MODELLI di ERRORE

Data una variabile casuale X ed una funzione continua $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cerchiamo di definire un'altra variabile casuale $Y = F(X)$ con misura di probabilità $P_Y(a < Y < b) = P_X(X : a < F(X) < b)$

PROBLEMA: Si può definire per Y una densità di prob. continua $p_Y(y)$?

Ipotesi: (i) $x \to f(x) = y$ è bigettiva da $W = \{x \in \mathbb{R} : p_X(x) > 0\}$ a $D \subset \mathbb{R}$

(ii) $x = f^{-1}(y)$ è $C^1(D)$ e le sue derivate sono $\neq 0$.

In queste ipotesi $Y = F(X)$ è una variabile casuale con densità di prob.

$$\boxed{p_Y(y) = \left| \frac{d f^{-1}(y)}{dy} \right| p_X(f^{-1}(y))}$$

← dentro D, la densità è nulla fuori.

OSS Questa def. si generalizza facilmente al caso di n variabili:

$$p_Y(y) = \left| \det \frac{\partial f^{-1}}{\partial y} \right| p_X(f^{-1}(y))$$

TRASFORMAZIONI LINEARI di GAUSSIANE

PROP X variabile casuale continua $\quad x \mapsto y = f(x) = Ax + b$

A $n \times n$ invertibile, $y, x, b \in \mathbb{R}^n$

Assumiamo X gaussiana, con densità di prob.

$$p_X(x) = N(m, \Gamma) = \frac{\sqrt{\det C}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-m)^T C (x-m) \right]$$

allora anche $Y = F(X)$ è gaussiana, con densità di prob.

$$p_Y(y) = N(\underbrace{Am + b}_{f(m)}, A\Gamma A^T)$$

regola di propagazione della covarianza.

cioè il valore atteso è $f(m)$ e la matrice di covarianza $A\Gamma A^T$

DIM. $x = A^{-1}(y - b) \qquad \det \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{\det A}$

Dalle relazioni
$$\begin{cases} x - m = A^{-1}(y-b) - A^{-1}(f(m) - b) = A^{-1}(y - f(m)), \\ A^{-T} C A^{-1} = (A\Gamma A^T)^{-1} \end{cases}$$