

Meccanica Razionale e Analitica

9 Giugno 2006

USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI

Primo Esercizio

Provare che il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 |y'''(x)|^2 dx$$

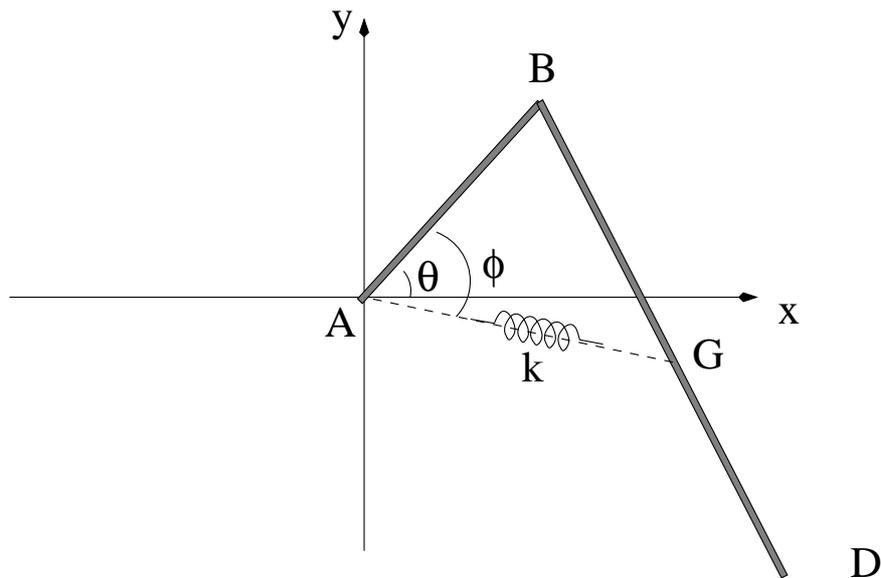
ha minimo assoluto nella classe delle funzioni $C^3([0, 1])$ tali che

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3, \quad y''(1) = 6.$$

Secondo Esercizio

Un piano orizzontale è riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Axy . In questo piano è libero di muoversi senza attrito un sistema formato da due aste omogenee AB e BD entrambe di massa m e di lunghezze rispettive L e $2L$. L'asta AB è vincolata a muoversi attorno al suo punto fisso A coincidente con l'origine del riferimento cartesiano. Mentre l'asta BD è incernierata con la prima asta nell'estremo B . Sul baricentro G dell'asta BD agisce una forza elastica attrattiva di costante $k > 0$ diretta verso il punto A . Si assumano come parametri lagrangiani del sistema l'angolo θ che l'asse Ax forma con l'asta AB e l'angolo ϕ che il segmento AG forma con l'asta AB (vedi figura).

Trovare la lagrangiana del sistema e due integrali primi del moto.



Terzo Esercizio

Si consideri un corpo puntiforme P di massa m vincolato a muoversi su un piano orizzontale e liscio. Su P agisce una forza elastica, di costante $k > 0$, che attira il corpo verso un centro O .

Utilizzando come variabili lagrangiane le coordinate polari (r, θ) , dove r è la distanza di P da O e θ è l'angolo che il segmento OP forma con una direzione fissa nel piano del moto,

(i) si scrivano la lagrangiana L del sistema e le equazioni di Lagrange;

(ii) osservando che la variabile θ è ciclica, si consideri il suo momento coniugato

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$$

e si dimostri che l'integrale primo $|p_\theta|$ è la norma del momento angolare di P rispetto al polo O .

(iii) si scriva la lagrangiana ridotta con il metodo di Routh;

(iv) Si dimostri che se il momento angolare del corpo rispetto al polo O è diverso da zero, allora il corpo, durante il suo moto, non può mai passare per il punto O .

Prova al calcolatore

(a) Trovare l'estremale del primo esercizio tramite MAPLE.

(b) Studiare tramite MAPLE i punti di massimo e minimo relativo della funzione

$$f(x, y) = x^4 + 6x^2y^2 + y^4 - 32(x^2 + y^2).$$

Determinare il minimo ed il massimo assoluto della $f(x, y)$ nel disco chiuso che ha il centro nell'origine e raggio 3.