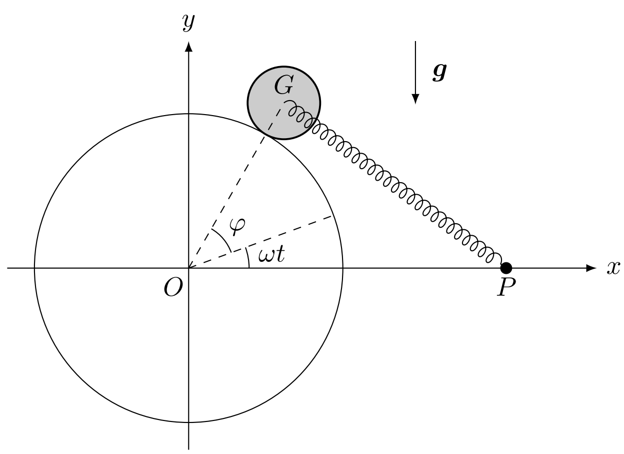
Compito di Meccanica Razionale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

12 Gennaio 2026

Primo Esercizio (*15 punti*)

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Sul piano verticale Oxy si consideri un disco omogeneo di massa m e raggio r che rotola senza strisciare su una guida circolare di raggio R e con centro in O. La guida ruota attorno all'asse Oz con velocità angolare costante di modulo pari a ω. In figura, tramite l'angolo ωt, dove t è il tempo, indichiamo una direzione solidale alla guida. Un punto materiale P di massa M scivola lungo l'asse Ox. Una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla collega il baricentro G del disco con P. Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione $\boldsymbol{g}$ parallela ad Oy e di modulo uguale a g.



Utilizzando come parametri lagrangiani l'angolo φ tra il segmento OG e la direzione solidale alla guida individuata dall'angolo ωt, e l'ascissa s del punto P,

i) (*4 punti*) calcolare la velocità angolare del disco;

ii) (*2 punti*) calcolare le velocità virtuali di G e del punto del disco a contatto con la guida;

iii) (*4 punti*) determinare le equazioni pure del moto con le equazioni cardinali della dinamica;

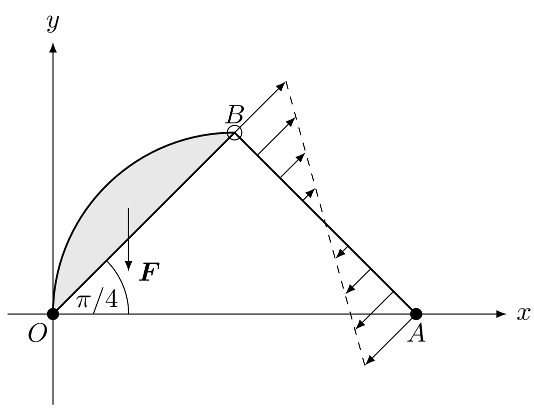
iv) (*5 punti*) trovare un sistema di forze costituito da un unico vettore applicato in un punto opportuno equivalente alle forze centrifughe che agiscono sul disco in un riferimento solidale alla guida.

Secondo Esercizio (*15 punti*)

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Sul piano orizzontale Oxy si consideri il sistema meccanico formato da un arco a tre cerniere costituito da un corpo rigido omogeneo $\mathcal{C}$ vincolato in O da una coppia rotoidale fissa e in $B \equiv (\ell/\sqrt{2}, \ell/\sqrt{2})$ ad un'asta AB da una coppia rotoidale mobile. L'asta è vincolata in $A \equiv (2\ell/\sqrt{2}, 0)$ da una coppia rotoidale fissa. Il corpo $\mathcal{C}$ è costituito dai punti della regione del piano delimitata dal segmento OB e dal quarto di circonferenza di raggio $\ell/\sqrt{2}$ e con centro nel punto $(\ell/\sqrt{2}, 0)$. Al baricentro di $\mathcal{C}$ è applicata la forza $\boldsymbol{F} = (0, -F)^T$, $F > 0$. L'asta AB è sollecitata da un carico per unità di lunghezza distribuito lungo l'asta dato da

$$\boldsymbol{f}(s) = \frac{F}{\ell}\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{\ell}\right)\boldsymbol{e}_t, \qquad \boldsymbol{e}_t = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)^T,$$

dove $F > 0$ è costante ed s rappresenta la distanza dei punti dell'asta da B. Si assuma che tutti i vincoli siano ideali.



i) (*3 punti*) Ottenere un sistema di forze applicate equivalente al sistema costituito dal carico distribuito che sia il più semplice possibile.

ii) (*4 punti*) Calcolare la posizione del baricentro di $\mathcal{C}$.

iii) (*4 punti*) Determinare le reazioni vincolari interne ed esterne al sistema con il metodo della sovrapposizione degli effetti.

iv) (*4 punti*) Ritrovare la reazione vincolare in A con il principio dei lavori virtuali.

Soluzione Primo Esercizio

i)
Introduciamo la base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Sia Q il punto di contatto tra il disco e la guida. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}_Q &= R\left[\cos(\omega t+\varphi)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t+\varphi)\boldsymbol{e}_2\right],\\
\boldsymbol{\chi}_G &= (R+r)\left[\cos(\omega t+\varphi)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t+\varphi)\boldsymbol{e}_2\right].
\end{aligned}$$

La velocità angolare del disco $\boldsymbol{\omega}^d = \omega^d \boldsymbol{e}_3$ si trova dalla formula fondamentale della cinematica rigida:

$$\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{v}_Q + \boldsymbol{\omega}^d \times (\boldsymbol{\chi}_G - \boldsymbol{\chi}_Q),$$

dove

$$\boldsymbol{v}_G = (R+r)(\omega+\dot{\varphi})\left[-\sin(\omega t+\varphi)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t+\varphi)\theta\boldsymbol{e}_2\right]$$

e la velocità $\boldsymbol{v}_Q$ si ottiene dalla condizione di puro rotolamento che porta a scrivere

$$\boldsymbol{v}_Q = \omega\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{\chi}_Q = R\omega\left[-\sin(\omega t+\varphi)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t+\varphi)\boldsymbol{e}_2\right].$$

Sostituendo, si ottiene

$$\boldsymbol{\omega}^d = \left(\frac{R+r}{r}(\omega+\dot{\varphi}) - \frac{R}{r}\omega\right)\boldsymbol{e}_3.$$

ii)
Le velocità virtuali di G e del punto del disco a contatto con la guida si ottengono immaginando di bloccare la guida, come se all'istante t fosse fissa:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_G &= (R+r)\dot{\varphi}\left[-\sin(\omega t+\varphi)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t+\varphi)\boldsymbol{e}_2\right],\\
\mathbf{v}_Q &= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

iii)
Un'equazione pura del moto si ottiene dalla seconda equazione cardinale della dinamica del disco rispetto a Q:

$$\dot{\mathbf{M}}_Q = \mathbf{N}_Q - m\dot{\boldsymbol{\chi}}_Q \times \boldsymbol{v}_G.$$

Si ha

$$\mathbf{N}_Q = (\boldsymbol{\chi}_G - \boldsymbol{\chi}_Q)\times(\mathbf{F}_{\mathrm{el}} - mg\boldsymbol{e}_2) = r\left[-ks\sin(\omega t+\varphi) - mg\cos(\omega t+\varphi)\right]\boldsymbol{e}_3,$$

dove

$$\mathbf{F}_{\mathrm{el}} = -k(\boldsymbol{\chi}_G - \boldsymbol{\chi}_P) = k\left[s-(R+r)\cos(\omega t+\varphi)\right]\boldsymbol{e}_1 - k(R+r)\sin(\omega t+\varphi)\boldsymbol{e}_2.$$

Inoltre

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_Q \times \boldsymbol{v}_G = \mathbf{0}$$

perchè le due velocità sono parallele. Infine,

$$\mathbf{M}_Q = I_{Q,z}\boldsymbol{\omega}^d + m(\boldsymbol{\chi}_G - \boldsymbol{\chi}_Q)\times\boldsymbol{v}_Q,$$

con $I_{P,z} = 3mr^2/2$. Si ottiene

$$\mathbf{M}_Q = \frac{mr}{2}\left[3(R+r)(\omega+\dot{\varphi}) - R\omega\right]\boldsymbol{e}_3.$$

Allora l'equazione del moto diventa

$$\frac{3m}{2}(R+r)\ddot{\varphi} = -ks\sin(\omega t+\varphi) - mg\cos(\omega t+\varphi).$$

La seconda equazione pura del moto si ottiene dalla prima equazione cardinale della dinamica del punto P,

$$M\mathbf{a}_P = -\mathbf{F}_{\mathrm{el}} - Mg\boldsymbol{e}_2 + \Phi\boldsymbol{e}_2,$$

dove $\mathbf{a}_P$ è l'accelerazione di P e $\Phi\boldsymbol{e}_2$ è la reazione vincolare che agisce su di esso. Si ha

$$M\ddot{s} = k\left[(R+r)\cos(\omega t+\varphi) - s\right].$$

iv)
Introduciamo la base $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3\}$ solidale alla guida, con

$$\boldsymbol{e}_1' = (\cos\omega t)\boldsymbol{e}_1 + (\sin\omega t)\boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1'.$$

La posizione di un generico punto del disco in questa base si può scrivere attraverso le coordinate polari $\rho \in [0,r]$, $\theta \in [0, 2\pi)$ come segue:

$$\boldsymbol{\chi} = x'\boldsymbol{e}_1' + y'\boldsymbol{e}_2',$$

dove

$$x' = (R+r)\cos\varphi + \rho\cos\theta, \qquad y' = (R+r)\sin\varphi + \rho\sin\theta.$$

Indicando con $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_3$ la velocità angolare della base solidale alla guida rispetto a quella fissa, l'accelerazione centrifuga che agisce sul generico punto del disco è data da

$$\mathbf{a}_c = -\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\chi}) = \omega^2\boldsymbol{\chi}.$$

Chiamando $\sigma = \frac{m}{\pi r^2}$ la densità del disco, la risultante delle forze centrigughe che agiscono sul disco è

$$\mathbf{R} = \omega^2\sigma\int_0^r\int_0^{2\pi}\boldsymbol{\chi}\ \rho d\rho d\theta = m\omega^2\boldsymbol{\chi}_G.$$

Possiamo cercare la posizione $\boldsymbol{\chi}_A = x_A'\boldsymbol{e}_1' + y_A'\boldsymbol{e}_2'$ di un punto A dell'asse centrale ponendo $\mathbf{N}_A = \mathbf{0}$. Risulta

$$\mathbf{N}_A = \sigma\int_0^r\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{\chi}-\boldsymbol{\chi}_A)\times\mathbf{a}_c\ \rho d\rho d\theta = m\omega^2(R+r)(x_A'\sin\varphi - y_A'\cos\varphi)\boldsymbol{e}_3 = \mathbf{0}.$$

Segue che $y_A' = (\tan\varphi)x_A'$, che rappresenta la retta passante per O e per G. In definitiva il sistema $\{(G,\mathbf{R})\}$ è equivalente alle forze centrifughe che agiscono sul disco in un riferimento solidale alla guida.

Soluzione Secondo Esercizio

i)

Introduciamo la base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Notiamo che

$$\overline{OA} = \overline{AB} = \ell.$$

La risultante è data da

$$\boldsymbol{R} = \int_0^\ell \boldsymbol{f}(s)ds = \int_0^\ell \frac{F}{\ell}\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{\ell}\right)\boldsymbol{e}_t ds = \boldsymbol{0}.$$

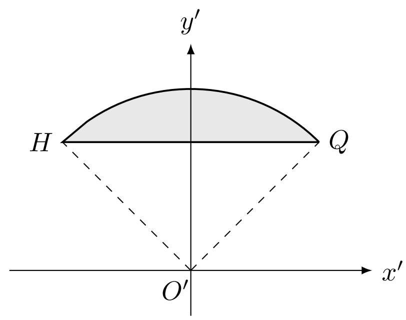
Poichè il sistema di forze esterne attive applicate all'asta AB è piano, il trinomio invariante è nullo. Per un risultato visto, possiamo sostituire tale sistema con una coppia di momento pari a

$$\boldsymbol{N} = \int_0^\ell s\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{f}(s)\ ds = -\frac{F\ell}{12}\boldsymbol{e}_3,$$

con $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_t \times \boldsymbol{e}_3$.

ii)

Consideriamo la seguente figura.



Siano G, G_1, G_2 i baricentri di $\mathcal{C}$, il quarto di disco ed il triangolo $O'HQ$. Siano inoltre m e σ la massa e la densità di $\mathcal{C}$. Evidentemente $x'_G = 0$. Inoltre, si ha

$$y'_G = \frac{1}{m}\left(m_1 y'_{G_1} - m_2 y'_{G_2}\right),$$

dove $m_2 = \frac{\sigma\ell^2}{4}$,

$$m_1 y'_{G_1} = \sigma \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \rho^2 \cos\theta d\rho d\theta = \frac{\sigma\ell^3}{6}$$

e, da un risultato noto,

$$y'_{G_2} = \frac{\ell}{3}.$$

Risulta

$$y'_G = \frac{2\ell}{3(\pi-2)}.$$

La posizione di G è data da

$$x_G = \sqrt{2}\ell\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3(\pi-2)}\right), \qquad y_G = \frac{\sqrt{2}\ell}{3(\pi-2)}.$$

iii)
Consideriamo dapprima il caso in cui agisce solo la coppia $\boldsymbol{N}$ sull'asta AB. Sia $\boldsymbol{\Phi}'_B$ la reazione che AB esercita su $\mathcal{C}$. Dall'equilibrio di $\mathcal{C}$ segue subito che

$$\boldsymbol{\Phi}'_B = \frac{\Phi'_B}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = -\boldsymbol{\Phi}'_O.$$

Inoltre dall'equilibrio di AB si ha

$$\boldsymbol{\Phi}'_B = \boldsymbol{\Phi}'_A.$$

Dalla seconda equazione cardinale della statica per AB rispetto ad A si trova

$$\Phi'_B = \frac{F}{12}.$$

Dunque

$$\boldsymbol{\Phi}'_B = \frac{F}{12\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = -\boldsymbol{\Phi}'_O = \boldsymbol{\Phi}'_A.$$

Consideriamo ora il caso in cui agisce $-F\boldsymbol{e}_2$ nel baricentro G di $\mathcal{C}$. Sia $\boldsymbol{\Phi}''_B$ la reazione che AB esercita su $\mathcal{C}$. Dall'equilibrio di AB segue subito che

$$\boldsymbol{\Phi}''_B = \frac{\Phi''_B}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{\Phi}''_A.$$

Dalla seconda equazione cardinale della statica per $\mathcal{C}$ rispetto ad O si trova

$$\Phi''_B = -\frac{F x_G}{\ell}.$$

Infine dalla prima equazione cardinale della statica per $\mathcal{C}$ si ha

$$\boldsymbol{\Phi}''_O = \frac{F x_G}{\ell\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_1 + F\left(1 - \frac{x_G}{\ell\sqrt{2}}\right)\boldsymbol{e}_2.$$

Sovrapponendo gli effetti si ottiene:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}_B &= \frac{F}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{1}{12} - \frac{x_G}{\ell}\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{1}{12} + \frac{x_G}{\ell}\right)\boldsymbol{e}_2\right] = \boldsymbol{\Phi}_A,\\
\boldsymbol{\Phi}_O &= \frac{F}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{x_G}{\ell} - \frac{1}{12}\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\sqrt{2} - \frac{x_G}{\ell} - \frac{1}{12}\right)\boldsymbol{e}_2\right].
\end{aligned}$$

iv)
Eliminando il vincolo in A il sistema acquista 2 gradi di libertà, che rappresentiamo attraverso gli angoli θ e φ definiti nella figura 1). Inoltre, la reazione $\boldsymbol{\Phi}_A = \Phi_{A,x}\boldsymbol{e}_1 + \Phi_{A,y}\boldsymbol{e}_2$ è ora vista come una forza attiva. Il principio dei lavori virtuali porge

$$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{\omega}dt + \boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{\chi}_G + \boldsymbol{\Phi}_A\cdot\delta\boldsymbol{\chi}_A = 0, \tag{1}$$

per ogni spostamento virtuale che allontani il sistema dalla configurazione di equibrio $\theta = \varphi = \frac{\pi}{4}$. Si ha

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} &= \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3,\\
\boldsymbol{F} &= -F\boldsymbol{e}_2,\\
\boldsymbol{\chi}_G &= \left(\frac{\ell}{2}\cos\theta - d\sin\theta\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{\ell}{2}\sin\theta + d\cos\theta\right)\boldsymbol{e}_2,\\
\boldsymbol{\chi}_A &= \ell\left(\cos\theta + \sin\varphi\right)\boldsymbol{e}_1 + \ell\left(\sin\theta - \cos\varphi\right)\boldsymbol{e}_2,
\end{aligned}$$

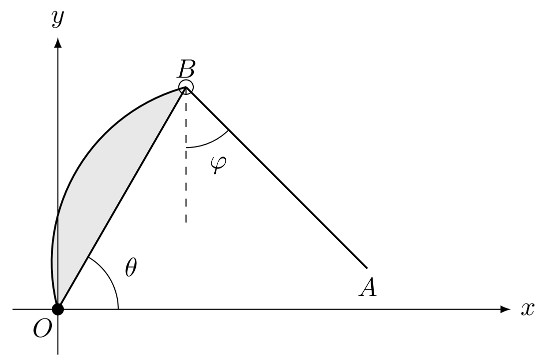


Figura 1: Figura relativa al punto iv).

dove $d = y'_G - \frac{\ell}{2}$ e $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare di AB. Gli spostamenti virtuali sono

$$\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{\chi}_G &= -\delta\theta\left(\frac{\ell}{2}\sin\theta + d\cos\theta\right)\boldsymbol{e}_1 + \delta\theta\left(\frac{\ell}{2}\cos\theta - d\sin\theta\right)\boldsymbol{e}_2,\\
\delta\boldsymbol{\chi}_A &= \ell\left(-\delta\theta\sin\theta + \delta\varphi\cos\varphi\right)\boldsymbol{e}_1 + \ell\left(\delta\theta\cos\theta + \delta\varphi\sin\varphi\right)\boldsymbol{e}_2.
\end{aligned}$$

L'equazione (1), dopo aver posto $\theta = \varphi = \frac{\pi}{4}$, diventa

$$-\frac{F\ell\sqrt{2}}{12}\delta\varphi + F(y'_G - \ell)\delta\theta + \Phi_{A,x}\ell(\delta\varphi - \delta\theta) + \Phi_{A,y}\ell(\delta\varphi + \delta\theta) = 0$$

e deve valere per ogni $\delta\theta$ e per ogni $\delta\varphi$. Segue che

$$\begin{aligned}
&F(y'_G - \ell) - \ell\Phi_{A,x} + \ell\Phi_{A,y} = 0,\\
&\Phi_{A,x}\ell + \Phi_{A,y}\ell - \frac{F\ell\sqrt{2}}{12} = 0,
\end{aligned}$$

da cui si ottiene la stessa reazione $\boldsymbol{\Phi}_A$ trovata in precedenza.