient

$$\frac{d^4 \mathrm{Y}}{dt^4} + (2 + \alpha^2)\frac{d^2 \mathrm{Y}}{dt^2} + (1 - 3\alpha^2)\mathrm{Y} = 0,$$

qui est intégrable par les méthodes connues.

Pour en trouver l'intégrale, il n'y a qu'à supposer $\mathrm{Y} = f\cos(pt + a)$, ou bien, puisqu'on veut que $\frac{d\mathrm{Y}}{dt} = 0$ lorsque $t = 0$, on fera simplement

$$\mathrm{Y} = f\cos pt,$$

et l'on aura, après les substitutions, cette équation en p

$$p^4 - (2 + \alpha^2)p^2 + 1 - 3\alpha^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$p^2 = 1 + \frac{\alpha^2}{2} \pm 2\alpha\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{16}},$$

ou bien, en négligeant les puissances de α plus hautes que la seconde,

$$p^2 = 1 \pm 2\alpha + \frac{\alpha^2}{2}$$

et

$$p = 1 \pm \alpha - \frac{\alpha^2}{4}.$$

Donc, dénotant par p l'une de ces valeurs et par q l'autre, on aura

$$\mathrm{Y} = f\cos pt + g\cos qt,$$

f et g étant des constantes indéterminées qui doivent être telles, que lorsque $t = 0$ on ait $\mathrm{Y} = \mathrm{R}r = 1$; ce qui donne $f + g = 1$.

Cherchons maintenant, d'après cette première valeur approchée de Y, celle de $\sin\psi$ par les formules (t) de l'Article XLII; on aura $M = \alpha^2$, en négligeant les quantités x et X; donc aussi $k^2 = \alpha^2$, et $k = \alpha$ [équation (x)]; donc

$$\lambda = \alpha^2(1 - \text{Y}^2) - \frac{1}{4}\left(\frac{d\text{Y}}{dt} + \sigma\right)^2$$

et

$$\sin\psi = \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}.$$

Or

$$\frac{d\text{Y}}{dt} = -pf\sin pt - qg\sin qt,$$

$$\sigma = \int \text{Y}\, dt = \frac{f\sin pt}{p} + \frac{g\sin qt}{q};$$

donc

$$\frac{d\text{Y}}{dt} + \sigma = \frac{f(1-p^2)}{p}\sin pt + \frac{g(1-q^2)}{q}\sin qt = \mp 2\alpha(f\sin pt - g\sin qt),$$

en négligeant les puissances supérieures de α; donc

$$\begin{aligned}\lambda &= \alpha^2[1 - (f\cos pt + g\cos qt)^2 - (f\sin pt - g\sin qt)^2]\\ &= \alpha^2[1 - f^2 - g^2 - 2fg(\cos pt\cos qt - \sin pt\sin qt)]\\ &= \alpha^2[1 - f^2 - g^2 - 2fg\cos(p+q)t];\end{aligned}$$

mais

$$f + g = 1;$$

donc

$$1 = f^2 + g^2 + 2fg,$$

donc

$$\lambda = 2\alpha^2 fg[1 - \cos(p+q)t] = 4\alpha^2 fg\sin^2\left(\frac{p+q}{2}t\right),$$

donc enfin

$$\sin\psi = 2\sqrt{fg}\sin\left(\frac{p+q}{2}t\right).$$

Or, comme on doit avoir $f+g=1$, on peut supposer

$$f=\left(\cos\frac{l}{2}\right)^2, \quad g=\left(\sin\frac{l}{2}\right)^2,$$

et l'on aura

$$\sin\psi=\sin l\sin\left(\frac{p+q}{2}t\right),$$

l'angle l étant arbitraire et dépendant de l'inclinaison primitive de l'orbite de la Lune : en effet, il est clair que la plus grande valeur de $\sin\psi$ sera $\sin l$, de sorte que l exprimera la plus grande latitude, c'est-à-dire, l'inclinaison de l'orbite; donc, puisqu'on sait par les observations que l'inclinaison de l'orbite lunaire est assez petite, et d'environ $5^\circ 8'$, la constante g sera toujours très-petite et la constante f presque égale à l'unité; car on aura à peu près

$$g=(\sin 2^\circ 34')^2=\text{environ } \frac{1}{500};$$

de sorte que la quantité g est encore plus petite que la quantité i, qui exprime le rapport des parallaxes de la Lune et du Soleil; d'où il s'ensuit que l'on pourra négliger sans scrupule les termes qui se trouveront multipliés par le carré et les puissances plus hautes de g.

XLVI.

Il est facile de voir, par l'expression de $\sin\psi$ qu'on vient de trouver, que l'angle $\frac{p+q}{2}t$ n'est autre chose que la distance de la Lune au nœud, c'est-à-dire, l'argument de latitude; d'où il s'ensuit que, si l'on retranche cet angle de la longitude de la Lune dans son orbite, on aura la longitude du nœud. Donc, si ht dénote la longitude moyenne de la Lune, on aura $\left(h-\frac{p+q}{2}\right)t$ pour la longitude moyenne du nœud; or, les longitudes moyennes étant à peu près les mêmes dans les orbites des planètes et dans l'écliptique, ht sera la valeur moyenne de φ, et h sera par conséquent égale à ce qu'il doit y avoir de constant dans la valeur de $\frac{d\varphi}{dt}$. Or les formules de l'Article XLII donnent, en rejetant x et ψ,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{L} = \sqrt{1 - \alpha^2(3Y^2 - 1)},$$

et, à cause de $Y = f\cos pt$, on aura

$$h = \sqrt{1 - \left(\frac{3f^2}{2} - 1\right)\alpha^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{4} \quad \text{à peu près.}$$

Mais on a aussi

$$\frac{p+q}{2} = 1 - \frac{\alpha^2}{4},$$

d'où l'on voit que la position du nœud est fixe, du moins par cette première approximation; ce qui ne doit pas paraître surprenant, vu que les valeurs de p et q ne peuvent tout au plus être censées exactes qu'aux quantités de l'ordre de α^2 près.

Pour savoir maintenant laquelle des deux valeurs

$$1 \pm \alpha - \frac{\alpha^2}{4}$$

doit être prise pour p, on remarquera qu'en supposant l'inclinaison de l'orbite nulle on a

$$Y = f\cos pt = \cos pt;$$

mais on a (Articles XXXIV et XLI)

$$Y = Rz = Rr\cos\zeta'' = \cos\zeta'';$$

donc

$$\cos pt = \cos\zeta'' \quad \text{et} \quad pt = \zeta'' = \varphi - \varphi',$$

puisque ζ'' n'est autre chose que l'angle compris entre les deux rayons r et r'; donc

$$p = h - h',$$

en nommant ht et $h't$ les valeurs moyennes de φ et de φ'; or on a déjà trouvé $h = 1 - \frac{\alpha^2}{4}$ et, pour avoir h', on prendra la partie constante de $\frac{d\varphi'}{dt}$, qui est $=\sqrt{\mathrm{M}}=\alpha$; de sorte que $h'=\alpha$, et par conséquent

$$p=1-\alpha-\frac{\alpha^2}{4};$$

donc

$$q=1+\alpha-\frac{\alpha^2}{4}.$$

Ainsi il faudra toujours avoir soin dans la suite de prendre pour p une valeur telle, que ses deux premiers termes soient $1-\alpha$, et pour q une valeur dont les deux premiers termes soient $1+\alpha$; cette remarque est d'autant plus importante que les quantités p et q seront données dorénavant par des équations particulières dont chacune montera cependant au quatrième degré, comme on le verra ci-après.

XLVII.

Ayant trouvé la première valeur approchée de Y, on la substituera dans l'équation (ζ) qui donne la valeur de X, en y négligeant d'abord les termes où X et Y sont mêlés; ce qui la réduit à celle-ci

$$\frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2}+(1+4\alpha^2)\mathrm{X}-\alpha^2\left[9\mathrm{Y}^2-3\left(\int\mathrm{Y}\,dt\right)^2\right]=\text{const.};$$

or, puisque

$$\mathrm{Y}=f\cos pt+g\cos qt,$$

on aura, en négligeant les g^2,

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}^2&=f^2\cos^2 pt+2fg\cos pt\cos qt\\&=\frac{1}{2}f^2(1+\cos 2pt)+fg[\cos(p+q)t+\cos(p-q)t],\end{aligned}$$

et

$$\int\mathrm{Y}\,dt=\frac{f\sin pt}{p}+\frac{g\sin qt}{q},$$

$$\begin{aligned}\left(\int\mathrm{Y}\,dt\right)^2&=\frac{f^2}{p^2}\sin^2 pt+\frac{2fg}{pq}\sin pt\sin qt\\&=\frac{f^2}{2p^2}(1-\cos 2pt)-\frac{fg}{pq}[\cos(p+q)t-\cos(p-q)t];\end{aligned}$$

donc, substituant ces valeurs, et rejetant tous les termes constants, à cause qu'il ne doit y en avoir aucun dans la valeur de x par l'hypothèse, on aura

$$\frac{d^2x}{dt^2}+(1+4\alpha^2)x-\frac{3\alpha^2f^2(3p^2+1)}{2p^2}\cos 2pt$$
$$-\frac{3\alpha^2fg}{pq}[(3pq+1)\cos(p+q)t+(3pq-1)\cos(p-q)t]=0.$$

Ainsi la valeur de x sera de cette forme

$$x=a\cos mt+\alpha^2f^2A\cos 2pt+\alpha^2fg[B\cos(p+q)t+B_1\cos(p-q)t],$$

et, la substitution faite, on aura

$$a\cos mt.(-m^2+1+4\alpha^2)$$
$$+\alpha^2f^2\cos 2pt\left[A(-4p^2+1+4\alpha^2)-\frac{3(3p^2+1)}{2p^2}\right]$$
$$+\alpha^2fg\cos(p+q)t\left[B[-(p+q)^2+1+4\alpha^2]-\frac{3(3pq+1)}{pq}\right]$$
$$+\alpha^2fg\cos(p-q)t\left[B_1[-(p-q)^2+1+4\alpha^2]-\frac{3(3pq-1)}{pq}\right]=0.$$

Donc, égalant à zéro les coefficients de chaque cosinus, on aura les équations suivantes

$$-m^2+1+4\alpha^2=0,$$
$$A[-4p^2+1+4\alpha^2]-\frac{3(3p^2+1)}{2p^2}=0,$$
$$B[-(p+q)^2+1+4\alpha^2]-\frac{3(3pq+1)}{pq}=0,$$
$$B_1[-(p-q)^2+1+4\alpha^2]-\frac{3(3pq-1)}{pq}=0,$$

d'où l'on tire

$$m = \sqrt{1+4\alpha^2},$$

$$A = \frac{3(3p^2+1)}{2p^2(-4p^2+1+4\alpha^2)} = -2 \quad \text{à peu près},$$

$$B = \frac{3(3pq+1)}{pq[-(p+q)^2+1+4\alpha^2]} = -4,$$

$$B_1 = \frac{3(3pq-1)}{pq[-(p-q)^2+1+4\alpha^2]} = 6.$$

La constante α, qui est demeurée indéterminée, dépend de l'excentricité de l'orbite lunaire, et doit par conséquent être fixée par les observations.

Ainsi l'angle mt représentera l'anomalie moyenne de la Lune, c'est-à-dire, sa distance à l'apogée; de sorte que $(h-m)t$ sera la longitude moyenne de l'apogée, ht étant, comme plus haut, celle du lieu de la Lune; mais, comme nous avons négligé dans l'équation (ζ) des termes où x se trouve multiplié par α^2, on doit s'attendre à ce que la valeur de m ne sera exacte qu'aux quantités de l'ordre de α^2 près; c'est pourquoi on aura dans cette première approximation $m = 1$ et $m - h = 0$, en rejetant les α^2; ce qui donnerait les apsides fixes.

Venons maintenant à l'équation (ε) qui donne la valeur de X; et comme cette quantité ne doit contenir aucun terme tout constant, il est clair qu'on aura simplement

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \alpha^2 X = 0,$$

et que la valeur de X sera de cette forme

$$X = b \cos nt,$$

d'où l'on trouvera, par la substitution,

$$-n^2 + \alpha^2 = 0, \quad n = \alpha.$$

Le coefficient indéterminé b dépend de l'excentricité de l'orbite du Soleil, et nt est par conséquent l'angle de l'anomalie moyenne; de sorte que $(n-h')t$ sera la longitude de l'apogée du Soleil, qui est ici nulle à cause que

$$h'=\alpha, \quad n=\alpha.$$

XLVIII.

Puisque l'on connaît déjà la forme des premiers termes des valeurs y, x et X, on pourra aisément trouver les suivants et rectifier en même temps les coefficients de ceux qu'on a déjà trouvés; pour cela, il n'y aura qu'à substituer dans les termes négligés des équations proposées les valeurs qu'on vient de trouver, et l'on aura la forme des termes qu'il faudra introduire dans les nouvelles valeurs de y, x et X; on donnera à tous les termes des coefficients indéterminés, et, la substitution faite, on fera égaux à zéro les termes analogues, c'est-à-dire, ceux qui renferment les mêmes cosinus; on aura par là autant d'équations qu'il en faudra pour la détermination de tous les coefficients.

Ainsi, reprenant l'équation (η) et substituant dans les termes qui renferment x et X les valeurs de x, X et y trouvées ci-dessus, il viendra des termes de la forme

$$\begin{array}{ll}
af\cos(p\pm m)t, & ag\cos(q\pm m)t,\\
\alpha^2 f^2\cos(2p\pm p)t, & \alpha^2 f^2 g\cos(2p\pm q)t,\\
\alpha^2 f^2 g\cos(p\pm q\pm p)t, & \alpha^2 f^2 g\cos(p\pm q\pm q)t,\\
bf\cos(p\pm n)t, & bg\cos(q\pm n)t;
\end{array}$$

on supposera donc

$$\begin{aligned}
\text{y} &= f\cos pt + g\cos qt + afP\cos(p+m)t + afP_1\cos(p-m)t\\
&\quad + agQ\cos(q+m)t + agQ_1\cos(q-m)t + \ldots,
\end{aligned}$$

et, prenant pour x et X les expressions de l'Article XLVII, on aura l'équation suivante, dans laquelle j'ai négligé les quantités affectées de a^2, de $a\alpha^2$ et de α^4, à cause que l'on a négligé dans l'équation (η) les termes où x se trouvait à la seconde dimension,

$$
\begin{aligned}
&\cos pt\left[f\left(-p^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^2}{p^2}\right)-\frac{3\alpha^2 f^3 A}{4}\left(1-1-\frac{1}{p^2}+\frac{1-3\alpha^2}{p^2}\right)\right]\\
&+\cos qt\left[g\left(-q^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^2}{q^2}\right)-\frac{3\alpha^2 f^2 gB}{4}\left(1-\frac{p}{q}-\frac{1}{q^2}+\frac{1-3\alpha^2}{pq}\right)-\frac{3\alpha^2 f^2 gB_1}{4}\left(1+\frac{p}{q}-\frac{1}{q^2}-\frac{1-3\alpha^2}{pq}\right)\right]\\
&+\cos(p+m)t\left[afP\left(-(p+m)^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^2}{(p+m)^2}\right)-\frac{3af}{4}\left(1+\frac{p}{p+m}-\frac{1}{(p+m)^2}-\frac{1-3\alpha^2}{p(p+m)}\right)\right]\\
&+\cos(p-m)t\left[afP_1\left(-(p-m)^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^3}{(p-m)^2}\right)-\frac{3af}{4}\left(1+\frac{p}{p-m}-\frac{1}{(p-m)^2}-\frac{1-3\alpha^2}{p(p-m)}\right)\right]\\
&+\cos(q+m)t\left[agQ\left(-(q+m)^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^2}{(q+m)^2}\right)-\frac{3ag}{4}\left(1+\frac{q}{q+m}-\frac{1}{(q+m)^2}-\frac{1-3\alpha^2}{q(q+m)}\right)\right]\\
&+\cos(q-m)t\left[agQ_1\left(-(q-m)^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^2}{(q-m)^2}\right)-\frac{3ag}{4}\left(1+\frac{q}{q-m}-\frac{1}{(q-m)^2}-\frac{1-3\alpha^2}{(q-m)^2}\right)\right]+\ldots=0.
\end{aligned}
$$

On égalera donc à zéro les coefficients de ces différents cosinus, et l'on aura

$$1^\circ \qquad -p^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^2}{p^2}=0,$$

équation d'où l'on tirera la même valeur de p que ci-dessus (Article XLV), de sorte qu'on aura

$$p=1-\alpha-\frac{\alpha^2}{4},$$

et l'on sera maintenant assuré que cette valeur est exacte jusqu'aux quantités de l'ordre de α^2 inclusivement;

$$2^\circ \quad -q^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^2}{q^2}-\frac{3\alpha^2 f^2(B+B_1)}{4}\left(1-\frac{1}{q^2}\right)+\frac{3\alpha^2 f^2(B-B_1)}{4}\frac{p^2-1+3\alpha^2}{4}=0;$$

or, comme nous négligeons les quantités de l'ordre de α^4, on aura (en mettant pour p et q leurs valeurs approchées)

$$\frac{p^2-1+3\alpha^2}{pq}=-2\alpha,$$

de sorte que, à cause de $B=-4$ et $B_1=6$ (Article XLVII), l'équation précédente se réduira à

$$-q^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^2}{q^2}-\frac{3\alpha^2f^2}{2}\left(1-\frac{1}{q^2}\right)+15f^2\alpha^3=0,$$

ou bien

$$q^4-\left(2+\alpha^2-\frac{3\alpha^2f^2}{2}+15f^2\alpha^3\right)q^2+1-3\alpha^2-\frac{3\alpha^2f^2}{2}=0;$$

d'où l'on tire d'abord, aux quantités de l'ordre α^3 près, en ayant égard à la remarque de l'Article XLVI,

$$\begin{aligned}q^2&=1+\frac{\alpha^2}{2}-\frac{3\alpha^2f^2}{4}+2\alpha\sqrt{1+\frac{15f^2\alpha}{4}}\\&=1+2\alpha+\frac{\alpha^2}{2}-\frac{3\alpha^2f^2}{4}+\frac{15f^2\alpha^2}{4}\\&=1+2\alpha+\frac{\alpha^2}{2}+3f^2\alpha^2,\end{aligned}$$

et de là

$$q=1+\alpha+\frac{\alpha^2}{4}+\frac{3f^2\alpha^2}{2}-\frac{4\alpha^2}{8}=1+\alpha-\frac{\alpha^2}{4}+\frac{3f^2\alpha^2}{2};$$

on aura donc ici

$$\frac{p+q}{2}=1-\frac{\alpha^2}{4}+\frac{3f^2\alpha^2}{4};$$

par conséquent le mouvement moyen du nœud qui est représenté par $\left(h-\frac{p+q}{2}\right)t$ (Article XLVI) sera $=-\frac{3f^2\alpha^2}{4}t$, ce qui s'accorde avec les observations;

3° $$P\left[-(p+m)^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^2}{(p+m)^2}\right]-\frac{3}{4}\left[1+\frac{p}{p+m}-\frac{1}{(p+m)^2}-\frac{1-3\alpha^2}{p(p+m)}\right]=0;$$

$$4^{\circ}\quad P_1\left[-(p-m)^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^2}{(p-m)^2}\right]-\frac{3}{4}\left[1+\frac{p}{p-m}-\frac{1}{(p-m)^2}-\frac{1-3\alpha^2}{p(p-m)}\right]=0;$$

5° ....;

d'où l'on tire à peu près

$$P=-\frac{1}{4},\quad P_1=\frac{3}{4},\quad Q=-\frac{1}{4},\quad Q_1=\frac{3}{4},\ldots$$

XLIX.

On repassera présentement à l'équation (ζ) pour trouver une valeur de x plus exacte que celle de l'Article XLVII.

Pour cet effet, on commencera par substituer dans les termes de cette dernière équation qui suivent les deux premiers, à la place de x, X et y, leurs valeurs trouvées dans les Articles précédents, et négligeant les quantités de l'ordre de g^2, aussi bien que celles qui seraient affectées de α^2 multipliée par a^2, $a\alpha^2$, b^2, $b\alpha^2$ et α^4, à cause que nous avons rejeté dans la même équation les termes de l'ordre α^2 dans lesquels x et X pouvaient former ensemble des produits de deux dimensions, on aura par ces substitutions des termes de la forme

$$\begin{array}{lll}
\alpha^2 f^2 \cos 2pt, & \alpha^2 fg\cos(p\pm q)t, & \alpha^2 af^2\cos(p\pm m\pm p)t, \\
\alpha^2 agf\cos(p\pm m\pm q)t, & \alpha^4 f^4\cos 4pt, & \alpha^4 f^3 g\cos(3p\pm q)t, \\
\alpha^2 bf^2\cos(2p\pm n)t, & \alpha^2 b\cos nt, & \alpha^2 bgf\cos(p\pm q\pm n)t;
\end{array}$$

c'est pourquoi on supposera

$$\begin{aligned}
\mathrm{x} = {} & a\cos mt + \alpha f^2 A\cos 2pt \\
& + a^2 fgB\cos(p+q)t + \alpha^2 fgB_1\cos(p-q)t \\
& + \alpha^2 af^2 C\cos(2p+m)t + \alpha^2 af^2 C_1\cos(2p-m)t \\
& + \alpha^2 agfD\cos(p+q+m)t + \alpha^2 agf\cos(p+q-m)t \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et substituant cette valeur de x aussi bien que celles de y et X des Articles précédents, on aura, en négligeant ce qu'on doit négliger,

$$a\cos mt\left[-m^2+1+4\alpha^2-\frac{9\alpha^2 f^2}{2(p^2-m^2)}-9\alpha^2 f^2(P+P_1)+\frac{3\alpha^2 f^2}{p}\left(\frac{P}{p+m}+\frac{P_1}{p-m}\right)+\ldots\right]$$
$$+\alpha^2\cos 2pt\left[f^2 A\left(-4p^2+1+4\alpha^2-\frac{9\alpha^2 f^2}{2(p^2-4p^2)}\right)-\frac{9f^2}{2}-\frac{3(1-3\alpha^2)f^2}{2p^2}+\ldots\right]$$
$$+\alpha^2\cos(p+q)t\left[fgB\left(-(p+q)^2+1+4\alpha^2-\frac{9\alpha^2 f^2}{2[p^2-(p+q)^2]}\right)-\frac{3\alpha^2 f^2 gAB_1}{4}-9fg-\frac{3fg(1-3\alpha^2)}{pq}+\ldots\right]$$
$$+\alpha^2\cos(p-q)t\left[fgB_1\left(-(p-q)^2+1+4\alpha^2-\frac{9\alpha^2 f^2}{2[p^2-(p-q)^2]}\right)-\frac{3\alpha^2 f^3 gAB}{4}-9fg+\frac{3fg(1-3\alpha^2)}{pq}+\ldots\right]$$
$$+\alpha^2 a\cos(2p+m)t\left[f^2 C[-(2p+m)^2+1+4\alpha^2]-\frac{3f^2 A}{4}-9f^2 P-\frac{3f^2 P}{p(p+m)}+\frac{9f^2}{4(p+m)(2p+m)}+\ldots\right]$$
$$+\alpha^2 a\cos(2p-m)t\left[f^2 C_1[-(2p-m)^2+1+4\alpha^2]-\frac{3f^2 A}{4}-9f^2 P_1-\frac{3f^2 P_1}{p(p-m)}+\frac{9f^2}{4(p-m)(2p-m)}+\ldots\right].$$

Ainsi il n'y aura plus qu'à égaler à zéro les coefficients de ces différents cosinus, pour déterminer les inconnues m, A, B, B', C_1, C'_1, ...

Le coefficient de $\cos mt$ donnera la valeur de m exacte jusqu'aux quantités de l'ordre de α^2 inclusivement, et l'on aura, à cause de $P=-\frac{1}{4}$ et $P_1=\frac{3}{4}$ (Article précédent), l'équation

$$-m^2+1+4\alpha^2-\frac{9\alpha^2 f^2}{2(p^2-m^2)}-\frac{3\alpha^2 f^2}{4p(p+m)}+\frac{9\alpha^2 f^2}{4p(p-m)}-\frac{9\alpha^2 f^2}{2}=0,$$

ou bien

$$-m^2+1+4\alpha^2-\frac{3\alpha^2 f^2}{p(p+m)}-\frac{9\alpha^2 f^2}{2}=0,$$

d'où, en mettant pour f, p et m leurs valeurs approchées 1, on tire

$$m^2=1-2\alpha^2 \quad \text{et} \quad m=1-\alpha^2;$$

de sorte que le mouvement de l'apogée $(h-m)\,t$ deviendra $\frac{3\alpha^2}{4}t$, à cause de $h=1-\frac{\alpha^2}{4}$.

Comme notre dessein n'est point de donner ici une Théorie complète de la Lune, nous nous contenterons de ce léger essai, qui peut suffire pour donner une idée de la méthode qu'il faudra suivre dans l'intégration des équations différentielles de l'Article XLI, auxquelles nous avons réduit le Problème des mouvements de la Lune et du Soleil autour de la Terre.

Quand on aura trouvé les valeurs de x, X et y en t, c'est-à-dire, de r, r' et r'', on aura d'abord les latitudes ψ et ψ' par les formules (t) de l'Article XLII, et ensuite on aura les longitudes φ et φ' par les formules (u) du même Article; ou bien, comme $y = Rr\cos\zeta''$, en connaissant y, r et R, on connaîtra

$$\cos\zeta'' = \frac{y}{\sqrt{(1+x)(1+X)}};$$

or ζ'' est l'angle qui exprime la distance de la Lune au Soleil, de sorte que, comme la latitude du Soleil est très-petite et peut par conséquent être négligée, on aura, par la propriété connue des triangles sphériques rectangles, $\cos\zeta'' = \cos\psi\cos(\varphi - \varphi')$, et par conséquent

$$\cos(\varphi - \varphi') = \frac{y}{\cos\psi\sqrt{1 + x + X + xX}}.$$

Ainsi l'on aura par ce moyen la distance $\varphi - \varphi'$ de la Lune au Soleil comptée sur l'écliptique; mais la longitude φ' du Soleil est assez connue par la loi de Kepler, que cet astre suit assez exactement, puisque les dérangements que la Lune pourrait y produire ne seraient que de l'ordre de iB ou de $i\alpha^2\sigma$, comme on le voit par l'équation (r) de l'Article XLI; donc, en ajoutant cette longitude à la distance $\varphi - \varphi'$ des deux astres, on aura la longitude φ de la Lune comptée à l'ordinaire dans l'écliptique.

Le Chapitre premier du Mémoire qu'on vient de lire mérite d'être compté parmi les travaux les plus importants de l'illustre Auteur. Les équations différentielles du Problème des trois Corps, lorsqu'on ne considère, ce qui est permis, que des mouvements relatifs, constituent un système du *douzième ordre*, et la solution complète exige, en conséquence, *douze* intégrations; les seules intégrales connues étaient celle des *forces vives* et les trois que fournit le *principe des aires* : il en restait donc *huit* à découvrir. En réduisant à *sept* le nombre des intégrations nécessaires pour l'achèvement de la solution, Lagrange a fait faire à la question un pas considérable, et les géomètres qui se sont occupés après lui du Problème des trois Corps ne sont pas allés au delà. Leurs efforts, cependant, n'ont pas été inutiles : des méthodes nouvelles et ingénieuses ont été proposées, comme, par exemple, celle que Jacobi a développée dans son célèbre *Mémoire sur l'élimination des nœuds dans le Problème des trois Corps;* mais ces méthodes, comme celle de Lagrange, font dépendre la solution du Problème de *sept* intégrations.

La méthode de Lagrange est des plus remarquables; elle montre que la solution complète du Problème exige seulement que l'on connaisse à chaque instant les côtés du triangle formé par les trois Corps; les coordonnées de chaque Corps se déterminent effectivement ensuite sans aucune difficulté. Quant à la recherche du triangle des trois Corps, elle dépend de trois équations différentielles, parmi lesquelles deux sont du *deuxième ordre* et la troisième du *troisième ordre;* ces équations renferment deux constantes arbitraires introduites, l'une par le principe des *forces vives,* l'autre par celui des *aires,* en sorte que les distances des Corps sont des fonctions du temps et de *neuf* constantes arbitraires seulement. Parmi les *douze* arbitraires que l'intégration complète doit introduire, il y en a donc *trois* qui ne figurent pas dans les expressions des distances, circonstance que l'examen des conditions du Problème permet d'ailleurs de mettre en évidence *à priori.*

Préoccupé assurément de l'application qu'il voulait faire de sa nouvelle méthode à la *Théorie de la Lune,* application qui fait l'objet du Chapitre IV de son Mémoire, Lagrange a négligé d'introduire dans ses formules la symétrie que comportait son analyse, symétrie qu'un très-léger changement dans les notations permet de rétablir. Les masses des trois Corps étant représentées par A, B, C, Lagrange étudie les mouvements relatifs de B et C autour de A, et il est bientôt amené à introduire en outre, dans ses formules, les quantités qui se rapportent au mouvement relatif du Corps C autour de B. Une telle direction des calculs est incontestablement défectueuse, au point de vue de l'élégance mathématique, en ce sens que les coordonnées des trois orbites relatives considérées ne figurent pas symétriquement dans les formules; mais, pour éviter cet inconvénient, il suffit, comme nous venons de le dire, d'une simple modification dans les notations de l'illustre Auteur, et cette modification revient à introduire, au lieu des mouvements considérés : 1° le mouvement relatif du Corps B autour de C; 2° celui de C autour de A; 3° celui de A autour de B.

Un habile géomètre allemand, M. Otto Hesse, a repris récemment l'analyse de Lagrange en se plaçant au point de vue que nous venons d'indiquer, et il a publié son travail dans le tome LXXIV du *Journal de Crelle* (imprimé à Berlin en 1872). M. Hesse ne considère que ce qu'il nomme le *Problème restreint,* c'est-à-dire, celui qui a pour objet de déterminer à chaque instant le triangle des trois Corps; c'est à ce Problème restreint que Lagrange a ramené d'ailleurs, comme nous l'avons dit plus haut, le Problème général. M. Hesse, malgré son incontestable talent, n'a pas réussi à perfectionner l'analyse rigoureuse que nous devons à Lagrange, car une inadvertance l'a fait tomber dans une erreur grave, que nous indiquerons plus loin, et qui infirme absolument sa conclusion. Ajoutons que la notation particulière dont le géomètre allemand fait usage, pour abréger l'écriture des formules, ne paraît pas préférable à celle de son illustre devancier.

Pour justifier les remarques qui précèdent, il est nécessaire d'entrer dans quelques détails; nous le ferons d'une manière succincte, en introduisant dans l'analyse de Lagrange les modifications nécessaires pour rétablir la symétrie des formules, et en dégageant la solution de tout ce qui n'est qu'accessoire.

1. Soient x, y, z les coordonnées rectangles du Corps B par rapport à C; x', y', z' celles du Corps C par rapport à A; x'', y'', z'' celles de A par rapport à B; on aura

$$(1) \qquad x + x' + x'' = 0, \quad y + y' + y'' = 0, \quad z + z' + z'' = 0.$$

Soient aussi

$$(2) \qquad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}, \quad r''=\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}.$$

Les équations différentielles du mouvement forment trois groupes dont l'un est

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{A+B+C}{r^3}x-A\left(\frac{x}{r^3}+\frac{x'}{r'^3}+\frac{x''}{r''^3}\right)=0,\\ &\frac{d^2x'}{dt^2}+\frac{A+B+C}{r'^3}x'-B\left(\frac{x}{r^3}+\frac{x'}{r'^3}+\frac{x''}{r''^3}\right)=0,\\ &\frac{d^2x''}{dt^2}+\frac{A+B+C}{r''^3}x''-C\left(\frac{x}{r^3}+\frac{x'}{r'^3}+\frac{x''}{r''^3}\right)=0,\end{aligned}\right.$$

et dont les deux autres se déduisent du précédent en changeant x en y et en z. A cause des formules (1), les équations de chaque groupe peuvent être réduites à deux distinctes; ces équations coïncideraient avec les équations (A), (B), (C) de Lagrange, si l'on y faisait le simple changement de x, y, z, x'', y'', z'' en $-x'', -y'', -z'', -x, -y, -z$.

Du groupe (3) et des deux groupes analogues on déduit

$$\frac{x\,d^2y-y\,d^2x}{A\,dt^2}+\frac{x'd^2y'-y'd^2x'}{B\,dt^2}+\frac{x''d^2y''-y''d^2x''}{C\,dt^2}=0,$$

équation qui subsiste quand on exécute la substitution circulaire (x, y, z) et qu'on répète cette substitution. On conclut de là les trois intégrales des aires, savoir

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{y\,dz-z\,dy}{A\,dt}+\frac{y'dz'-z'dy'}{B\,dt}+\frac{y''dz''-z''dy''}{C\,dt}=a,\\ &\frac{z\,dx-x\,dz}{A\,dt}+\frac{z'dx'-x'dz'}{B\,dt}+\frac{z''dx''-x''dz''}{C\,dt}=b,\\ &\frac{x\,dy-y\,dx}{A\,dt}+\frac{x'dy'-y'dx'}{B\,dt}+\frac{x''dy''-y''dx''}{C\,dt}=c,\end{aligned}\right.$$

a, b, c étant trois constantes arbitraires.

Ensuite, si l'on fait

$$(5) \qquad u^2=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}; \quad u'^2=\frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{dt^2}, \quad u''^2=\frac{dx''^2+dy''^2+dz''^2}{dt^2},$$

et que l'on ajoute ensemble les équations du groupe (3) et des deux analogues, après avoir multiplié ces équations respectivement par

$$\frac{2\,dx}{A}, \quad \frac{2\,dx'}{B}, \quad \frac{2\,dx''}{C}, \quad \frac{2\,dy}{A}, \quad \frac{2\,dy'}{B}, \quad \frac{2\,dy''}{C}, \quad \frac{2\,dz}{A}, \quad \frac{2\,dz'}{B}, \quad \frac{2\,dz''}{C};$$

on aura

$$(6) \qquad d\left(\frac{u^2}{A}+\frac{u'^2}{B}+\frac{u''^2}{C}\right)+2(A+B+C)\left(\frac{dr}{A\,r^2}+\frac{dr'}{B\,r'^2}+\frac{dr''}{C\,r''^2}\right)=0,$$

ce qui donne, par l'intégration, l'équation des forces vives, savoir

$$(7)\qquad \left(\frac{u^2}{A}+\frac{u'^2}{B}+\frac{u''^2}{C}\right)-2(A+B+C)\left(\frac{1}{Ar}+\frac{1}{Br'}+\frac{1}{Cr''}\right)=f,$$

f étant une constante arbitraire.

2. Posons

$$(8)\qquad x'x''+y'y''+z'z''=-p,\quad x''x+y''y+z''z=-p',\quad xx'+yy'+zz'=-p'',$$

ou, ce qui revient au même,

$$(9)\qquad \frac{r'^2+r''^2-r^2}{2}=p,\quad \frac{r''^2+r^2-r'^2}{2}=p',\quad \frac{r^2+r'^2-r''^2}{2}=p'',$$

on aura

$$(10)\qquad r^2=p'+p'',\quad r'^2=p''+p,\quad r''^2=p+p';$$

faisons en outre

$$(11)\qquad \frac{1}{r'^3}-\frac{1}{r''^3}=q,\quad \frac{1}{r''^3}-\frac{1}{r^3}=q',\quad \frac{1}{r^3}-\frac{1}{r'^3}=q'',$$

ce qui donnera

$$(12)\qquad q+q'+q''=0,\quad \frac{q}{r^3}+\frac{q'}{r'^3}+\frac{q''}{r''^3}=0.$$

Si l'on différentie deux fois la première équation (2), après l'avoir élevée au carré, on aura

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2}=\left(x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}\right)+u^2,$$

et cette formule subsiste quand on y remplace x, y, z, r, u par x', y', z', r', u' ou par x'', y'', z'', r'', u''. Si donc on multiplie les équations (3) par x, x', x'' respectivement, et qu'on ajoute ensuite chacune des équations résultantes avec celles qu'on en déduit par le changement de x en y et en z, on aura, en vertu de la formule précédente,

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2}+\frac{A+B+C}{r}+A(p'q'-p''q'')-u^2=0,\\
&\frac{1}{2}\frac{d^2(r'^2)}{dt^2}+\frac{A+B+C}{r'}+B(p''q''-p'q')-u'^2=0,\\
&\frac{1}{2}\frac{d^2(r''^2)}{dt^2}+\frac{A+B+C}{r''}+C(pq-p'q')-u''^2=0.
\end{aligned}\right.$$

Ces formules (13) répondent aux formules (F) de Lagrange, ou, ce qui revient au même, aux formules (K), en tenant compte des formules (J) de l'Auteur.

Ajoutons les quatre équations (13) et (7), après avoir divisé les trois premières par A, B, C respectivement; on aura

$$(14)\quad \left[\frac{1}{2A}\frac{d^2(r^2)}{dt^2}+\frac{1}{2B}\frac{d^2(r'^2)}{dt^2}+\frac{1}{2C}\frac{d^2(r''^2)}{dt^2}\right]-(A+B+C)\left(\frac{1}{Ar}+\frac{1}{Br'}+\frac{1}{Cr''}\right)=f.$$

Cette équation coïncide avec l'équation (L) de Lagrange, quand on y permute les lettres r et r''; c'est une transformée de l'intégrale des forces vives; elle ne renferme que les seules distances r, r', r''.

3. D'après les formules (1), les trois quantités

$$\begin{gathered}(x'dx''+y'dy''+z'dz'')-(x''dx'+y''dy'+z''dz'),\\ (x''dx+y''dy+z''dz)-(x\,dx''+y\,dy''+z\,dz''),\\ (x\,dx'+y\,dy'+z\,dz')-(x'dx+y'dy+z'dz)\end{gathered}$$

sont égales entre elles. Si l'on désigne par $\rho\,dt$ leur valeur, on aura, par le moyen des formules (8),

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}&x'dx''+y'dy''+z'dz''=\tfrac{1}{2}(-dp+\rho\,dt), && x''dx'+y''dy'+z''dz'=\tfrac{1}{2}(-dp-\rho\,dt),\\ &x''dx+y''dy+z''dz=\tfrac{1}{2}(-dp'+\rho\,dt), && x\,dx''+y\,dy''+z\,dz''=\tfrac{1}{2}(-dp'-\rho\,dt),\\ &x\,dx'+y\,dy'+z\,dz'=\tfrac{1}{2}(-dp''+\rho\,dt), && x'dx+y'dy+z'dz=\tfrac{1}{2}(-dp''-\rho\,dt).\end{aligned}\right.$$

La quantité auxiliaire ρ que nous introduisons n'est autre chose que celle qui est désignée par $-\frac{d\rho}{dt}$ dans le Mémoire de Lagrange; il est évident que cette quantité peut être exprimée en fonction des vitesses u, u', u'', des distances r, r', r'' et de leurs différentielles dr, dr', dr''. En effet, considérons quatre directions respectivement parallèles à celles des rayons r, r' et des vitesses u, u'; soient L, M, N les cosinus des angles formés par la direction de r' avec les directions de u, u', r; L_1, M_1, N_1 les cosinus des angles formés par les directions de u' et r, de u et r, de u et u'. On aura entre ces six cosinus la relation connue

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}&1-(L^2+M^2+N^2+L_1^2+M_1^2+N_1^2)+(L^2L_1^2+M^2M_1^2+N^2N_1^2)\\ &\quad+2(L_1MN+M_1NL+N_1LM+L_1M_1N_1)-2(LL_1MM_1+MM_1NN_1+NN_1LL_1)=0.\end{aligned}\right.$$

On a d'ailleurs, par les formules précédentes,

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}&L=-\frac{\rho\,dt+dp''}{2r'u\,dt}, \quad M=\frac{dr'}{u'dt}, \quad N=-\frac{p''}{rr'},\\ &L_1=\frac{\rho\,dt-dp''}{2ru'dt}, \quad M_1=\frac{dr}{u\,dt}, \quad N_1=-\frac{u^2+u'^2-u''^2}{2uu'}.\end{aligned}\right.$$

Faisons, pour abréger, avec Lagrange,

$$(18)\quad \frac{u'^2+u''^2-u^2}{2}=v, \quad \frac{u''^2+u^2-u'^2}{2}=v', \quad \frac{u^2+u'^2-u''^2}{2}=v'',$$

d'où

$$u^2 = v' + v'', \quad u'^2 = v'' + v, \quad u''^2 = v + v', \tag{19}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} \Sigma &= r^2\rho^2 - 2\left(p'\frac{dp''}{dt} - p''\frac{dp'}{dt}\right)\rho + p'\left(\frac{dp''}{dt}\right)^2 + p''\left(\frac{dp'}{dt}\right)^2 + p\left(\frac{d(r^2)}{dt}\right)^2, \\ \Sigma' &= r'^2\rho^2 - 2\left(p''\frac{dp}{dt} - p\frac{dp''}{dt}\right)\rho + p''\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + p\left(\frac{dp''}{dt}\right)^2 + p'\left(\frac{d(r'^2)}{dt}\right)^2, \\ \Sigma'' &= r''^2\rho^2 - 2\left(p\frac{dp'}{dt} - p'\frac{dp}{dt}\right)\rho + p\left(\frac{dp'}{dt}\right)^2 + p'\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + p''\left(\frac{d(r''^2)}{dt}\right)^2, \end{aligned}\right. \tag{20}$$

l'équation (16) deviendra, après la substitution des valeurs (17),

$$\left(\rho^2 + \frac{dp\,dp' + dp'\,dp'' + dp''\,dp}{dt^2}\right)^2 - 4(\Sigma v + \Sigma' v' + \Sigma'' v'') + 16(pp' + p'p'' + p''p)(vv' + v'v'' + v''v) = 0; \tag{21}$$

c'est précisément l'équation (N) de Lagrange. Si l'on suppose que u^2, u'^2, u''^2 y soient remplacées par leurs valeurs tirées des équations (12), la quantité auxiliaire ρ ne dépendra que des distances r, r', r'' et de leurs différentielles du premier et du deuxième ordre.

4. Puisque l'on a

$$(x\,dx' - x'\,dx) + (y\,dy' - y'\,dy) + (z\,dz' - z'\,dz) = \rho\,dt,$$

il s'ensuit, par la différentiation,

$$(x\,d^2x' - x'\,d^2x) + (y\,d^2y' - y'\,d^2y) + (z\,d^2z' - z'\,d^2z) = d\rho\,dt,$$

et, si l'on élimine les différentielles secondes des coordonnées au moyen des équations (3) et de celles qui s'en déduisent par le changement de x en y et en z, on aura

$$\frac{d\rho}{dt} + Apq + Bp'q' + Cp''q'' = 0; \tag{22}$$

cette équation n'est autre que l'équation (H) de Lagrange, en tenant compte du changement de notation.

5. Revenons maintenant aux équations (4) : on a identiquement

$$\begin{aligned} &(y\,dz - z\,dy)(y'\,dz' - z\,dy') + (z\,dx - x\,dz)(z'\,dx' - x'\,dz') + (x\,dy - y\,dx)(x'\,dy' - y'\,dx') \\ &\quad = (xx' + yy' + zz')(dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz') - (x\,dx' + y\,dy' + z\,dz')(x'\,dx + y'\,dy + z'\,dz), \end{aligned}$$

et cette formule subsiste quand on écrit x', y', z' ou x'', y'', z'' au lieu de x, y, z, ou bien x'', y'', z'' ou x, y, z au lieu de x', y', z'. D'après cela, si l'on fait

$$a^2 + b^2 + c^2 = k^2,$$

et que l'on ajoute les équations (4), après les avoir élevées au carré, on aura, en faisant usage de la précédente formule, ainsi que des formules (2), (5), (15) et (18),

$$(23)\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{A^2}\left[r^2u^2-\frac{1}{4}\left(\frac{d(r^2)}{dt}\right)^2\right]+\frac{1}{B^2}\left[r'^2u'^2-\frac{1}{4}\left(\frac{d(r'^2)}{dt}\right)^2\right]+\frac{1}{C^2}\left[r''^2u''^2-\frac{1}{4}\left(\frac{d(r''^2)}{dt}\right)^2\right]\\&+\frac{2}{BC}\left[pv-\frac{1}{4}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2\right]+\frac{2}{CA}\left[p'v'-\frac{1}{4}\left(\frac{dp'}{dt}\right)^2\right]+\frac{2}{AB}\left[p''v''-\frac{1}{4}\left(\frac{dp''}{dt}\right)^2\right]=k^2-\frac{A+B+C}{2ABC}\rho^2,\end{aligned}\right.$$

ce qui est l'équation (P) de Lagrange.

Si maintenant on suppose que u^2, u'^2, u''^2 soient remplacés partout par les valeurs tirées des formules (13), et que, par le moyen de l'équation (21), ρ soit éliminé des équations (22) et (23), celles-ci ne contiendront plus que les distances r, r', r''; la première sera du troisième ordre et l'autre du deuxième; en les joignant à l'équation (14), on obtiendra le système différentiel indiqué par Lagrange. Ce qui précède résume la partie essentielle du Mémoire de l'Auteur.

6. Différentions les équations (5) et remplaçons ensuite les différentielles secondes par les valeurs tirées des équations (3) et des analogues : on aura, en faisant usage des formules précédentes,

$$(24)\left\{\begin{aligned}&\frac{d(u^2)}{dt}-2(A+B+C)\frac{d\frac{1}{r}}{dt}+A\left(q'\frac{dp'}{dt}-q''\frac{dp''}{dt}\right)+Aq\rho=0,\\&\frac{d(u'^2)}{dt}-2(A+B+C)\frac{d\frac{1}{r'}}{dt}+B\left(q''\frac{dp''}{dt}-q\frac{dp}{dt}\right)+Bq'\rho=0,\\&\frac{d(u''^2)}{dt}-2(A+B+C)\frac{d\frac{1}{r''}}{dt}+C\left(q\frac{dp}{dt}-q'\frac{dp'}{dt}\right)+Cq''\rho=0.\end{aligned}\right.$$

Ces formules coïncident avec les équations (I) de Lagrange, quand on tient compte des équations (J) de l'Auteur. M. Hesse leur substitue les trois combinaisons obtenues quand on les ajoute entre elles, après les avoir multipliées respectivement par $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$, puis par $\frac{1}{Ar^3}$, $\frac{1}{Br'^3}$, $\frac{1}{Cr''^3}$, puis enfin par p, p', p''. La première combinaison n'est autre chose que l'équation (6); la deuxième combinaison donne, en se servant des formules (12),

$$(25)\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{Ar^3}\frac{d\left(u^2-2\frac{A+B+C}{r}\right)}{dt}+\frac{1}{Br'^3}\frac{d\left(u'^2-2\frac{A+B+C}{r'}\right)}{dt}+\frac{1}{Cr''^3}\frac{d\left(u''^2-2\frac{A+B+C}{r''}\right)}{dt}\\&\qquad-\left(q^2\frac{dp}{dt}+q'^2\frac{dp'}{dt}+q''^2\frac{dp''}{dt}\right)=0;\end{aligned}\right.$$

enfin la dernière combinaison, qui seule contient ρ, est, en faisant usage de l'équation (22),

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} \rho\frac{d\rho}{dt} = {} & p\,\frac{d\left(u^2 - 2\,\dfrac{A+B+C}{r}\right)}{dt} + p'\,\frac{d\left(u'^2 - 2\,\dfrac{A+B+C}{r'}\right)}{dt} + p''\,\frac{d\left(u''^2 - 2\,\dfrac{A+B+C}{r''}\right)}{dt} \\ & + A p\left(q'\frac{dp'}{dt} - q''\frac{dp''}{dt}\right) + B p'\left(q''\frac{dp''}{dt} - q\frac{dp}{dt}\right) + C p''\left(q\frac{dp}{dt} - q'\frac{dp'}{dt}\right). \end{aligned} \right.$$

Supposons que l'on différentie l'équation (23), ce qui fera disparaître l'arbitraire k, et que de l'équation résultante on tire la valeur de $\rho\dfrac{d\rho}{dt}$ pour la substituer dans l'équation (26). Alors, comme u^2, u'^2, u''^2 représentent les valeurs fournies par les équations (13), les équations (6), (25) et (26), qui sont toutes du troisième ordre et ne renferment aucune arbitraire, constitueront, d'après M. Hesse, le système différentiel duquel dépendent les distances r, r', r'', quand on ne fait pas intervenir les principes des forces vives et des aires. Enfin, si des mêmes équations (6), (25) et (26) on tire les valeurs de $d(u^2)$, $d(u'^2)$, $d(u''^2)$, pour les porter dans l'une des équations (24), celle-ci donnera, d'après le même géomètre, une valeur de ρ qui sera seulement du deuxième ordre; en portant cette valeur dans l'équation (23) et en joignant ensuite cette équation aux équations (14) et (26), on obtiendra un système composé de deux équations du deuxième ordre et d'une du troisième ordre, dans lequel figureront les deux constantes arbitraires f et k.

Telle est la solution que M. Hesse propose dans son Mémoire. Cette solution paraît, à première vue, beaucoup plus simple que celle de Lagrange, mais il n'est pas difficile de reconnaître l'inexactitude de la conclusion de M. Hesse. Effectivement l'équation (26), après qu'on en a éliminé $\rho\dfrac{d\rho}{dt}$ par l'équation (23) différentiée, n'est pas autre chose que l'équation (6) multipliée par le facteur $\dfrac{r^2}{A} + \dfrac{r'^2}{B} + \dfrac{r''^2}{C}$; les trois équations du troisième ordre qui composent le premier système de M. Hesse ne sont donc pas distinctes. Le deuxième système du même géomètre ne saurait, en conséquence, avoir d'existence réelle, puisque les équations du premier système sont impropres à fournir les valeurs des différentielles du troisième ordre, ou, ce qui revient au même, les valeurs des différentielles $d(u^2)$, $d(u'^2)$, $d(u''^2)$. On ne saurait se dispenser, dans la recherche dont nous nous occupons, de tenir compte de l'équation (21), comme Lagrange a eu soin de le faire.

(*Note de l'Éditeur.*)