Calcoliamo esplicitamente la densità di probabilità congiunta

le media è nulla

$$N(0,\Gamma)(x,y) = P_{X,Y}(x,y) = \frac{\sqrt{\det C}}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(x,y)\, C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]$$

infatti: $P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)\,P_Y(y) = N(0,\sigma_x^2)(x)\,N(0,\sigma_y^2)(y)$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right]$$

$\boxed{\text{OSS}}$ Questo risultato si generalizza a variabili casuali gaussiane distribuite congiuntamente, correlate e con media non nulla:

$$P_{X,Y}(x,y) = N(m,\Gamma)(x,y) = \frac{\sqrt{\det C}}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-m_x,\, y-m_y)\, C \begin{pmatrix} x-m_x \\ y-m_y \end{pmatrix}\right]$$

con $\begin{cases} m_x = E(X) \\ m_y = E(Y) \end{cases}$

Le densità marginali sono normali:

$$\begin{cases} P_X(x) = N(m_x, \sigma_x^2) \\ P_Y(y) = N(m_y, \sigma_y^2) \end{cases}$$

VARIABILI GAUSSIANE MULTIDIMENSIONALI

Date $X_1, \dots, X_M$ variabili casuali distribuite congiuntamente, diciamo che sono gaussiane se la loro densità è della forma

$$P_{X_1,\dots,X_M}(x_1,\dots,x_M) = \frac{\sqrt{\det C}}{(2\pi)^{M/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-m)^T C\, (x-m)\right]$$

con $m = (m_1, \dots, m_M)^T$ vettore delle medie.

Si scrive anche $P_{X_1,\dots,X_M}(x_1,\dots,x_M) = N(m,\Gamma)$

con $\Gamma = C^{-1} = \begin{bmatrix} Var(X_1) & & Cov(X_i,X_j) \\ & \ddots & \\ Cov(X_i,X_j) & & Var(X_M) \end{bmatrix}$ ← cioè, al di fuori della diagonale la componente Γ_{ij} è $Cov(X_i,X_j)$