

# CORSO DI SISTEMI DINAMICI

## COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

15 Gennaio 2007

**Esercizio 1:** Si studi il sistema gradiente

$$\dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad \dot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

dove

$$U(x, y) = x \left( 1 - x^2/3 - y^2 - xy \right).$$

In particolare

- si trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità;
- si determini un insieme che fa parte del bacino di attrazione del punto di equilibrio asintoticamente stabile.

**Esercizio 2:** Dato il sistema dinamico discreto

$$X_{k+1} = A X_k \quad X_0 \in \mathbf{R}^3$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- si discuta la stabilità del punto fisso;
- si trovi la soluzione generale in forma esplicita.

**Esercizio 3:** Si consideri un corpo puntiforme di massa  $m$ , vincolato a muoversi sulla curva di equazione

$$\begin{cases} x = R \cos(q) \\ y = R \sin(q) \\ z = \alpha q \end{cases} \quad R, \alpha > 0,$$

e soggetto alla forza costante

$$\vec{F} = m g \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ 0 \\ -\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{con } g > 0, \theta \in (0, \pi/2).$$

Utilizzando la variabile reale  $q$  come coordinata lagrangiana

- a) si scrivano l'energia cinetica, l'energia potenziale, la funzione di Lagrange e l'equazione di Lagrange;
- b) si scrivano la funzione di Hamilton e le equazioni di Hamilton; si trovino inoltre i punti di equilibrio del sistema dinamico Hamiltoniano in funzione dei parametri;
- c) si discuta la stabilità dei punti di equilibrio;
- d) si traccino i disegni delle orbite nei casi qualitativamente distinti.
- e) Applicazione: la Torre di Pisa (esclusa la cella campanaria) sia approssimata con un cilindro di raggio  $R = 10$  alto 50 metri, sporgente in fuori rispetto alla base di appoggio di 5 metri al bordo superiore, e con 7 piani uguali. Le scale salgono a spirale con un giro per piano. Se si disponesse uno scivolo lungo le scale, ci sarebbero dei punti in cui una massa rotolante sullo scivolo potrebbe restare ferma?