

# Meccanica Razionale e Analitica

21 Giugno 2006

## USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI

### Primo Esercizio

Provare che il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 |y'''(x)|^2 dx$$

ha minimo assoluto nella classe delle funzioni  $C^3([0, 1])$  tali che

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

### Secondo Esercizio

Un piano verticale è riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali  $Oxy$  con asse  $y$  rivolto verso il basso. In questo piano è libero di muoversi senza attrito un sistema formato da due aste omogenee di ugual lunghezza  $2L$  e di egual massa  $m$  e da un punto materiale  $P$  di massa  $M$ . La prima asta  $OA$  ruota intorno al suo estremo  $O$  fisso e coincidente con l'origine del riferimento. La seconda asta  $BC$  è libera di ruotare intorno al suo baricentro che coincide sempre con l'estremo  $A$  dell'asta  $OA$ . Il punto materiale  $P$  è fissato nell'estremo  $B$  dell'asta  $BC$ . Il sistema è soggetto solo al proprio peso.

Supposti tutti i vincoli lisci ed assunti come parametri lagrangiani del sistema l'angolo  $\theta$  che l'asta  $OA$  forma con l'asse  $Oy$  e l'angolo  $\phi$  che l'asta  $BC$  forma con la retta orizzontale passante per  $B$ , orientati come in figura:

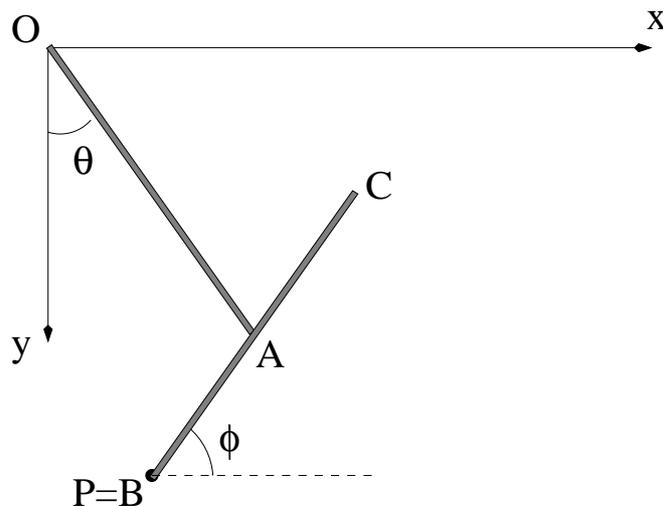


Figura 1

- (i) trovare le equazioni di Lagrange del sistema.
- (ii) Determinare le soluzioni di equilibrio delle equazioni di moto.
- (iii) Supposte valide le condizioni iniziali

$$(1) \quad \theta(0) = \pi/2, \quad \phi(0) = \pi/2, \quad \frac{d\theta}{dt}(0) = 0, \quad \frac{d\phi}{dt}(0) = 0$$

calcolare  $\frac{d^2\theta}{dt^2}(0)$  e  $\frac{d^2\phi}{dt^2}(0)$ .

### Terzo Esercizio

In un piano verticale sia fissato un sistema di riferimento  $Oxy$ , con asse  $y$  verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico piano formato da un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$ , che può rotolare senza strisciare sull'asse  $x$ , e da un corpo puntiforme  $P$  di massa  $m$  che può scivolare senza attrito sul bordo circolare del disco. Al centro  $B$  del disco è saldato un estremo di una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla. L'altro estremo della molla è fissato al punto  $A \equiv (0, R)$ , quindi la molla si mantiene sempre parallela all'asse  $x$  (vedi Figura 2).

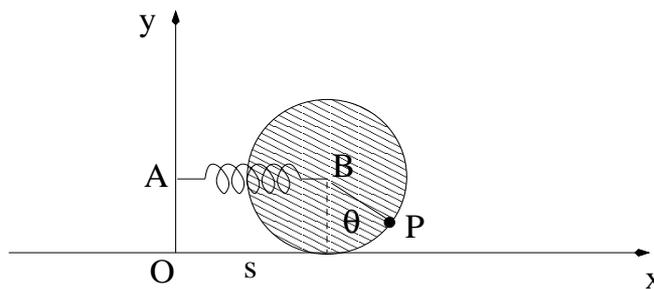


Figura 2

Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa  $s$  del centro  $B$  del disco e l'angolo  $\theta$  che il segmento  $BP$  forma con la direzione verticale,

- (a) scrivere la lagrangiana del sistema;
- (b) trovare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità;
- (c) assumendo  $M = 2m$  e  $kR = mg$  trovare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

### Prova al calcolatore

- (a) Trovare l'estremale del primo esercizio tramite MAPLE.
- (b) Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$y' - \frac{x}{1+x^2}y = e^{-x}y^3, \quad y(0) = 1 .$$