

Meccanica Razionale e Analitica

23/01/06

USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI

Primo Esercizio

Provare che il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 y''^2 dx$$

nella classe di funzioni ammissibili

$$A = \{y(x) \in C^2([0, 1]), y(0) = 0, y'(0) = 0, y(1) = 0,$$

$$y'(1) = 1, \int_0^1 y(x) dx = 0, \int_0^1 xy(x) dx = 0\}$$

ha minimo assoluto e trovarlo.

Secondo Esercizio

Una lamina rettangolare, sottile e omogenea $ABCD$ di lati a e b e massa m è libera di ruotare attorno al punto fisso O intersezione delle diagonali. La velocità angolare di corpo rigido della lamina è un vettore costante nel tempo di modulo ω e con la direzione e il verso del vettore AC (A e C vertici opposti della lamina). Calcolare il momento rispetto al punto O delle forze attive esterne che causano questo moto. Trovare in quali casi tale momento è nullo.

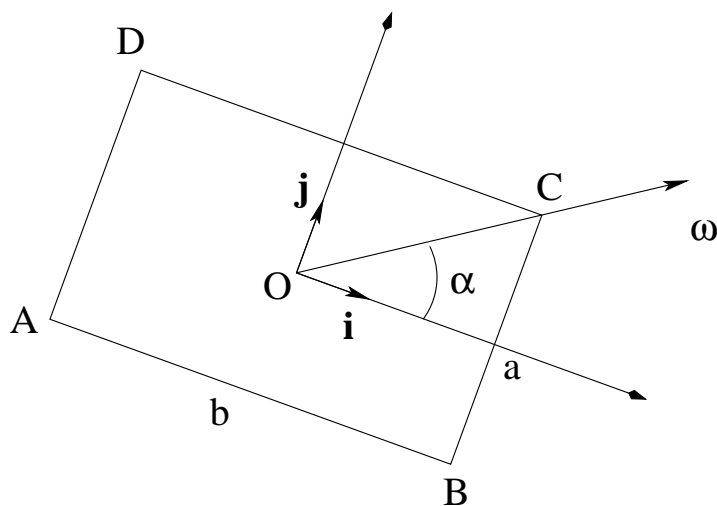


Figura 1

Terzo Esercizio

Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ vincolato a muoversi sulla superficie di un ellissoide di equazione

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{con } a, c > 0.$$

Sul punto non agiscono forze attive (moto geodetico). Utilizzando le coordinate lagrangiane θ, ϕ che danno luogo alla seguente parametrizzazione dell'ellissoide

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \cos \phi \\ y = a \sin \theta \cos \phi \\ z = c \sin \phi \end{cases} \quad \theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}, \quad \phi \in (-\pi/2, \pi/2)$$

- (i) si scrivano la lagrangiana del sistema e le equazioni di Lagrange;
- (ii) per un dato valore γ del momento coniugato alla variabile (ciclica) θ si scriva la lagrangiana ridotta utilizzando il metodo di Routh;
- (iii) si dimostri che per $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = 0$ c'è un'orbita periodica del sistema completo di equazioni di Lagrange, determinato al punto (i), per ogni scelta delle condizioni iniziali $\theta(0), \dot{\theta}(0)$; in corrispondenza di tali condizioni iniziali trovare la legge oraria per la coordinata θ .