

# CORSO DI SISTEMI DINAMICI

## COMPITO D'ESAME

Prof. A. Milani - Dr. G.F. Gronchi

7 giugno 2006

**Esercizio 1:** Dato il sistema dinamico lineare

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- (a) trovare gli esponenti di Lyapounov, discutere la stabilità;
- (b) trovare la soluzione particolare con condizioni iniziali

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Esercizio 2:** Dato il sistema newtoniano a un grado di libertà

$$\ddot{x} = -x^3 - \gamma \dot{x}$$

con dissipazione  $\gamma \in \mathbf{R}$

- a) si studino i punti di equilibrio e se ne determinino le proprietà di stabilità in funzione di  $\gamma$ ;
- b) si dimostri che la funzione  $L(x, y) = (x^2 + y^2)/2$ , con  $y = \dot{x}$ , non è una funzione di Lyapounov per  $(0, 0)$ .

**Esercizio 3:** Consideriamo due punti materiali  $P_1 = (x_1, z_1)$  e  $P_2 = (x_2, z_2)$  di massa  $m_1$  e  $m_2$  vincolati a muoversi in modo che la loro distanza sia fissa ed uguale ad  $\ell$  (collegati da un'asta rigida senza massa) mantenendo  $z_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ . Sui due punti agisce una forza peso diretta verso l'asse  $z$  negativo, di intensità  $m_i g$  per  $i = 1, 2$ , e sul solo punto  $P_1$  agisce una forza elastica dovuta ad una molla tra l'origine e  $P_1$  con costante elastica  $k$ .

- a) Usando come coordinata lagrangiana l'angolo  $\theta$  tra il vettore  $P_1 - P_2$  e l'asse  $z$  si scrivano la lagrangiana, la hamiltoniana, le equazioni di Hamilton e l'energia totale;
- b) si trovino i punti di equilibrio del sistema hamiltoniano e se ne discuta la stabilità in funzione dei parametri  $m_1, m_2, k, g, \ell$ ;
- c) si tracci il diagramma di biforcazione in funzione del parametro  $m_2 g/k \ell$ .