

SEMINARIO DI FISICA MATEMATICA, Pisa, 7 Maggio 2008

**PERCHE' IL PROBLEMA DEGLI N CORPI GRAVITAZIONALE
E' IMPORTANTE?**

Andrea Milani Comparetti

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

e-mail: milani@dm.unipi.it

PIANO

- 1. IMPORTANZA STORICA**
- 2. CONSISTENZA DEL MODELLO**
- 3. ADEGUATEZZA DEL MODELLO**
- 4. EFFETTI RELATIVISTICI**
- 5. LE OSSERVABILI DELL'ESPERIMENTO MORE**

1.1 PROBLEMA DEGLI N CORPI

Per **problema degli N corpi gravitazionale** si intende il sistema di equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine:

$$m_j \frac{d^2 \mathbf{r}_j}{dt^2} = \sum_{i \neq j} \frac{G m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_j} ,$$

in cui \mathbf{r}_i , $j = 1, \dots, N$ sono le posizioni di N corpi puntiformi, con masse m_i , e G è la costante di gravitazione universale. Nella formulazione Lagrangiana si usa l'energia potenziale V che contiene gli inversi delle distanze:

$$V = - \sum_{i=0}^N \frac{G m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} , \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N m_j |\dot{\mathbf{r}}_j|^2 , \quad L = T - V .$$

L'importanza data a questo problema degli N corpi potrebbe sembrare eccessiva, essendo un caso molto speciale nella sua classe, per es. rispetto a potenziali con potenze diverse del raggio, o a generali sistemi Lagrangiani/Hamiltoniani.

1.2 IMPORTANZA STORICA

L'importanza storica del problema degli N corpi è immensa, non solo nella storia dell'astronomia e della fisica, ma anche della matematica. Basta citare tre esempi.

NEWTON: Il calcolo infinitesimale non era affatto affermato e le dimostrazioni non erano rigorose, almeno secondo gli standard attuali. Dopo la pubblicazione dei *Principia* di Newton, il successo predittivo del problema dei 2 (e più tardi anche dei 3) corpi rese credibile anche il metodo di calcolo.

GAUSS: La soluzione del problema della determinazione orbitale da parte di Gauss (1809) introdusse metodi ancora in uso in astronomia, e il principio dei minimi quadrati, che ancora oggi è l'applicazione della matematica più usata.

POINCARÉ: La non integrabilità dei sistemi Hamiltoniani generici, la ricerca sistematica delle orbite periodiche, la teoria del caos (che si è chiamata così solo dopo $\simeq 70$ anni) sono tutte nate ad opera di Poincaré partendo dal problema dei 3 corpi. Una storia della matematica senza problema degli N corpi non ha senso, bisognerebbe tenerne conto anche nella didattica.

Ma questo non basta per continuare a studiare lo stesso problema nella ricerca. La **MOTIVAZIONE** per studiare gli N corpi potrebbe essere il fatto che si tratta del migliore modello matematico di fenomeni fisici importanti. Migliore in che senso?

2.1 CONSISTENZA DEL MODELLO: PUNTO MASSA

CONSISTENZA: un modello può essere approssimato, ma non deve trascurare alcuni termini e poi aggiungerne di più piccoli.

Newton non ha pubblicato per ≥ 15 anni i suoi *Principia* perché non sapeva difendere la consistenza del modello degli N corpi puntiformi. La soluzione (in forma moderna) usa che il campo gravitazionale \mathbf{g} è solenoidale: $\text{div } \mathbf{g} = 0$. Se un corpo è a **simmetria sferica**, il campo \mathbf{g} è pure a simmetria sferica. Se $S(r)$ è una sfera di raggio r maggiore di quello del corpo, il flusso di \mathbf{g} non dipende da r

$$-4\pi GM = \int \int_{S(r)} \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int \int_{S(r)} (-g) dS = -4\pi r^2 g \implies g = \frac{GM}{r^2}.$$

Perciò il campo di un corpo contenuto in una sfera di raggio R differisce da quello di un corpo puntiforme con la stessa massa M di $g O(R/r)$; se il corpo puntiforme è posto nel centro di massa, la differenza è $g O(R^2/r^2)$. Se i pianeti non si avvicinano tra loro a meno di 6000 volte il loro raggio, la perturbazione dovuta alla loro forma non può superare $1/6000^2$ dell'attrazione modelata come punti massa. Per l'orbita della Luna ($r/R \simeq 60$) lo schiacciamento polare della Terra è rilevante.

2.2 CONSISTENZA DEL MODELLO: FORZE DI SUPERFICIE

La gravitazione è penetrante, agisce su tutta la massa, l'elettromagnetismo sulla superficie, il loro rapporto contiene il parametro **rapporto area su massa**, che per un corpo di forma data (per es. sferico) va con inverso del raggio:

$$\frac{A}{m} \simeq \frac{\pi R^2}{\frac{4\pi}{3} \rho R^3} = \frac{3}{4 \rho R} .$$

L'esempio più semplice è la forza di **pressione di radiazione** della luce del Sole $F = (\Phi/c) A$, dove Φ è l'illuminazione alla distanza r_{\odot} , c la velocità della luce. Per $r_{\odot} = 1 \text{ AU}$, $\Phi = 1.38 \text{ kW/m}^2$. Per via di $E = mc^2$, **il Sole perde massa sotto forma di luce** ad un ritmo di $\dot{m}_{\odot} = -4\pi r_{\odot}^2 \Phi/c^2 \simeq -4.3 \times 10^6 \text{ ton/s} \simeq -2 \times 10^{-13} m_{\odot}/\text{anno}$, (m_{\odot} la massa del Sole) con un tempo caratteristico* $t_{\odot} = |m_{\odot}|/\dot{m}_{\odot} \simeq 5 \times 10^{12} \text{ y}$. Quindi il rapporto tra F e l'attrazione gravitazionale del Sole è:

$$\beta = \frac{\Phi r_{\odot}^2 A}{G |m_{\odot}| m} \simeq \frac{A}{m} \frac{\dot{m}_{\odot}}{m_{\odot}} \frac{c}{4\pi G} \simeq \frac{A}{m} \frac{1}{5000} ,$$

dove A, m sono in unità CGS, in cui $c/4\pi G \simeq 3 \times 10^{16}$.

*Il Sole resta una stella ordinaria fino ad aver convertito in radiazione $\simeq 1/1000$ della sua massa.

2.3 PRESSIONE DI RADIAZIONE SU CHI?

- Per un **pianeta**, es. Mercurio, $\rho \simeq 5$, $r \simeq 2,400 \text{ km}$, $A/m \simeq 6 \times 10^{-10}$, quindi $\beta \simeq 1.2 \times 10^{-13}$: effetto molto piccolo.
- Per un **piccolo asteroide** $\rho \simeq 1.5$, $R \simeq 500 \text{ m}$, $A/m \simeq 10^{-5}$ e $\beta \simeq 2 \times 10^{-9}$: effetto piccolo, trascurabile per osservazioni astrometriche da Terra, ma misurabile con radar/sonda in orbita attorno all'asteroide/telescopio spaziale.
- Per un **veicolo spaziale**, $A \simeq 5 \text{ m}^2$, $m \simeq 500 \text{ kg}$, $A/m \simeq 0.1$ e $\beta \simeq 2 \times 10^{-5}$, la radiazione non è mai trascurabile.
- Per una **particella di polvere interplanetaria** c'è un raggio al quale $\beta = 1$: per una sfera omogenea con $\rho = 2$ questo accade per $R = 0.75 \text{ micron}$. Queste si chiamano β -particelle.

Conclusioni: la dinamica dei pianeti maggiori è modellata con straordinaria accuratezza dal problema degli N corpi, per i corpi minori bisogna fare attenzione all'interazione con la radiazione.

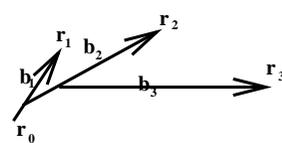
2.4 CONSISTENZA DEL MODELLO: QUALE N?

Quanti sono i pianeti del sistema solare? Quanti corpi vanno inclusi nel modello dinamico? Nelle **coordinate jacobiane**, il primo vettore è il centro di massa:

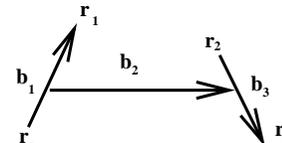
$$\mathbf{b}_j = \sum_{i=1}^N a_{ji} \mathbf{r}_i \quad , \quad A = (a_{ji}), \quad i, j = 1, N \quad , \quad a_{1i} = \frac{m_i}{M_1} \quad , \quad M_1 = \sum_{j=1}^N m_j .$$

Se si impongono le condizioni

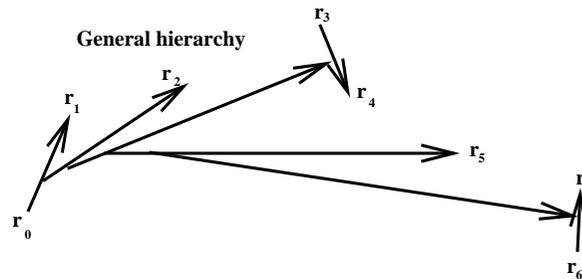
$$2T = \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 = \sum_{j=1}^N M_j |\dot{\mathbf{b}}_j|^2 \quad ; \quad , \quad \det(A) = +1$$



Planetary hierarchy



Double binary hierarchy



General hierarchy

2.5 STIMA DELLE PERTURBAZIONI

Per stimare l'entità delle perturbazioni dovute all'aggiunta di un terzo corpo si mettono in evidenza dei sottosistemi in moto lineare per \mathbf{b}_1 e a due corpi per $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$

$$L = M_1 L_1(\mathbf{b}_1, \dot{\mathbf{b}}_1) + M_2 L_2(\mathbf{b}_2, \dot{\mathbf{b}}_2) + M_3 L_3(\mathbf{b}_3, \dot{\mathbf{b}}_3) + R_{23}(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$$

$$R_{23}(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = m_3 G (m_1 + m_2) \left\{ \frac{\mu}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|} + \frac{1 - \mu}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|} - \frac{1}{|\mathbf{b}_3|} \right\}$$

($\mu = m_2/(m_1 + m_2)$) espandendo in armoniche sferiche il **potenziale perturbativo** R_{23} , con piccolo parametro $\alpha_2 = b_2/b_3$

$$R_{23}(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \frac{G(m_1 + m_2)}{b_3} \mu(1 - \mu) \left[\alpha_2^2 P_2(\sin \theta) + O(\alpha_2^3) \right],$$

dividendo per i potenziali $G(m_1 + m_2 + m_3)/b_3$ e $G(m_1 + m_2)/b_2$ si hanno i **piccoli parametri di Roy-Walker** che stimano l'importanza relativa delle perturbazioni:

$$\varepsilon_{23} = \frac{m_2}{m_1} \frac{b_2^2}{b_3^2}; \quad \varepsilon_{32} = \frac{m_3}{m_1 + m_2} \frac{b_2^3}{b_3^3}$$

2.6 MODELLO DEL SISTEMA PLANETARIO

Subsystem	ϵ_{23}	ϵ_{32}
Sun-Mercury-Earth	2.5×10^{-8}	1.7×10^{-7}
Sun-Venus-Earth	1.3×10^{-6}	1.1×10^{-6}
Sun-Earth-Mars	1.3×10^{-6}	9.2×10^{-8}
Sun-Earth-Ceres	4.0×10^{-7}	2.2×10^{-11}
Sun-Earth-Jupiter	1.1×10^{-7}	6.8×10^{-6}
Sun-Earth-Saturn	3.3×10^{-8}	3.3×10^{-7}
Sun-Earth-Uranus	8.2×10^{-9}	6.2×10^{-9}
Sun-Earth-Neptune	3.3×10^{-9}	1.9×10^{-9}
Sun-Earth-Pluto	4.8×10^{-10}	7.5×10^{-13}
Earth-Moon-Sun	7.9×10^{-8}	5.7×10^{-3}
Jupiter-Ganymede-Sun	1.5×10^{-10}	2.7×10^{-6}

Piccoli parametri di Roy-Walker per sottosistemi a tre corpi del sistema solare.

Conclusioni: il sistema solare è abbastanza gerarchico (pianeti maggiori abbastanza distanziati) da avere piccole perturbazioni mutue tra i **pianeti maggiori**, che vanno comunque inclusi nel modello: Plutone non è un pianeta maggiore. A livelli di precisione più alta, Cerere conta più di Plutone, la Luna va inclusa.

3.1 CONSISTENZA, ACCURATEZZA E ADEGUATEZZA

Il modello degli N corpi è consistente per il moto dei pianeti (per gli asteroidi occhio alle perturbazioni non gravitazionali, come l'effetto Yarkovsky).

L'accuratezza è buona, scegliendo i pianeti maggiori più la Luna (quindi $N = 10$, con correzioni per l'orbita della Luna) gli ε di Roy delle perturbazioni dei corpi trascurati sono dell'ordine di 10^{-9} , la pressione di radiazione è trascurabile, altri effetti (per es. le maree) sono significativi solo per la Luna. Per fare meglio bisogna tenere conto dei maggiori asteroidi, di qualche grosso satellite, e di altri termini perturbativi nell'orbita della Luna.

Questa consistenza e accuratezza del modello degli N corpi dipende da come è fatto il nostro sistema planetario, con pochi pianeti maggiori e con poca radiazione. (Principio antropico????)

Adeguatezza: oltre che consistente, il modello deve anche essere abbastanza accurato da poter usare in pieno l'accuratezza delle misure che osservano il moto degli N corpi.

3.2 ACCURATEZZA DELLE MISURE

Il concetto di adeguatezza è relativo: occorre specificare le osservazioni che si intendono usare per la determinazione orbitale, la loro accuratezza e l'intervallo di tempo coperto dalle osservazioni.

- Per **osservazioni astrometriche**, cioè angolari, dei pianeti/asteroidi dalla Terra, l'accuratezza è $0,02 \div 2$ arcsec $\simeq 10^{-7} \div 10^{-5}$ radianti, tempo di osservazione $\Delta t \simeq 10 \div 200$ anni. Da telescopi spaziali si può fare 100 volte meglio.
- Per il **radar planetario**, accuratezza $50 \div 5000$ metri in distanza, cioè $RMS(r) \simeq 3 \times 10^{-10} \div 3 \times 10^{-8}$ AU ($\simeq a_{\oplus}$), $50 \div 5000$ metri/giorno in velocità radiale, $\Delta t \simeq 10 \div 30$ anni.
- Con l'**inseguimento di sonde in orbita attorno ad altri pianeti/asteroidi** (usando anche sistemi radio della prossima generazione) $RMS(r) \simeq 0,1 \div 50$ metri, $RMS(\dot{r}) \simeq 3 \div 1000$ micron/secondo. Accuratezza relativa potrà arrivare a 10^{-12} su distanze di $\simeq 1$ AU.
- Con il **laser**, $RMS(r) \simeq 0,5 \div 5$ centimetri, per esempio usando gli specchi depositati sulla Luna negli anni 70.

3.3 N CORPI NEWTONIANO E' UN MODELLO ADEGUATO?

Alla fine del XIX secolo, i residui delle osservazioni astrometriche di Mercurio, rispetto al modello a N corpi, si erano accumulati fino a 8 arcsec, corrispondenti ad una precessione del perielio di $\simeq 42$ arcsec/secolo. Il primo trionfo della **relatività generale di Einstein** fu di aver spiegato questo effetto, pur lasciando immutato l'accordo con le osservazioni per tutto il resto.

Quindi da circa 90 anni il problema degli N corpi in relatività generale è un modello dinamico del sistema solare **migliore** di quello ad N corpi newtoniano. Però la relatività è una perturbazione, con piccolo parametro $v^2/c^2 \simeq 3 \times 10^{-8}$ per Mercurio (v = velocità del pianeta, c = velocità della luce), o anche usando il **raggio di Schwarzschild** del Sole $R_{sch} = Gm_{\odot}/c^2 \simeq 1,5$ km, il piccolo parametro è R_{sch}/r (r = distanza Sole-pianeta; coincidono per orbite circolari).

Per le osservazioni moderne (radar, laser, inseguimento di sonde) il modello a N corpi Newtoniano **non è più adeguato**, ma essendo **consistente** serve sempre come base a cui applicare le perturbazioni relativistiche e/o le perturbazioni non gravitazionali.

4.1 EFFETTI RELATIVISTICI

Non si può spiegare la relatività generale in una pagina. Mi spiegherò usando l'approccio **Parametrico Post Newtoniano (PPN)**: le equazioni di moto relativistico sono linearizzate rispetto a parametri che appaiono nella metrica (e nella connessione) dello spazio-tempo, e che $\rightarrow 0$ al limite newtoniano; con formalismo Lagrangiano:

$$L(\beta, \gamma, \delta, \dot{G}/G, \dots) = L_N + L_{GR} + \beta L_\beta + \gamma L_\gamma + L_\delta + (\dot{G}/G) L_{\dot{G}/G} + \dots$$

dove L_{GR} contiene correzioni relativistiche senza parametri liberi. Dal **parametro di Eddington γ** dipende la curvatura dello spazio-tempo in risposta ad un dato potenziale gravitazionale: si introduce con termini dipendenti dalla velocità:

$$L_\gamma = \frac{1}{2c^2} \sum_{i < j} \frac{G m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|^2 ;$$

γ influenza anche la deflessione/ritardo delle onde elettromagnetiche che viaggiano nello spazio-tempo curvo. Il **parametro β** descrive le interazioni a tre corpi:

$$L_\beta = -\frac{1}{c^2} \sum_{i \neq j, k} \frac{G^2 m_i m_j m_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} .$$

Nella relatività generale di Einstein $\beta = \gamma = 1$: **l'unico parametro libero è G** , che è costante $\dot{G} = 0$; L_δ modella le violazioni del principio di equivalenza ed è 0.

4.2 VIOLAZIONI DELLA RELATIVITA' DI EINSTEIN

Cosa vuol dire **verificare sperimentalmente la relatività di Einstein**? Nell'approccio PPN, si può cercare di determinare β, γ , per esempio da esperimenti di determinazione orbitale nel sistema solare. Vanno usati corpi abbastanza grossi da avere trascurabili perturbazioni non gravitazionali, oppure con accelerometri a bordo per misurarle. Per esempio un esperimento con la sonda Cassini ha dato $|\gamma - 1| < 2 \times 10^{-5}$ (Bertotti et al. 2002). β è meno ben noto, $|\beta - 1| < 3 \times 10^{-3}$.

Le violazioni del principio di equivalenza sono più complicate da trattare, ma si possono usare argomenti simili, basati sul termine L_δ .

$$L_\delta = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (\delta_i + \delta_j) \frac{G m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad \delta_i = \delta_i^W + \eta \frac{E_i^{\text{grav}}}{m_i c^2}$$

di cui δ_i^W indica una possibile dipendenza della gravità dalla composizione del corpo (violazione del **principio di equivalenza debole**), che però è già stata smentita a livelli di 10^{-13} da esperimenti a terra, mentre η indica le violazioni del **principio di equivalenza forte**, per cui anche l'auto-energia gravitazionale di un corpo produce la stessa gravità di ogni altra forma di massa/energia. In pratica questo termine è misurabile solo per il Sole, per cui $E_\odot^{\text{grav}} / (m_\odot c^2) \simeq -3.5 \times 10^{-6}$.

4.3 LA COSTANTE DI GRAVITAZIONE E LA MASSA DEL SOLE

Una possibilità molto interessante per la cosmologia è la **variazione con il tempo della costante di gravitazione G** . Poichè il tempo scala dovrebbe essere almeno il tempo di Hubble ($\simeq 10^{10}$ anni, età dell'universo), \dot{G}/G deve essere piccolo: dalla determinazione orbitale della Luna con i dati laser si sa che $|\dot{G}/G| \leq 4 \times 10^{-12}$ per anno. I termini corrispondenti della Lagrangiana sono

$$L_{\dot{G}/G} = t \sum_{i < j} \frac{G m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}.$$

In pratica gli unici termini abbastanza grandi da avere effetti misurabili sono quelli contenenti la massa del Sole $m_1 = m_{\odot}$. Perciò il parametro da determinare potrebbe anche essere descritto come

$$\zeta = \frac{dGm_{\odot}}{dt} / Gm_{\odot}$$

e non c'è modo di distinguere **il cambiamento col tempo di G** dal **cambiamento col tempo di m_{\odot}** . Se supponiamo di fare un esperimento di determinazione orbitale di Mercurio (come MORE, discusso dopo) tale da misurare ζ con accuratezza 10^{-13} , ciò che si dovrebbe misurare è in effetti $\dot{m}_{\odot}/m_{\odot} \simeq 2 \times 10^{-13}$, se G è costante a quel livello. Inoltre occhio alla pressione di radiazione su Mercurio, visto che $\beta \simeq 1,2 \times 10^{-13}$, ma per fortuna è costante.

5.1 LE OSSERVABILI DELL'ESPERIMENTO MORE

Mercury Orbiter Radioscience Experiment (MORE) è un esperimento imbarcato sulla missione a Mercurio dell'Agenzia Spaziale Europea (ESA) **BepiColombo***. Usando i dati di distanza r e velocità radiale \dot{r} da una stazione a terra al satellite artificiale di Mercurio, ci si propone di studiare la struttura interna di Mercurio (misurandone il campo gravitazionale e la rotazione) e verificare la relatività generale di Einstein (misurando l'orbita di Mercurio). La **distanza** si calcola come

$$r = |(\mathbf{x}_{sat} + \mathbf{x}_M) - (\mathbf{x}_{EM} + \mathbf{x}_E + \mathbf{x}_{ant})| + S(\gamma)$$

con: \mathbf{x}_{sat} la posizione mercuricentrica del satellite, \mathbf{x}_M la posizione di Mercurio, \mathbf{x}_{EM} del baricentro Terra-Luna (entrambe rispetto al baricentro del sistema solare), \mathbf{x}_E va dal baricentro T-L al centro della Terra, \mathbf{x}_{ant} la posizione geocentrica dell'antenna a terra, $S(\gamma)$ è l' **effetto Shapiro**, cioè la differenza tra la distanza nello spazio piatto e la lunghezza della geodetica nello spaziotempo curvo relativistico.

*Giuseppe, detto Bepi, Colombo (1920–1984), autore della prima teoria della rotazione risonante di Mercurio, e dei metodi di ritorno risonante per raggiungerlo con una sonda spaziale.

5.2 LA SOLUZIONE PER IL TEMPO LUCE

L'equazione precedente sembra già complicata, ma le cose stanno molto peggio. Ognuno dei cinque vettori va calcolato ad un suo tempo, \mathbf{x}_{EM} , \mathbf{x}_E , \mathbf{x}_{ant} ai tempi di trasmissione t_t e di ricezione t_r del segnale, \mathbf{x}_M , \mathbf{x}_{sat} al tempo di rinvio t_b del segnale dal satellite; in più, ognuno di questi è calcolato in una sua scala di tempi, visto che in relatività generale non esiste una singola scala di tempi assoluta ma solo dei **tempi coordinati** o dei **tempi propri**. Quindi ci sono due differenti **tempi luce** impiegati dal segnale: $\Delta t_{up} = t_b - t_t$ per il viaggio di andata e $\Delta t_{down} = t_r - t_t$ per quello di ritorno del segnale, che sono definiti implicitamente dalle due equazioni

$$r_{up}(t_r) = |\mathbf{x}_{sat}(t_b) + \mathbf{x}_M(t_b) - \mathbf{x}_{EM}(t_r) - \mathbf{x}_E(t_r) - \mathbf{x}_{ant}(t_r)| + S_{up}(\gamma)$$

$$r_{do}(t_r) = |\mathbf{x}_{sat}(t_b) + \mathbf{x}_M(t_b) - \mathbf{x}_{EM}(t_t) - \mathbf{x}_E(t_t) - \mathbf{x}_{ant}(t_t)| + S_{do}(\gamma)$$

che devono essere risolte da un **metodo iterativo** (per es. del punto unito) per ciascuna. Per calcolare la velocità radiale si usa per es. $\dot{r}_{do}(t_r) = \hat{\mathbf{r}}_{do} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{do} + \dot{S}_{do}(\gamma)$ ma non si può trascurare che t_b, t_t dipendono da t_r tramite r_{do}, r_{up}

$$\dot{\mathbf{r}}_{do} = (\dot{\mathbf{x}}_{sat} + \dot{\mathbf{x}}_M) \left(1 - \dot{r}_{do}/c + \frac{d\Delta_{do}(tc)}{dt_b} \right) - (\dot{\mathbf{x}}_{EM} + \dot{\mathbf{x}}_E + \dot{\mathbf{x}}_{ant})$$

inclusa la correzione $d\Delta_{do}(tc)/dt$ per la diversa scala di tempo. Quindi ci vogliono altre due iterazioni per calcolare $r_{up}(t_r)$, $r_{do}(t_r)$ e di conseguenza Δt_{up} , Δt_{down} .

5.3 GLI OBIETTIVI SCIENTIFICI (MA CHI CE LO FA FARE?)

I problemi dovuti alla **teoria relativistica degli N corpi** (tutt'altro che pacifica), alla **complicazione delle equazioni** (di moto, di osservazione) e ai **requisiti di precisione numerica** (accuratezze relative fino a 2.5×10^{-15}) sono enormi e richiederanno ancora anni di lavoro al nostro gruppo di 6 persone e agli altri del team MORE.

Se però ci riusciamo, i risultati scientifici saranno molto importanti. Dei cinque vettori usati per calcolare $r, \dot{r}, \mathbf{x}_{ant}$ e \mathbf{x}_E sono noti al livello del centimetro e non si possono certo migliorare osservando Mercurio. Invece \mathbf{x}_{sat} contiene informazione sul **campo di gravità di Mercurio**, e serve come riferimento per le osservazioni della superficie del pianeta (quindi anche della sua rotazione). $\mathbf{x}_M, \mathbf{x}_{EM}$ e $S(\gamma)$ contengono informazioni sulle **orbite dei pianeti Mercurio e Terra** e **sulla teoria della gravitazione**.

Da una determinazione orbitale completa della sonda BepiColombo mentre orbita attorno a Mercurio si possono quindi ricavare risultati importanti sia sulla **geofisica di Mercurio** che sulla **relatività generale**.

In definitiva, **noi stiamo ancora usando il problema degli N corpi**, sia pure in una **versione aggiornata con le perturbazioni relativistiche**, e continueremo ad usarlo fino alla conclusione della missione BepiColombo, prevista per il 2019. Ossia, fino al mio pensionamento e oltre.