MODELLI di ERRORE

OSS Per variabili gaussiane, essere indipendenti o non correlate è la stessa cosa: infatti, se X_i, X_j sono indipendenti allora $Cov(X_i, X_j) = 0 \ \forall i,j$

Viceversa, se $Cov(X_i, X_j) = 0 \ \forall i,j \Rightarrow \Gamma$ diagonale $\Rightarrow$ C diagonale e si può scrivere $p_{X_1,\dots,X_m}$ come prodotto $p_{X_1} \cdots p_{X_m}$ delle densità marginali

$$p_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{M-1}} p_{X_1,\dots,X_M}(x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_M)\, dx_1 \dots \hat{dx_i} \dots dx_M$$

cioè meno x_i — meno dx_i

Infatti si ha

$$p_{X_i}(x_i) = \frac{\sqrt{\det C_i}}{(2\pi)^{\frac{M-1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{M-1}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\tilde{x}_i - \tilde{m}_i)^T C_i (\tilde{x}_i - \tilde{m}_i)\right] d\tilde{x} \cdot N\left(m_i, \frac{1}{\sqrt{c_{ii}}}\right)(x_i)$$

dove

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{MM} \end{bmatrix} \qquad C_i = \begin{bmatrix} c_{11} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \hat{c}_{ii} & \\ 0 & & & c_{MM} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \tilde{m}_i &= (m_1,\dots,\hat{m}_i,\dots,m_M) \\ \tilde{x}_i &= (x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_M) \end{aligned}$$

ed

$$N\left(m_i, \frac{1}{\sqrt{c_{ii}}}\right)(x_i) = \frac{\sqrt{c_{ii}}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} c_{ii}(x_i - m_i)^2\right]$$

Inoltre,

$$\int_{\mathbb{R}} p_{X_i}(x_i)\, dx_i = \int_{\mathbb{R}^M} p_{X_1,\dots,X_M}(x_1,\dots,x_M)\, dx_1,\dots,dx_M = 1$$

e siccome

$$\int_{\mathbb{R}} N\left(m_i, \frac{1}{\sqrt{c_{ii}}}\right)(x_i)\, dx_i = 1$$

si ha

$$\frac{\sqrt{\det C_i}}{(2\pi)^{\frac{M-1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{M-1}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\tilde{x}_i - \tilde{m}_i)^T C_i (\tilde{x}_i - \tilde{m}_i)\right] d\tilde{x}_i = 1$$

quindi

$$\boxed{p_{X_i}(x_i) = N\left(m_i, \frac{1}{\sqrt{c_{ii}}}\right)(x_i)}$$