Usando la formula per la densità di prob.

$$P_Y(y) = \left|\det\left(\frac{\partial f^{-1}}{dy}\right)\right| P_X(f^{-1}(y))$$

si ottiene

$$P_Y(y) = \frac{1}{|\det A|} \frac{\sqrt{\det C_i}}{(2\pi)^{m/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(y - f(m))^T A^{-T} C_i A^{-1} (y - f(m))\right]$$

$$= \frac{\sqrt{\det(A\Gamma A^T)^{-1}}}{(2\pi)^{m/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(y - f(m))^T (A\Gamma A^T)^{-1} (y - f(m))\right]$$

$$= N\left(f(m), A\Gamma A^T\right)$$

OSS Abbiamo usato $\det(A\Gamma A^T)^{-1} = \det(A^{-T} C A^{-1}) = \det C \det A^{-T} \det A^{-1}$

$$= \det C_i (\det A)^{-2}$$

per cui $\sqrt{\det(A\Gamma A^T)^{-1}} = \frac{\sqrt{\det C}}{|\det A|}$

GENERALIZZAZIONE

Sia X una var. casuale gaussiana, con densità di prob. $N(m_x, \Gamma)$

ed $y = f(x) = B(x+b)$ dove B è $m \times n$ $(m < n)$ con $rk(B) = m$

Sia $\Pi = [I \,\vdots\, 0]$ la proiezione sul sottospazio delle prime m coordinate.

Assumiamo che $B = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c:c} \text{MATRICE INVERTIBILE} & \end{array}\right] m \\ \quad m \qquad\qquad n-m \end{array}$

si può fare a meno di riordinare le componenti di f