

# CORSO DI SISTEMI DINAMICI

## COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

11 Settembre 2008

**Esercizio 1:** Si consideri il sistema gradiente

$$\dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) \quad , \quad \dot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y}(x, y)$$

con potenziale

$$U(x, y) = -\int_0^x [e^{s^2+y^2-1} - 1] ds .$$

Si trovino tutti i punti di equilibrio del sistema e se ne determini la stabilità.

**Esercizio 2:** Si consideri il sistema newtoniano con dissipazione, di equazione

$$\ddot{x} = \log\left(\frac{3}{4} + x^2\right) - \gamma\dot{x} \quad , \quad \gamma > 0 .$$

a) Trasformare il sistema in un'equazione alle differenze finite del secondo ordine con passo  $h > 0$  usando l'approssimazione delle differenze centrali seconde e della differenza prima all'indietro

$$D^2x(kh) = \frac{\Delta_0^2 x_k}{h^2} \quad , \quad Dx(kh) = \frac{\Delta_- x_k}{h} ,$$

e successivamente in un sistema dinamico discreto usando come variabile

$$y_k = x_k - x_{k-1};$$

b) determinare i valori di  $h, \gamma$  per cui il punto di equilibrio instabile del sistema dinamico continuo è un punto iperbolico del sistema discretizzato;

c) determinare i valori di  $h, \gamma$  per cui il punto di equilibrio asintoticamente stabile del sistema dinamico continuo è un punto fisso asintoticamente stabile del sistema discretizzato.

**Esercizio 3:** Si trovino delle funzioni  $f$  e  $g$  in modo tale che la trasformazione

$$\begin{cases} w(p, q) = pq \\ z(p, q) = f(p) + g(q) \end{cases} \quad p, q > 0$$

sia canonica.