$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $\quad \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} a \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ m(a) \end{pmatrix} \qquad m(a) = K a^{-3/2} \qquad \begin{cases} a(0) = a_0 \\ \lambda(0) = \lambda_0 \end{cases}$

flusso integrale $(t_0 = 0)$ $\quad \phi^t(a_0, \lambda_0) = \begin{pmatrix} a_0 \\ \lambda_0 + m_0 t \end{pmatrix} \qquad m_0 = m(a_0) = K a_0^{-3/2}$

eq. alle variazioni $\quad A(t, a_0, \lambda_0) = \dfrac{\partial(a, \lambda)}{\partial(a_0, \lambda_0)}$ $\quad$ matrice di transizione di stato

A risolve il problema di Cauchy

$$\frac{d}{dt} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}\frac{m_0}{a_0} & 0 \end{bmatrix} A, \qquad A(0) = I$$

per cui $\quad A(t, a_0, \lambda_0) = \exp \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}\frac{m_0}{a_0} t & 0 \end{bmatrix}}_{M \text{ (nilpotente)}} = I + M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2}\frac{m_0}{a_0} t & 1 \end{bmatrix}$

Il parametro K (costante di Gauss) è un parametro dinamico.

Se volessimo determinare anche quello avremmo bisogno delle derivate $\left(\dfrac{\partial a}{\partial K}, \dfrac{\partial \lambda}{\partial K}\right)$.

Posto $\quad B(t, a_0, \lambda_0) = \left(\dfrac{\partial a(t, a_0, \lambda_0)}{\partial K}, \dfrac{\partial \lambda(t, a_0, \lambda_0)}{\partial K}\right)^T$

B risolve il probl. di Cauchy $\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt} B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}\frac{m_0}{a_0} & 0 \end{bmatrix} B + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_0^{3/2}} \end{pmatrix} & (*) \\ B(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

che ha soluzione $\quad B(t, a_0, \lambda_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{t}{a_0^{3/2}} \end{pmatrix}$.