PROPAGAZIONE delle COVARIANZA

y vettore di stato ; $\Phi_{t_0}^{t}(y_0)$ flusso integrale

$$\frac{\partial y}{\partial y_0} = \frac{\partial \Phi_{t_0}^{t}(y_0)}{\partial y_0}$$ matrice di transizione di stato

Assumiamo che $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{parametri del fit}}}{x} = y_0$.

Possiamo propagare le matrici C e Γ, riferite a (t_0, y_0) ad un tempo t arbitrario.

Si ha $$C_0 = \left[\frac{\partial \xi}{\partial y_0}\right]^T \frac{\partial \xi}{\partial y_0}$$

$$C_t = \left[\frac{\partial \xi}{\partial y}\right]^T \frac{\partial \xi}{\partial y} = \left[\frac{\partial \xi}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial y}\right]^T \left[\frac{\partial \xi}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial y}\right] = \left[\frac{\partial y_0}{\partial y}\right]^T C_0 \frac{\partial y_0}{\partial y}$$

$$= \left[\frac{\partial y}{\partial y_0}\right]^{-T} C_0 \left[\frac{\partial y}{\partial y_0}\right]^{-1}$$

OSS Abbiamo usato $\xi_i = r_i - R\big(\overbrace{\Phi_{t_0}^{t_i}(y_0, \mu)}^{y}, t_i, \nu\big)$

Per le matrici di covarianza si ha

$$\Gamma_0 = C_0^{-1} \qquad \boxed{\Gamma_t = C_t^{-1} = \frac{\partial y}{\partial y_0}\, \Gamma_0 \left[\frac{\partial y}{\partial y_0}\right]^T}$$ formule di propagazione delle covarianze

CONCLUSIONE: per propagare le matrici normali e di covarianza ad un altro tempo non è necessario risolvere nuovamente il problema dei minimi quadrati, ma basta risolvere l'eq. alle variazioni.

OSS Se x include, oltre y_0, alcuni parametri in (μ, ν) allora la matrice di transizione di stato è della forma

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial y_0} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$ e si procede come prima.