$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

Questo si vede così: in $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}a\\ \lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ m(a)\end{pmatrix}$ c'è il parametro K,

che possiamo includere tra le variabili delle eq. diff.:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}a\\ \lambda\\ K\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ m(a)\\ 0\end{pmatrix} \qquad (*)$$

Considero la matrice $\tilde{B} = \frac{\partial(a,\lambda,K)}{\partial(a_0,\lambda_0,K_0)}$ dove $\begin{cases} a = a_0\\ \lambda = m_0 t + \lambda_0\\ K = K_0\end{cases}$

è la soluzione generale (il flusso integrale) di $(*)$.

~~Si ha~~ L'equazione alle variazioni si scrive

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{B} = \frac{\partial(0, m(a), 0)}{\partial(a,\lambda,K)}\tilde{B} = \begin{bmatrix}0&0&0\\ m'(a_0)&0&1/a_0^{3/2}\\ 0&0&0\end{bmatrix}\tilde{B}$$

e si ottiene $\cancel{B(K,a_0,\lambda) = \begin{pmatrix}0\\ t\\ a_0^{3/2}\end{pmatrix}}$

$(\bullet\bullet)$ $$\frac{d}{dt}B = \begin{bmatrix}0&0\\ m'(a_0)&0\end{bmatrix}B + \begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{a_0^{3/2}}\end{pmatrix}$$, infatti $\cancel{\tilde{B} = \left[\begin{array}{c|c} B & a\\ \hline 0\ 0 & 1\end{array}\right]}$

$$\tilde{B} = \left[\begin{array}{c|c} A & B\\ \hline 0\ \ 0 & 1\end{array}\right] \qquad m'(a_0) = -\frac{3}{2}\frac{K}{a_0^{5/2}} = -\frac{3}{2}\frac{m_0}{a_0}$$

La soluzione di $(\bullet)$ si trova così:

$$B = B_0 + B_* = \underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\ -\frac{3}{2}\frac{m}{a}t & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}b_1^0\\ b_2^0\end{pmatrix}}_{\text{SOL. GEN. EQ. OMOGENEA}} + \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\frac{a_0}{K}\\ 0\end{pmatrix}}_{\text{SOL. PART}} \qquad \begin{pmatrix}b_1^0\\ b_2^0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

SOLUZ. GEN. di $(\bullet\bullet)$

$$-\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\frac{m_0}{\cancel{a_0}}\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\frac{\cancel{a_0}}{K} = -\frac{1}{a_0^{3/2}}$$

Cerco $(b_1^0, b_2^0)^T$ risolvendo

$$\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\ 0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}b_1^0\\ b_2^0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\frac{a_0}{K}\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_1^0 = -\frac{2}{3}\frac{a_0}{K}\\ b_2^0 = 0\end{cases} \Rightarrow B(t) = \begin{pmatrix} -\cancel{\frac{2}{3}\frac{a_0}{K}} + \cancel{\frac{2}{3}\frac{a_0}{K}}\\ \underbrace{+\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\frac{m_0}{\cancel{a_0}}t\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\frac{\cancel{a_0}}{K}}_{= t/a_0^{3/2}}\end{pmatrix}$$