MINIMI QUADRATI LINEARI

Serve un modello per la funzione incognita:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} x_k f_k(t) \qquad \text{caso lineare}$$

$t \mapsto f_k(t)$ funzioni di base

x_k parametri del fit

(t_i, λ_i) $i = 1, \dots, m$ dati $\qquad \underline{m \geq N}$

NOTAZIONE: $x = (x_k) \in \mathbb{R}^N$, $t = (t_i) \in \mathbb{R}^m$, $\lambda = (\lambda_i) \in \mathbb{R}^m$

RESIDUI: $\xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^m$ $\quad \xi_i = \lambda_i - f(t_i) = \lambda_i - \sum_{k=1}^{N} x_k f_k(t_i)$

Considero la target function $\quad Q(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left[\lambda_i - \sum_{k=1}^{N} x_k f_k(t_i) \right]^2$

matrice disegno: $\quad B = \frac{\partial \xi}{\partial x} = (b_{ik})$, $\quad b_{ik} = -f_k(t_i)$

$$Q(x) = \frac{1}{m} (\lambda + Bx)^T (\lambda + Bx) = \frac{1}{m} \left[\lambda^T \lambda + 2 \lambda^T B x + x^T B^T B x \right]$$

Punti stazionari di Q: $\quad m \frac{\partial Q}{\partial x} = 2 \left[\lambda^T B + x^T B^T B \right] = 0$

si ottiene l'equazione normale $\quad \boxed{B^T B x = -B^T \lambda} \quad (*)$

$C = B^T B$ si dice matrice normale (definisce una forma quadratica non-negativa)

Assumo che $C > 0$ (def. pos.) e introduco

$\Gamma = C^{-1}$ matrice di covarianza.