

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

15 Novembre 2018

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1

Si consideri la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 + q^2 - q), \quad q, \dot{q} \in \mathbb{R}.$$

- i) Trovare la soluzione $t \mapsto \bar{\gamma}(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\bar{\gamma}(0) = 1, \quad \dot{\bar{\gamma}}(0) = 0.$$

- ii) Mostrare che, per ogni $T > 0$, la soluzione $\bar{\gamma}$ è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^T L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

nella classe di funzioni $C^1([0, T], \mathbb{R})$.

- iii) Fissato $T > 0$, calcolare la *slope function* $\mathcal{P}(t, q)$ del campo di estremali $\{\gamma_\alpha(t)\}_\alpha$ definito sulla striscia $\{(t, \alpha) : t \in (0, T), \alpha \in \mathbb{R}\}$ dalle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma_\alpha(0) = 1, \quad \dot{\gamma}_\alpha(0) = \alpha.$$

- iv) Scrivere le equazioni di Carathéodory e calcolare la funzione iconale $S(q, t)$.

Esercizio 2

Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 + \frac{1}{8}|\mathbf{q}|^2 + \frac{1}{2}(p_1 q_2 - q_1 p_2),$$

con $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$.

- i) Completare le relazioni

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_2 \cos Q_1, \\ q_2 &= Q_2 \sin Q_1 \end{aligned}$$

ad una trasformazione canonica

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \xrightarrow{\Psi} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}),$$

con $\mathbf{P} = (P_1, P_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2) \in S^1 \times \mathbb{R}^+$, usando una funzione generatrice $S(\mathbf{q}, \mathbf{P})$ omogenea di grado 1 nelle $\mathbf{P}$ e scrivere la funzione di Hamilton nelle variabili $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$.

- ii) Trovare due integrali primi indipendenti per il campo vettoriale hamiltoniano X_H .
- iii) Mostrare che le coordinate polari (Q_1, Q_2) sono variabili separabili per l'equazione di Hamilton-Jacobi associata a $K = H \circ \Psi^{-1}$.

Secondo compito di Istituzioni di Fisica Matematica

19 Dicembre 2018

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1

Siano date le funzioni

$$H_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 + p_1(q_1 + q_2), \quad H_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 + p_2(q_1 + q_2),$$

con $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$.

- i) Trovare le soluzioni dei sistemi hamiltoniani per H_1 , H_2 in corrispondenza alle condizioni iniziali

$$p_1(0) = 1, \quad p_2(0) = 1, \quad q_1(0) = 1, \quad q_2(0) = -1.$$

- ii) Trovare una trasformazione canonica

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \xrightarrow{\Psi} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}),$$

con $\mathbf{P} = (P_1, P_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^2$, tale che Q_2 sia ciclica per l'hamiltoniana $H = \{H_1, H_2\}$ e determinare due integrali primi in involuzione e indipendenti su $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ per il sistema hamiltoniano definito da H .

- iii) Scrivere un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione $K = H \circ \Psi^{-1}$.

- iv) Trovare un sottoinsieme $\mathcal{I}$ di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, invariante per entrambi X_{H_1} , X_{H_2} , tale che i flussi $\Phi_{H_1}^t$, $\Phi_{H_2}^t$ ristretti ad $\mathcal{I}$ commutino.

Esercizio 2

Si consideri la hamiltoniana

$$H_\epsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \frac{1}{2} I_2^2 + \epsilon f(\varphi_1, \varphi_2),$$

con $\omega_1 > 0$, e

$$f(\varphi_1, \varphi_2) = \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) - \sin(\varphi_1 - 2\varphi_2),$$

definita per $(I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$.

- i) Trovare la forma normale risonante di H_ϵ relativa alla risonanza singola definita da $k = (1, -2)$. Scrivere anche l'espressione della funzione generatrice χ che definisce la trasformazione canonica Φ_χ^ϵ usata per passare a tale forma normale.
- ii) Descrivere l'andamento delle variabili di azione I_1, I_2 al primo ordine in ϵ all'interno della risonanza considerata e mostrare che in questo caso vale il principio della media.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

17 Gennaio 2019

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1

Data la funzione di Lagrange

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q), \quad V(q) = -\cos q, \quad q, \dot{q} \in \mathbb{R}$$

si consideri la soluzione $\gamma(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per $L(q, \dot{q})$ con condizioni iniziali

$$q(0) = \frac{\pi}{3}, \quad \dot{q}(0) = 1.$$

Trovare un valore $\bar{t} > 0$ del tempo tale che nell'intervallo $(0, \bar{t})$ non ci siano valori coniugati a $t = 0$.

Esercizio 2

Consideriamo le equazioni di Hamilton con hamiltoniana $H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$, dove

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 + V(|\mathbf{q}|)$$

e $V : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^2 .

i) Mostrare che le relazioni

$$\mathbf{P} = R_t \mathbf{p}, \quad \mathbf{Q} = R_t \mathbf{q}, \quad R_t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}. \quad (1)$$

definiscono una trasformazione canonica dipendente dal tempo e scrivere la nuova hamiltoniana $\mathcal{H}$ e il sistema hamiltoniano associato nelle variabili $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$.

- ii) Mostrare che la funzione $\mathbf{P} \cdot J\mathbf{Q}$ è un integrale primo del sistema hamiltoniano del punto i).
- iii) Usando la trasformata di Legendre scrivere la lagrangiana $\mathcal{L}$ corrispondente ad $\mathcal{H}$ nelle coordinate $\mathbf{Q}$.

Esercizio 3

Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = I_1 + I_2 + \epsilon(I_1^2 + I_2^2) \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2),$$

con $0 < \epsilon \ll 1$, $(I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$.

- i) Trovare due integrali primi del sistema hamiltoniano.
- ii) Trovare una trasformazione di coordinate canonica

$$(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) \xrightarrow{\Psi} (J_1, J_2, \theta_1, \theta_2),$$

con $J_j = J_j(I_1, I_2)$, $\theta_j = \theta_j(\varphi_1, \varphi_2)$ funzioni lineari omogenee, $j = 1, 2$, tale che la variabile angolo θ_1 sia ciclica nella funzione di Hamilton per la dinamica nelle nuove coordinate.

iii) Date le condizioni iniziali

$$I_1(0) = 1, \quad I_2(0) = -1, \quad \varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = 0,$$

mostrare che le azioni I_1, I_2 sono funzioni monotone del tempo t per $t \geq 0$.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

8 Febbraio 2019

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1

Data la funzione di Lagrange

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q), \quad V(q) = -\cos q, \quad q, \dot{q} \in \mathbb{R}$$

si consideri la soluzione $\gamma(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per $L(q, \dot{q})$ con condizioni iniziali

$$q(0) = \frac{\pi}{4}, \quad \dot{q}(0) = 1.$$

Dimostrare che esiste un valore positivo del tempo $\bar{t} < +\infty$ coniugato a $t = 0$.¹

Esercizio 2

Consideriamo l'hamiltoniana $H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_1^2 + q_2^2,$$

dove $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$.

- i) Trovare tre integrali del moto diversi da H che siano indipendenti tra loro nel dominio di H e dire se sono in involuzione.
- ii) Calcolare il flusso integrale $\Phi^t(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ delle equazioni di Hamilton associate ad H e verificare che, per ogni $\bar{t} \in \mathbb{R}$, $\Phi^{\bar{t}}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ definisce una trasformazione canonica.
- iii) Dimostrare che la trasformazione Ψ dipendente dal tempo e definita da

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \xrightarrow{\Psi} (\Phi^t(\mathbf{p}, \mathbf{q}), t)$$

è canonica trovandone una opportuna funzione generatrice.

Esercizio 3

Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(\mathbf{I}, \varphi) = I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2 + 2\epsilon [\sin 2\varphi_1 \cos \varphi_2 + I_1^2 \cos^2(2\varphi_1 - \varphi_2)],$$

dove

$$\mathbf{I} = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2, \quad 0 < \epsilon \ll 1.$$

Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(\mathbf{I}, \varphi) \xrightarrow{\Psi_\epsilon} (\tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\varphi})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ϵ . Scrivere inoltre la forma normale non risonante.

¹*Suggerimento:* ragionare per assurdo assumendo che un tale valore di $\bar{t}$ non esista.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

18 Giugno 2019

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1

Si consideri la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + q\dot{q} + q^2 - q \sin t, \quad q, \dot{q} \in \mathbb{R}.$$

- i) Trovare la soluzione $t \mapsto \bar{\gamma}(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\bar{\gamma}(0) = 1, \quad \dot{\bar{\gamma}}(0) = 0.$$

- ii) Mostrare che, per ogni $T > 0$, la soluzione $\bar{\gamma}$ è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^T L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

nella classe di funzioni $C^1([0, T], \mathbb{R})$.

- iii) Fissato $T > 0$, calcolare la *slope function* $\mathcal{P}(t, q)$ del campo di estremali $\{\gamma_\alpha(t)\}_\alpha$ definito sulla striscia $\{(t, \alpha) : t \in (0, T), \alpha \in \mathbb{R}\}$ dalle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma_\alpha(0) = 1, \quad \dot{\gamma}_\alpha(0) = \alpha.$$

Esercizio 2

Si consideri la trasformazione $\Psi : (p, q, t) \rightarrow (P, Q, t)$ che dipende dai parametri reali $\alpha, \omega, \beta, \gamma$, definita da

$$\begin{cases} P = e^{-\alpha t}[p \cos(\omega t) + q \sin(\omega t)], \\ Q = e^{\alpha t}[\beta p \sin(\omega t) + \gamma q \cos(\omega t)], \end{cases}$$

dove $p, q, P, Q, t \in \mathbb{R}$.

- i) Trovare tutti i valori di $\alpha, \omega, \beta, \gamma$ che rendono Ψ canonica univalente.
ii) Per i valori di ω, β, γ trovati in i) e per $\alpha = 1$ estendere Ψ ad una trasformazione canonica

$$\tilde{\Psi} : (p, e, q, t) \rightarrow (P, \mathcal{E}, Q, t),$$

dove P, Q sono dati da Ψ , ed $e, \mathcal{E}$ sono nuove variabili coniugate al tempo.

Esercizio 3

Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(I, \varphi) = h(I) + \epsilon f(I, \varphi),$$

con

$$\begin{aligned}h(I) &= I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + I_3\omega_3, \\f(I, \varphi) &= I_1I_2[\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \varphi_1 \sin(2\varphi_2 - \varphi_3)],\end{aligned}$$

dove

$$I = (I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3, \quad \omega_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \epsilon \ll 1.$$

- i) Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I, \varphi) \xrightarrow{\Psi_\epsilon} (\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ϵ . Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione.

- ii) Scrivere la forma normale risonante al primo ordine in ϵ nel caso $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = 3$ e trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per il sistema hamiltoniano definito da tale forma normale risonante troncata al primo ordine in ϵ .

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

19 Luglio 2019

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1

Si consideri la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + q\dot{q} + q^2 - q \sin t, \quad q, \dot{q} \in \mathbb{R}.$$

- i) Trovare la soluzione $t \mapsto \bar{\gamma}(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\bar{\gamma}(0) = 1, \quad \dot{\bar{\gamma}}(0) = 0.$$

- ii) Mostrare che, per ogni $T > 0$, la soluzione $\bar{\gamma}$ è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^T L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

nella classe di funzioni $C^1([0, T], \mathbb{R})$.

- iii) Fissato $T > 0$, calcolare la *slope function* $\mathcal{P}(t, q)$ del campo di estremali $\{\gamma_\alpha(t)\}_\alpha$ definito sulla striscia $\{(t, \alpha) : t \in (0, T), \alpha \in \mathbb{R}\}$ dalle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma_\alpha(0) = 1, \quad \dot{\gamma}_\alpha(0) = \alpha.$$

Esercizio 2

Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton:

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = (p_1 - kq_2)^2 + (p_2 + kq_1)^2,$$

con $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$ costante.

Si utilizzi il metodo di Hamilton-Jacobi per trovare il moto $q_1(t)$, $q_2(t)$ in corrispondenza delle condizioni iniziali $p_{10}, p_{20}, q_{10}, q_{20}$ al tempo 0.

Esercizio 3

Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(I, \varphi) = h(I) + \epsilon f(I, \varphi),$$

con

$$\begin{aligned} h(I) &= \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2, \\ f(I, \varphi) &= I_1 I_2 [\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \varphi_1 \sin(2\varphi_2)], \end{aligned}$$

dove

$$I = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2, \quad \omega_1, \omega_2 \neq 0, \quad \epsilon \ll 1.$$

- i) Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I, \varphi) \xrightarrow{\Psi} (\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ϵ . Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione.

- ii) Scrivere la forma normale risonante al primo ordine in ϵ nel caso $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1$ e trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per il sistema hamiltoniano definito da tale forma normale risonante troncata al primo ordine in ϵ .

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

15 Novembre 2019

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1

Si consideri la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q), \quad V(q) = -\frac{1}{1+q} - \frac{1}{1-q},$$

con $-1 < q < 1$, $\dot{q} \in \mathbb{R}$.

- i) Consideriamo la soluzione $t \mapsto \gamma(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma(0) = 0, \quad \dot{\gamma}(0) = 2.$$

Mostrare che $\gamma(t)$ è monotona crescente e trovare gli estremi t_1, t_2 del suo intervallo massimale di definizione.

- ii) Mostrare che per ogni tempo τ , con $0 < \tau < t_2$, la soluzione $\gamma(t)$ è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^\tau L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

nella classe di funzioni $C^1([0, \tau], \mathbb{R})$.

- iii) Calcolare la funzione eccesso di Weierstrass per L e mostrare che per ogni tempo τ , con $0 < \tau < t_2$, la soluzione $\gamma(t)$ è anche un minimo forte per il funzionale $\mathcal{A}$ nella classe $C^1([0, \tau], \mathbb{R})$.

Esercizio 2

Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = (1 + t^2)^2 \left(|\mathbf{p}|^2 - \frac{|\mathbf{q}|^2}{q_1^2 q_2^2} \right) + \frac{2t}{1 + t^2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q},$$

con $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $t \in \mathbb{R}$.

- i) Scrivere le componenti del campo vettoriale hamiltoniano

$$X_K = \Psi_* X_H,$$

dove

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \xrightarrow{\Psi} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t),$$

con $\mathbf{P} = (P_1, P_2)$, $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2)$, è la trasformazione canonica univalente dipendente dal tempo definita dalla funzione generatrice

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{P}}{1 + t^2}.$$

- ii) Calcolare un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla nuova hamiltoniana K .

Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica

18 Dicembre 2019

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1

Si considerino le due funzioni hamiltoniane

$$H_1 = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \left(1 + \frac{1}{q_1^2 q_2^2} \right), \quad H_2 = \frac{q_1^4 + q_2^4}{q_1^2 q_2^2} + (q_1 p_2 - q_2 p_1)^2,$$

dove $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}_*^2$ con $\mathbb{R}_* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- i) Scrivere le espressioni dei campi hamiltoniani X_{H_1} , X_{H_2} e mostrare che i flussi corrispondenti Φ_1^t , Φ_2^t commutano.
- ii) Trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per ciascuno dei sistemi hamiltoniani definiti da H_1 e H_2 .

Esercizio 2

Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2} I_1^2 - I_2 - \epsilon \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

dove $\mathbf{I} = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$ sono variabili azione-angolo.

- i) Usare il metodo di Lie per trovare una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) \xrightarrow{\mathcal{C}_\epsilon^{-1}} (\tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}})$$

tale che la hamiltoniana $\tilde{H}_\epsilon = H_\epsilon \circ \mathcal{C}_\epsilon$ non dipenda da $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ al primo ordine in ϵ . Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione fino al secondo ordine in ϵ incluso.

- ii) Mostrare che le variabili di azione I_1, I_2 compiono oscillazioni di ampiezza di ordine $\sqrt{\epsilon}$ attorno a dei valori costanti (quindi, in particolare, il sistema soddisfa il principio della media).

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

28 Gennaio 2020

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1

Si descrivano le traiettorie del moto geodetico di un punto materiale di massa m sulla superficie di equazioni

$$\begin{cases} x = r(z) \cos \varphi \\ y = r(z) \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad r(z) = \exp(-2z^6 + 3z^4 + 1),$$

dove $z \in \mathbb{R}$, $\varphi \in S^1$.

Esercizio 2

Trovare delle condizioni sui coefficienti reali a_1, a_2, b_1, b_2 , supposti > 0 , delle matrici diagonali costanti

$$A = \text{diag}(a_1, a_2), \quad B = \text{diag}(b_1, b_2),$$

per cui è possibile estendere le relazioni

$$q_1 = \mathbf{p} \cdot A\mathbf{Q}, \quad q_2 = \mathbf{p} \cdot B\mathbf{Q},$$

ad una trasformazione canonica univalente

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) = (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mapsto (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = (P_1, P_2, Q_1, Q_2)$$

definita localmente in ogni punto $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ tale che $p_1 p_2 \neq 0$.

Esercizio 3

Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = aI_1^2 + bI_2^2 + cI_3^2 + \epsilon \cos(\varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\varphi_3),$$

con $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3$, $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3$ e $0 < \epsilon \ll 1$.

- i) Trovare due integrali primi del sistema hamiltoniano tra loro indipendenti come combinazioni lineari di I_1, I_2, I_3 .
- ii) Determinare dei valori dei coefficienti a, b, c per cui esistono dei moti del sistema che non soddisfano il principio della media. Trovare esplicitamente questi particolari moti.
- iii) Assumendo $a = b = c = 1$, determinare una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I, \varphi) \xrightarrow{\Psi} (\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ϵ . Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

18 Febbraio 2020

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1

Si consideri il problema unidimensionale definito dall'equazione

$$\ddot{x} = -\frac{k}{x} + F, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (1)$$

con k, F costanti positive tali che $kF = 1$.

- i) Trovare una lagrangiana L che ha (1) come equazione di Eulero-Lagrange.
- ii) Tracciare le curve di livello dell'integrale di Jacobi di questo problema nel piano $(x, \dot{x})$.
- iii) Mostrare che la soluzione $\bar{\gamma}(t)$ dell'equazione (1) con condizioni iniziali $x(0) = \sqrt{\frac{k}{F}}, \dot{x}(0) = 2$ è illimitata ed è definita per tutti i tempi $t > 0$.
- iv) Mostrare che $\bar{\gamma}$ è un minimo debole del funzionale di azione lagrangiana $\mathcal{A}_L$ nell'insieme delle funzioni $C^1([0, t_1]; \mathbb{R})$ per ogni $t_1 > 0$.

Esercizio 2

Completare la relazione

$$P = \arctan q + p(1 + t^2)$$

ad una trasformazione canonica dipendente da t

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (p, q, t) \xrightarrow{\Psi} (P, Q, t).$$

Estendere poi tale trasformazione ad una trasformazione canonica nello spazio delle fasi esteso, con coordinate (p, e, q, t) .

Esercizio 3

Trovare un valore del vettore $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ in modo che il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2}(I_1^2 + I_2^2 - I_3^2) - \varepsilon \cos(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi})$$

con $\mathbf{I} = (I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3$, $0 < \varepsilon \ll 1$ non soddisfi il principio della media al primo ordine in ε , descrivendo esplicitamente una famiglia di moti che lo viola.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

9 Giugno 2020

Si consideri la hamiltoniana

$$H_\varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \varepsilon f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

dove

$$h(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}(|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2), \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 1$$

ed $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ è una funzione regolare.

- 1) Usando la teoria di Hamilton-Jacobi trovare una trasformazione canonica

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \xrightarrow{\Phi} (I, \varphi)$$

che porti alle variabili azione angolo del sistema di oscillatori armonici definito dalla hamiltoniana $h(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Scrivere inoltre l'espressione della funzione $h \circ \Phi^{-1}$.

- 2) Nel caso in cui $n = 2$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ ed

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = q_1 p_2 - q_2 p_1$$

trovare con il metodo di Lie una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I, \varphi) \xrightarrow{\Psi_\varepsilon} (\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$

che sposti la dipendenza dagli angoli ad un ordine superiore in ε nella hamiltoniana $(H_\varepsilon \circ \Phi^{-1}) \circ \Psi_\varepsilon^{-1}$.

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica

4 Settembre 2020

Si considerino le due funzioni

$$H_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}(|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2), \quad H_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p_1 q_2 - q_1 p_2,$$

con $\mathbf{p} = (p_1, p_2), \mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$.

- i) Si dimostri che i campi vettoriali hamiltoniani $\mathbf{X}_j = \mathbf{X}_{H_j}$, $j = 1, 2$ sono integrabili, trovando per ciascuno una coppia di integrali primi in involuzione e genericamente indipendenti su $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.
- ii) Si calcolino esplicitamente i flussi $\Phi_1^t(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $\Phi_2^t(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ dei campi hamiltoniani $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$.
- iii) Mostrare che i flussi Φ_1^t e Φ_2^t commutano.

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
16 Novembre 2020

i) Completare le relazioni

$$P_1 = p_1 q_1 t, \quad P_2 = p_2 q_2 t$$

ad una trasformazione canonica dipendente dal tempo

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \xrightarrow{\Psi} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t),$$

con $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= (p_1, p_2) \in (\mathbb{R}^+)^2, & \mathbf{q} &= (q_1, q_2) \in (\mathbb{R}^+)^2, \\ \mathbf{P} &= (P_1, P_2) \in (\mathbb{R})^2, & \mathbf{Q} &= (Q_1, Q_2) \in (\mathbb{R})^2, \end{aligned}$$

usando una funzione generatrice $S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$.

ii) Estendere tale trasformazione ad una trasformazione canonica nello spazio delle fasi esteso

$$(\mathbf{p}, e, \mathbf{q}, t) \xrightarrow{\tilde{\Psi}} (\mathbf{P}, \mathcal{E}, \mathbf{Q}, t),$$

dove $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ sono definiti da Ψ , ed $e, \mathcal{E}$ sono i momenti coniugati a t .

iii) Data la funzione hamiltoniana

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = t^2(p_1^2 q_1^2 + p_2^2 q_2^2) + \frac{1}{t}((1 + p_2 q_2) \log q_2 + p_1 q_1 \log q_1)$$

trovare un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla hamiltoniana K coniugata ad H tramite la trasformazione Ψ .

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
17 Dicembre 2020

Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = a(I_1^2 + I_2^2) + bI_1I_2 + \varepsilon \sin^2(\varphi_1 + 2\varphi_2),$$

con $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $(I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$ e $0 < \varepsilon \ll 1$.

- i) Determinare dei valori dei coefficienti a, b per cui esistono dei moti del sistema che non soddisfano il principio della media. Trovare esplicitamente questi particolari moti.
- ii) Assumendo $a = 1, b = 2$, usare il metodo di Lie per trovare una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I, \varphi) \xrightarrow{\Psi_\varepsilon} (\tilde{I}, \tilde{\varphi}),$$

tale che $\tilde{H}_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \Psi_\varepsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ε ; scrivere inoltre la forma normale non risonante fino al secondo ordine in ε incluso.

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
19 gennaio 2021

Si considerino le funzioni di Hamilton

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} [|\mathbf{p}|^2 |\mathbf{q}|^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2] + V(|\mathbf{q}|), \quad K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} (|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2),$$

dove $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ e $V : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^2 .

i) Calcolare la parentesi di Lie

$$[X_H, X_K]$$

dei campi vettoriali hamiltoniani associati ad H e K .

ii) Assumendo che

$$V(x) = \frac{1}{2} \log(1 + x^2)$$

e che $\mathbf{q} \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$, mostrare che il sistema hamiltoniano definito da

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = [X_H, X_K]$$

è integrabile con il metodo di Hamilton-Jacobi.

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
9 febbraio 2021

Si consideri la trasformazione di coordinate dipendente dal tempo

$$(p, q, t) \xrightarrow{\Psi} (P, Q, t)$$

con

$$p, q \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad P = S_t^{-1}p, \quad Q = S_t q, \quad S_t = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}.$$

- i) Dimostrare che Ψ è canonica.
- ii) Estendere Ψ ad una trasformazione canonica

$$(p, e, q, t) \xrightarrow{\tilde{\Psi}} (P, \mathcal{E}, Q, t)$$

definita sullo spazio delle fasi esteso, in cui P, Q sono date da Ψ , ed $e, \mathcal{E} \in \mathbb{R}$ sono nuove variabili, coniugate al tempo.

- iii) Scrivere nelle variabili $(P, \mathcal{E}, Q, t)$ definite da $\tilde{\Psi}$ il campo vettoriale

$$X = (q_1, -q_2, 0, p_1, -p_2, 1)^T,$$

dove $(p_1, p_2)^T = p, (q_1, q_2)^T = q$.

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
18 giugno 2021

Si consideri la trasformazione di coordinate dipendente dal tempo

$$(p, q, t) \xrightarrow{\Psi} (P, Q, t)$$

con

$$\begin{aligned} P &= \sin q + f(q, t), \\ Q &= q^2 + pq(1 + t), \end{aligned}$$

dove $f(q, t)$ è una funzione di classe C^2 in qualche dominio $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$ e $p \in \mathbb{R}$.

- i) Determinare la funzione $f(q, t)$ ed il dominio $\mathcal{D}$ in modo che la trasformazione Ψ sia canonica univalente.
- ii) Si trovi una funzione generatrice della Ψ .
- iii) Scrivere le componenti del campo vettoriale hamiltoniano

$$X_K = \Psi_* X_H,$$

dove

$$H(p, q, t) = \ln q \left(q^2 - \frac{1}{1+t} \right) - \frac{q^2}{2}.$$

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
23 Luglio 2021

Si consideri una trasformazione di coordinate dipendente dal tempo

$$(p, q, t) \xrightarrow{\Psi} (P, Q, t)$$

con

$$\begin{aligned} P &= \sin q + f(q, t), \\ Q &= q^2 + pq(1 + t), \end{aligned}$$

definita nel dominio

$$\mathcal{D} = \{(p, q, t) : p \in \mathbb{R}, q > 0, t > -1\},$$

dove $f(q, t)$ è una funzione di classe C^2 .

- i) Determinare una funzione $f(q, t)$ in modo che la trasformazione Ψ sia canonica univalente.
- ii) Trovare una funzione generatrice della trasformazione Ψ .
- iii) Scrivere le componenti del campo vettoriale hamiltoniano

$$X_K = \Psi_* X_H,$$

dove

$$H(p, q, t) = \log q \left(q^2 - \frac{1}{1+t} \right) - \frac{q^2}{2}.$$

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
21 Settembre 2021

Sia dato il sistema dinamico conservativo descritto dalla lagrangiana

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2} \left(\dot{q}_1^2 + \frac{\dot{q}_2^2}{1 + q_1^2} \right) - (1 + q_1^2)(1 + q_2^2).$$

con $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ e $(\dot{q}_1, \dot{q}_2) \in \mathbb{R}^2$.

- i) Trovare la hamiltoniana del sistema.
- ii) Scrivere l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione caratteristica W e dimostrare che le variabili q_1, q_2 sono separabili.
- iii) Trovare un integrale completo $W(q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2)$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, dell'equazione di Hamilton-Jacobi.

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
17 Novembre 2021

Esercizio 1

Si consideri la hamiltoniana

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \frac{t}{2} |\mathbf{p}|^2 + \frac{1}{2t} (|\mathbf{q}|^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q})$$

con $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$.

i) Completare le relazioni

$$Q_1 = \frac{q_1^2}{2t}, \quad Q_2 = \frac{q_2^2}{2t}$$

ad una trasformazione canonica dipendente dal tempo

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \xrightarrow{\Psi} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t),$$

con $\mathbf{P} = (P_1, P_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^2$, e scrivere la hamiltoniana K coniugata ad H tramite la trasformazione Ψ .

ii) Trovare un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla hamiltoniana K .

iii) Determinare due integrali primi indipendenti per il campo vettoriale X_H .

Esercizio 2

Si consideri la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q), \quad V(q) = q^2 \log q$$

con $q > 0$, $\dot{q} \in \mathbb{R}$.

i) Tracciare il ritratto di fase delle equazioni di Eulero-Lagrange per L .

ii) Mostrare che la soluzione $\bar{\gamma}(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange con condizioni iniziali

$$\bar{\gamma}(0) = e^{-1/2}, \quad \dot{\bar{\gamma}}(0) = (1/e - 1/3)^{1/2}$$

è una funzione periodica tale che

$$\bar{\gamma}(t) > 1/e, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

iii) Mostrare che esiste un valore τ_* del tempo t per cui $\bar{\gamma}(t)$ non può essere un minimo debole del funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}_L(\gamma) = \int_0^{\tau_*} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt.$$

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
17 dicembre 2021

Esercizio 1

Si considerino le due funzioni hamiltoniane

$$H_1 = p_1 q_2 - p_2 q_1, \quad H_2 = \frac{1}{2} |\mathbf{p}|^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q},$$

dove $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$.

- i) Calcolare i flussi integrali Φ_1^t, Φ_2^t delle equazioni di Hamilton associate ad H_1 e H_2 .
- ii) Mostrare che i flussi Φ_1^t, Φ_2^t commutano.
- iii) Trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per ciascuno dei sistemi hamiltoniani definiti da H_1 e H_2 .

Esercizio 2

Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(I, \varphi) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + 2\varepsilon [\sin 2\varphi_1 \cos \varphi_2 + I_1^2 \cos^2(2\varphi_1 - \varphi_2)],$$

dove $I = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$ sono variabili azione-angolo e $(\omega_1, \omega_2) \neq (0, 0)$.

Usare, quando è possibile, il metodo di Lie per trovare una la funzione generatrice χ di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I, \varphi) \xrightarrow{\mathcal{C}_\varepsilon^{-1}} (\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$

tale che la hamiltoniana $\tilde{H}_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \mathcal{C}_\varepsilon$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ε . Scrivere inoltre al primo ordine in ε la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione.

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
27 gennaio 2022

Esercizio 1

Si consideri la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 + q\dot{q} - q \sin t, \quad q, \dot{q} \in \mathbb{R}.$$

- i) Trovare la soluzione $t \mapsto \bar{\gamma}(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\bar{\gamma}(0) = 1, \quad \dot{\bar{\gamma}}(0) = 0.$$

- ii) Mostrare che, per ogni $T > 0$, la soluzione $\bar{\gamma}$ è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^T L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

nella classe di funzioni $C^1([0, T], \mathbb{R})$.

- iii) Fissato $T > 0$, calcolare la *slope function* $\mathcal{P}(t, q)$ del campo di estremali $\{\gamma_\alpha(t)\}_\alpha$ definito sulla striscia $\{(t, \alpha) : t \in (0, T), \alpha \in \mathbb{R}\}$ dalle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma_\alpha(0) = 1, \quad \dot{\gamma}_\alpha(0) = \alpha.$$

Esercizio 2

Si consideri un punto materiale P di massa m che si muove nello spazio soggetto al campo di forze derivabile dall'energia potenziale

$$V(x, y, z) = \frac{k}{x^2 + y^2} - Fz,$$

con $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ coordinate di P rispetto ad un sistema di riferimento fissato, e $k > 0$, $F > 0$ parametri reali.

- i) Si dimostri che le coordinate cilindriche $(r, z, \varphi) \in (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})$ sono separabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi di questo sistema meccanico.
- ii) Trovare un integrale completo di tale equazione.

Esercizio 3

Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(I, \varphi) = h(I) + \epsilon f(I, \varphi),$$

con

$$h(I) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3, \\ f(I, \varphi) = 2I_1[I_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cos \varphi_3 + I_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3)],$$

dove

$$I = (I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3, \quad \omega_1, \omega_2, \omega_3 \neq 0, \quad \epsilon \ll 1.$$

- i) Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I, \varphi) \xrightarrow{\Psi} (\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ϵ . Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione.

- ii) Scrivere la forma normale risonante al primo ordine in ϵ nel caso $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 1$ e trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per il sistema hamiltoniano definito da tale forma normale risonante troncata al primo ordine in ϵ .

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
18 febbraio 2022

Esercizio 1

Si consideri la lagrangiana

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - y.$$

- i) Trovare la soluzione $[0, 1] \ni t \mapsto \bar{\gamma}(t) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni al bordo

$$\bar{\gamma}(0) = (0, 0), \quad \bar{\gamma}(1) = (1, 0) \quad (1)$$

e calcolarne il valore dell'energia $\bar{e}$.

- ii) Scrivere l'espressione del funzionale di Maupertuis, definito sulla classe $\Gamma_{\bar{e}}$ delle curve variate asincrone, il cui grafico si può scrivere nella forma $(x, y(x))$, con gli stessi estremi (1) e la stessa energia $\bar{e}$ di $\bar{\gamma}$. Scrivere inoltre il funzionale nella forma

$$\mathcal{J}_L(\gamma) = \int_0^1 f(y(x); \bar{e}) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

per una qualche funzione f .

- iii) Trovare l'espressione dell'arco rettilineo $t \mapsto \tilde{\gamma}(t) = (\tilde{x}(t), 0) \in \Gamma_{\bar{e}}$ che congiunge il punto $(0, 0)$ al punto $(1, 0)$ e che ha energia $\bar{e}$.

- iv) Mostrare che si ha

$$\mathcal{J}_L(\bar{\gamma}) < \mathcal{J}_L(\tilde{\gamma}).$$

Esercizio 2

Si consideri la trasformazione di coordinate $(p, q, t) \mapsto (P, Q, t)$ definita da

$$P = 2e^t \sqrt{pq} \log p, \\ Q = e^{-t} \sqrt{pq},$$

sull'insieme $\{(p, q) \in \mathbb{R}^2 : p, q > 0\}$.

- i) Dimostrare che la trasformazione Ψ è completamente canonica.
ii) Estendere Ψ ad una trasformazione canonica nello spazio delle fasi esteso.
iii) Determinare come si trasforma la hamiltoniana $H(p, q) = pq$ tramite Ψ .

Esercizio 3

Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(I, \varphi) = \frac{1}{2}(aI_1^2 + bI_2^2) + \varepsilon \cos(3\varphi_1 - 2\varphi_2), \quad \varepsilon \ll 1,$$

con $(I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$, $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$.

- i) Determinare la condizione che a e b devono soddisfare affinché esistano nel sistema dei moti che non soddisfano il principio della media. Scrivere inoltre questi particolari moti.
ii) Posto $a = 1$, $b = -2$, mostrare che I_1, I_2 compiono oscillazioni di ampiezza di ordine $\sqrt{\varepsilon}$ attorno a dei valori costanti.

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
20 Giugno 2022

Esercizio 1

Sia

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \xrightarrow{\Psi} (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$$

una trasformazione di coordinate in $\mathbb{R}^{2n}$, con $n \geq 1$, dove

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n), \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n), \quad \mathbf{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n), \quad \mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$$

sono vettori di $\mathbb{R}^n$.

i) Posto

$$\tilde{\mathbf{x}} = (p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_n, q_n), \quad \tilde{\mathbf{y}} = (P_1, Q_1, P_2, Q_2, \dots, P_n, Q_n)$$

e

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} J_2 & O_2 & \dots & O_2 \\ O_2 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O_2 \\ O_2 & \dots & O_2 & J_2 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

mostrare che la trasformazione Ψ è simplettica con valenza 1 se e solo se vale la relazione

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{y}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \tilde{J} \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{y}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right]^T = \tilde{J}.$$

Suggerimento: usare la matrice ortogonale

$$S = [\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_{n+1} | \mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_{n+2} | \dots | \mathbf{e}_n | \mathbf{e}_{2n}]^T$$

dove gli $\mathbf{e}_j$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^{2n}$.

ii) Si consideri per semplicità il caso $n = 2$ e si definiscano le matrici

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial p_j} & \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \\ \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} & \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \end{bmatrix} \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Mostrare che valgono le relazioni

$$M_{11} + M_{21} = M_{12} + M_{22} = 1.$$

Esercizio 2

Si consideri la funzione hamiltoniana

$$H_\varepsilon = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + \omega^2 q_2^2) + \varepsilon q_1^2 q_2$$

con $\omega \neq 0$.

i) Mostrare che la dinamica associata alla hamiltoniana H_0 ottenuta da H ponendo $\varepsilon = 0$ è integrabile.

ii) Introdurre variabili azione-angolo per H_0 attraverso la trasformazione

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \xrightarrow{\Phi} (I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2)$$

e scrivere la nuova hamiltoniana

$$K_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \Phi^{-1}.$$

iii) Usare il metodo di Lie per trovare una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) \xrightarrow{\mathcal{C}_\varepsilon^{-1}} (\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$$

tale che la hamiltoniana $\tilde{H}_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \mathcal{C}_\varepsilon$ non dipenda da $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ al primo ordine in ε . Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione fino al secondo ordine in ε incluso.

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
13 Settembre 2022

Esercizio 1

Sia

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \xrightarrow{\Psi} (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$$

una trasformazione di coordinate in $\mathbb{R}^{2n}$, con $n \geq 1$, dove

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n), \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n), \quad \mathbf{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n), \quad \mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$$

sono vettori di $\mathbb{R}^n$.

i) Posto

$$\tilde{\mathbf{x}} = (p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_n, q_n), \quad \tilde{\mathbf{y}} = (P_1, Q_1, P_2, Q_2, \dots, P_n, Q_n)$$

e

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} J_2 & O_2 & \dots & O_2 \\ O_2 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O_2 \\ O_2 & \dots & O_2 & J_2 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

mostrare che la trasformazione Ψ è simplettica con valenza 1 se e solo se vale la relazione

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{y}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \tilde{J} \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{y}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right]^T = \tilde{J}.$$

Suggerimento: usare la matrice ortogonale

$$S = [\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_{n+1} | \mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_{n+2} | \dots | \mathbf{e}_n | \mathbf{e}_{2n}]^T$$

dove gli $\mathbf{e}_j$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^{2n}$.

- Si consideri per semplicità il caso $n = 2$ e si definiscano le matrici

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial p_j} & \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \\ \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} & \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \end{bmatrix} \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Mostrare che valgono le relazioni

$$M_{11} + M_{21} = M_{12} + M_{22} = 1.$$

Esercizio 2

Si consideri la funzione hamiltoniana

$$H_\varepsilon = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + \omega^2 q_2^2) + \varepsilon q_1^2 q_2$$

con $\omega \neq 0$.

- i) Mostrare che la dinamica associata alla hamiltoniana H_0 ottenuta da H ponendo $\varepsilon = 0$ è integrabile.

ii) Introdurre variabili azione-angolo per H_0 attraverso la trasformazione

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \xrightarrow{\Phi} (I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2)$$

e scrivere la nuova hamiltoniana

$$K_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \Phi^{-1}.$$

iii) Usare il metodo di Lie per trovare una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) \xrightarrow{\mathcal{C}_\varepsilon^{-1}} (\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$$

tale che la hamiltoniana $\tilde{H}_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \mathcal{C}_\varepsilon$ non dipenda da $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ al primo ordine in ε . Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione fino al secondo ordine in ε incluso.

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
17 Novembre 2022

Esercizio 1

Si consideri l'equazione di Newton

$$m\ddot{X} = kX, \quad k > 0,$$

dove $X = (x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$ sono le coordinate di un punto materiale di massa m che si muove su un piano.

- i) Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange nelle coordinate polari $(q, \theta) \in (\mathbb{R}^+, S^1)$ definite sul piano del moto.

Assumendo che $m = 1$,

- ii) determinare la componente $\bar{q}(t)$ della soluzione $\bar{\gamma}(t) = (\bar{q}(t), \bar{\theta}(t))$ di tali equazioni con condizioni iniziali

$$q(0) = 1, \quad \dot{q}(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = \sqrt{\frac{k}{3}}.$$

- iii) mostrare che per ogni tempo $\tau > 0$, $\bar{q}(t)$ è un minimo debole stretto del funzionale

$$\mathcal{A}_{\bar{L}} = \int_0^\tau \tilde{L}(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t)) dt,$$

nella classe di funzioni $C^1([0, \tau], \mathbb{R})$, dove $\tilde{L}(q, \dot{q})$ è la lagrangiana ridotta che si ottiene “eliminando” la coordinata θ nelle equazioni.

Esercizio 2

- i) Data una funzione di quattro variabili scalari $S(q_1, q_2, P_1, Q_2)$ tale che

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial(q_1, q_2) \partial(P_1, Q_2)} \neq 0$$

su tutto il dominio considerato, mostrare che le relazioni

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2}, \quad Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1}, \quad P_2 = -\frac{\partial S}{\partial Q_2}$$

definiscono localmente una trasformazione canonica univalente

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \xrightarrow{\Psi} (P_1, P_2, Q_1, Q_2).$$

- ii) Completare le relazioni

$$P_1 = q_1 p_2 - q_2 p_1, \quad Q_2 = q_1 p_1 + q_2 p_2$$

ad una trasformazione canonica univalente

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \xrightarrow{\Psi} (P_1, P_2, Q_1, Q_2),$$

definita su $p_1, p_2, q_1, q_2 > 0$, utilizzando una funzione generatrice S dello stesso tipo del punto precedente.¹

¹*Suggerimento:* si ricordi la relazione $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, valida per ogni $x > 0$.

iii) (*facoltativo*) Trovare la soluzione delle equazioni di Hamilton con hamiltoniana

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{4} \log^2(q_1^2 + q_2^2) + q_1(p_1 + p_2) - q_2(p_1 - p_2)$$

e con condizioni iniziali

$$p_1(0) = p_2(0) = q_1(0) = q_2(0) = 1.$$

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
21 Dicembre 2022

Esercizio 1

Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2 - p_1 p_2 - q_1 q_2,$$

con $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$.

- i) Determinare una trasformazione canonica

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \xrightarrow{\Psi} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}),$$

tale che le nuove coordinate $\mathbf{Q}$ siano separabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione di Hamilton $K = H \circ \Psi^{-1}$.

- ii) Trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per il sistema hamiltoniano definito da H .
- iii) Scrivere un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione K .

Esercizio 2

Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(I, \varphi) = h(I) + \epsilon f(I, \varphi),$$

con

$$h(I) = I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2 + I_3 \omega_3,$$
$$f(I, \varphi) = I_1 I_2 [\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \varphi_1 \sin(2\varphi_2 - \varphi_3)],$$

dove

$$I = (I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3, \quad \omega_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \epsilon \ll 1.$$

- i) Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I, \varphi) \xrightarrow{\Psi_\epsilon} (\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ϵ . Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione.

- ii) Scrivere la forma normale risonante al primo ordine in ϵ nel caso $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = 3$ e trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per il sistema hamiltoniano definito da tale forma normale risonante troncata al primo ordine in ϵ .

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

11 Gennaio 2023

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1

Si descrivano le traiettorie del moto geodetico di un punto materiale sulla superficie di equazioni

$$\begin{cases} x = r(z) \cos \varphi \\ y = r(z) \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad r(z) = 2 + \frac{\cos z}{1 + z^2},$$

dove $z \in \mathbb{R}, \varphi \in S^1$, disegnando anche il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto con coordinate $z, \dot{z}$ nel caso in cui la componente del momento angolare M_O lungo l'asse z sia non nulla.

Esercizio 2

Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2, t) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{t^2} + \frac{t^2(q_1^2 + q_2^2)}{2} - \frac{p_1 q_1 + p_2 q_2}{t} - p_2 q_1 - p_1 q_2,$$

con $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}^+$.

i) Data la trasformazione canonica dipendente dal tempo

$$(p_1, p_2, q_1, q_2, t) \xrightarrow{\tilde{\Psi}} (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, t)$$

con

$$\tilde{p}_1 = \frac{p_1}{t}, \quad \tilde{p}_2 = \frac{p_2}{t}, \quad \tilde{q}_1 = t q_1, \quad \tilde{q}_2 = t q_2,$$

scrivere il campo vettoriale $X_{\tilde{H}} = \Psi_* X_H$ associato alla nuova hamiltoniana $\tilde{H}$.

ii) Mostrare che la funzione

$$F(\tilde{q}_1, \tilde{p}_2, Q_2, P_1) = Q_2(\tilde{q}_1 - \tilde{p}_2) + \tilde{p}_2 P_1$$

genera una trasformazione canonica univalente

$$(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2) \xrightarrow{\Psi} (P_1, P_2, Q_1, Q_2)$$

sul dominio della funzione $\tilde{H}$ tale che le nuove coordinate Q_1, Q_2 siano separabili per la funzione di Hamilton $K = \tilde{H} \circ \Psi^{-1}$.

iii) Trovare la soluzione per $t \geq 1$ delle equazioni di Hamilton associate ad H con condizioni iniziali $p_1(1) = p_2(1) = q_1(1) = q_2(1) = 1$.

Esercizio 3

Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(I, \varphi) = h(I) + \epsilon f(I, \varphi),$$

con

$$h(I) = \frac{1}{2}(aI_1^2 + bI_2^2 + cI_3^2),$$
$$f(I, \varphi) = \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) + \sin(\varphi_1 - 2\varphi_2),$$

dove

$$I = (I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \epsilon \ll 1.$$

- i) Determinare dei valori dei coefficienti a, b, c per cui esistono dei moti del sistema che non soddisfano il principio della media. In particolare, discutere l'evoluzione temporale delle azioni.
- ii) Assumendo $a = b = c = 1$, usare il metodo di Lie per trovare una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \xrightarrow{\mathcal{C}_\epsilon^{-1}} (\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3)$$

tale che la hamiltoniana $\tilde{H}_\epsilon = H_\epsilon \circ \mathcal{C}_\epsilon$ non dipenda da $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3$ al primo ordine in ϵ . Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione fino al primo ordine in ϵ .

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

3 Febbraio 2023

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1

Data la funzione di Lagrange

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q), \quad V(q) = \log q, \quad q \in \mathbb{R}^+, \quad \dot{q} \in \mathbb{R},$$

si consideri la soluzione $\gamma(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per $L(q, \dot{q})$ con condizioni iniziali

$$q(0) = 1, \quad \dot{q}(0) = 0.$$

Mostrare che la soluzione $\gamma(t)$ per ogni tempo $0 < \tau < t_2$, con t_2 estremo superiore del suo intervallo massimale di definizione, è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^\tau L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

nella classe di funzioni $C^1([0, \tau], \mathbb{R})$.

Esercizio 2

Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{q_1^2 + q_2^2},$$

con $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ e $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

i) Determinare una trasformazione canonica

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \xrightarrow{\Psi} (P_1, P_2, Q_1, Q_2),$$

tale che le nuove coordinate Q_1, Q_2 siano separabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione di Hamilton $K = H \circ \Psi^{-1}$.

ii) Scrivere un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione K .

Esercizio 3

Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) = h(\mathbf{I}) + \epsilon f(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}),$$

dove

$$\begin{aligned} h(\mathbf{I}) &= I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2 + I_3 \omega_3, \\ f(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) &= 2I_1 [I_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cos \varphi_3 + I_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3)], \end{aligned}$$

e

$$\mathbf{I} = (I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3, \quad \omega_1, \omega_2, \omega_3 \neq 0, \quad 0 < \epsilon \ll 1.$$

- i) Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(\mathbf{I}, \varphi) \xrightarrow{\Psi} (\tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\varphi})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ϵ . Scrivere inoltre la forma normale non risonante.

- ii) Scrivere la forma normale risonante al primo ordine in ϵ nel caso

$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (2, 1, 1)$$

e determinare quali combinazioni lineari delle azioni $\tilde{\mathbf{I}}$ sono integrali primi per il campo vettoriale definito dalla forma risonante trascurando i termini di ordine ϵ^2 .

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica

17 aprile 2023

Esercizio 1

Si consideri la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + q\dot{q} + q^2 - q \sin t, \quad q, \dot{q} \in \mathbb{R}.$$

- i) Trovare la soluzione $t \mapsto \bar{\gamma}(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\bar{\gamma}(0) = 1, \quad \dot{\bar{\gamma}}(0) = 0.$$

- ii) Mostrare che, per ogni $T > 0$, la soluzione $\bar{\gamma}$ è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^T L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

nella classe di funzioni $C^1([0, T], \mathbb{R})$.

- iii) Fissato $T > 0$, calcolare la *slope function* $\mathcal{P}(t, q)$ del campo di estremali $\{\gamma_\alpha(t)\}_\alpha$ definito sulla striscia $\{(t, \alpha) : t \in (0, T), \alpha \in \mathbb{R}\}$ dalle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma_\alpha(0) = 1, \quad \dot{\gamma}_\alpha(0) = \alpha.$$

Esercizio 2

Si consideri una trasformazione di coordinate dipendente dal tempo

$$(p, q, t) \xrightarrow{\Psi} (P, Q, t)$$

con

$$P = \sin q + f(q, t),$$

$$Q = q^2 + pq(1 + t),$$

definita nel dominio

$$\mathcal{D} = \{(p, q, t) : p \in \mathbb{R}, q > 0, t > -1\},$$

dove $f(q, t)$ è una funzione di classe C^2 .

- i) Determinare una funzione $f(q, t)$ in modo che la trasformazione Ψ sia canonica univalente.
- ii) Trovare una funzione generatrice della trasformazione Ψ .
- iii) Scrivere le componenti del campo vettoriale hamiltoniano

$$X_K = \Psi_* X_H,$$

dove

$$H(p, q, t) = \frac{1}{1+t} \left[\frac{q^2}{2(1+t)} + pq \right].$$

Esercizio 3

Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(I, \varphi) = h(I) + \epsilon f(I, \varphi),$$

con

$$\begin{aligned} h(I) &= \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2, \\ f(I, \varphi) &= I_1 I_2 [\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \varphi_1 \sin(2\varphi_2)], \end{aligned}$$

dove

$$I = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2, \quad \omega_1, \omega_2 \neq 0, \quad \epsilon \ll 1.$$

- i) Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I, \varphi) \xrightarrow{\Psi_\epsilon} (\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ϵ . Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione.

- ii) Scrivere la forma normale risonante al primo ordine in ϵ nel caso $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1$ e trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per il sistema hamiltoniano definito da tale forma normale risonante troncata al primo ordine in ϵ .

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

23 Giugno 2023

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1

Si consideri il moto di un punto materiale P in $\mathbb{R}^3$ di massa unitaria soggetto ad una forza centrale con energia potenziale

$$V(\rho) = -\frac{k}{\rho}, \quad k > 0,$$

con ρ distanza di P dal centro delle forze O .

- i) Scrivere la lagrangiana del sistema nelle coordinate polari $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times S^1$ introdotte nel piano del moto (assumendo che il momento angolare di P rispetto ad O sia diverso da zero).
- ii) Trovare la soluzione $\bar{\gamma}(t) = (\bar{\rho}(t), \bar{\theta}(t))$ delle equazioni di Eulero-Lagrange del punto i) con le condizioni iniziali

$$\rho(0) = 1, \quad \dot{\rho}(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = \sqrt{k}.$$

- iii) Usando la lagrangiana ridotta $\tilde{L}(\rho, \dot{\rho})$, ottenuta col metodo di Routh, calcolare l'estremo superiore dei tempi $t_1 > 0$ tale che la componente $\bar{\rho}(t)$ della soluzione $\bar{\gamma}(t)$ del punto ii) sia un minimo debole stretto dell'azione lagrangiana $\mathcal{A}_{\tilde{L}}$ nell'insieme delle funzioni $C^1([0, t_1], \mathbb{R})$.

Esercizio 2

Si considerino i due sistemi hamiltoniani con funzioni di Hamilton

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + |\mathbf{p}|^2, \quad K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + |\mathbf{q}|^2,$$

con $\mathbf{q} \in (\mathbb{R}^+)^n$ e $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$.

- i) Trovare un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla hamiltoniana K .
- ii) Indicando con X_H ed X_K i campi vettoriali hamiltoniani associati ad H e K , rispettivamente, determinare il campo vettoriale

$$X = [X_K, X_H]$$

e dimostrare che è integrabile trovando n integrali primi in involuzione e genericamente indipendenti nel dominio in cui sono definite le variabili $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$.

- iii) Determinare il flusso $\Phi^t(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ del campo vettoriale X .

Esercizio 3

Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2^2) + \epsilon[\cos(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}) + \sin(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi})],$$

dove $\epsilon \ll 1$ e

$$\mathbf{I} = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2, \quad \mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

- i) Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) \xrightarrow{\Psi_\epsilon} (\tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}),$$

con $\tilde{\mathbf{I}} = (\tilde{I}_1, \tilde{I}_2)$, $\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$, tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ al primo ordine in ϵ .

- ii) Trovare dei valori del vettore $\mathbf{k}$ in modo tale che non sia soddisfatto il principio della media, scrivendo una famiglia di moti che lo viola.

Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica 14 Novembre 2023

Esercizio 1

Si consideri l'equazione di Newton

$$\ddot{x} = 0, \\ \ddot{z} = -\frac{1}{2},$$

di un punto materiale di massa unitaria che si muove sul piano (x, z) soggetto ad una forza di intensità costante.

- i) Determinare la soluzione di tale equazione con condizioni iniziali

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0.$$

- ii) Mostrare che la funzione $\bar{u}(x) = z(x)$ ottenuta dalla soluzione del punto precedente, è un estremo del funzionale

$$\mathcal{A}_L = \int_0^{x_1} L(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)) dx,$$

definito dalla lagrangiana

$$L(u, u') = \sqrt{1-u} \sqrt{1+u'^2}$$

con $u' = \frac{du}{dx}$.

- iii) Mostrare che $\bar{u}(x)$ è un minimo debole stretto del funzionale $\mathcal{A}_L$ per ogni $x_1 > 0$ nella classe di funzioni $C^1([0, x_1], \mathbb{R})$. *Suggerimento:* cercare la soluzione dell'equazione di Jacobi in una forma polinomiale.

Esercizio 2

- i) Si completi la relazione

$$Q = e^q$$

ad una trasformazione canonica univalente

$$\mathbb{R}^2 \ni (p, q) \mapsto (P, Q)$$

tramite il metodo della funzione generatrice.

- ii) Si consideri il sistema hamiltoniano ad un grado di libertà con funzione di Hamilton

$$H(p, q) = \frac{1}{2} p^2 e^{-2q} + p$$

e se ne calcoli la soluzione con condizioni iniziali al tempo $t = 0$

$$p_0 = 1, \quad q_0 = 0$$

considerando il sistema hamiltoniano ottenuto tramite la trasformazione canonica Ψ .

- iii) Fissato un tempo $\tau > 0$ si verifichi che si ha

$$K(\Phi^\tau(P, Q)) = K(P, Q),$$

dove $K = H \circ \Psi^{-1}$ e $\Phi^t(P, Q)$ è il flusso integrale del campo vettoriale hamiltoniano X_K .

Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica

20 Dicembre 2023

Esercizio 1

Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p_1^2 - p_2^2 + \frac{1}{q_1^2 - q_2^2},$$

con $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ e $q_1 > q_2$.

- i) Determinare una trasformazione canonica¹

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \xrightarrow{\Psi} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}),$$

tale che le nuove coordinate $\mathbf{Q}$ siano separabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione di Hamilton $K = H \circ \Psi^{-1}$.

- ii) Scrivere un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione K .

Esercizio 2

Si consideri la funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2}(I_1 - I_2)^2 + \varepsilon [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

con $\mathbf{I} = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$.

- i) Mostrare che il sistema hamiltoniano associato ad H_ε è integrabile scrivendo due integrali primi indipendenti e in involuzione;
- ii) mostrare che il sistema hamiltoniano associato ad H_ε non soddisfa il principio della media al primo ordine in ε ;
- iii) tramite il metodo di Lie, scrivere la forma normale risonante $\tilde{H}_\varepsilon$ di H_ε relativa alla risonanza singola definita da $k_* = (1, 1)$;
- iv) trovare la soluzione generale del sistema hamiltoniano associato ad $\tilde{H}_\varepsilon$ cancellando i termini $O(\varepsilon^2)$.

¹È utile ricordare la relazione $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

16 Gennaio 2024

Esercizio 1

Si considerino le funzioni

$$\zeta_1(t) = e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),$$

$$\zeta_2(t) = e^{-t/2} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right),$$

con $A, B \in \mathbb{R}, A \neq 0$.

Usando il teorema di oscillazione di Sturm, mostrare che tra due zeri consecutivi di ζ_1 esiste un unico zero di ζ_2 , e viceversa.

Esercizio 2

Si consideri la trasformazione di coordinate

$$(p, q) \xrightarrow{\Psi} (P, Q)$$

con

$$P = \frac{q^2 p}{1 - qp}, \quad Q = \frac{(1 - qp)^2}{q^2 p},$$

e $(p, q) \in \mathbb{R}^2, pq \neq 0, 1$.

i) Verificare che la trasformazione è canonica univalente.

ii) Dopo aver mostrato che

$$q^2 p = Q P^2,$$

utilizzare questo risultato per determinare la trasformazione inversa della trasformazione data.

iii) Trovare una funzione generatrice $S(q, P)$.

Esercizio 3

Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) + \varepsilon q^4,$$

con $(p, q) \in \mathbb{R}^2, \omega > 0, \varepsilon \ll 1$.

i) Trovare una trasformazione canonica

$$(p, q) \xrightarrow{\Psi_\varepsilon} (I, \varphi)$$

con $I \in \mathbb{R}, \varphi \in S^1$ tale che la hamiltoniana $K_\varepsilon(I, \varphi) = H_\varepsilon \circ \Psi_\varepsilon^{-1}(I, \varphi)$ assuma la forma

$$K_\varepsilon(I, \varphi) = h(I) + \varepsilon f(I, \varphi).$$

ii) Determinare una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I, \varphi) \xrightarrow{\tilde{\Psi}_\varepsilon} (\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$

tale che la hamiltoniana $\tilde{K}_\varepsilon(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) = K_\varepsilon \circ \tilde{\Psi}_\varepsilon^{-1}(\tilde{I}, \tilde{\varphi})$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ε . Scrivere inoltre la forma normale non risonante.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

9 Febbraio 2024

Esercizio 1

- i) Mostrare che la funzione $y(x) = \cosh x$ è un estremo del funzionale

$$\mathcal{A}_L = \int_0^{x_1} L(y(x), y'(x)) dx,$$

definito dalla lagrangiana

$$L(y, y') = y \sqrt{1 + y'^2}$$

con $y' = \frac{dy}{dx}$.

- ii) Mostrare che $y(x)$ è un minimo debole stretto del funzionale $\mathcal{A}_L$ per ogni $x_1 > 0$ nella classe di funzioni $C^1([0, x_1], \mathbb{R})$.

Esercizio 2

Si completino le relazioni

$$P_1 = p_1 - p_2 - q_1 - q_2$$

$$Q_1 = p_1 + p_2 + q_1 - q_2$$

ad una trasformazione canonica lineare

$$\mathbb{R}^4 \ni (p_1, p_2, q_1, q_2) \xrightarrow{\Psi} (P_1, P_2, Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^4.$$

Esercizio 3

Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{p_1^2}{q_1^2} + \frac{p_2^2}{q_2^2} \right) - \cos(q_1^2 - q_2^2),$$

con $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ e $(q_1, q_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$.

- i) Si mostri che la trasformazione canonica

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \xrightarrow{\Psi} (P_1, P_2, Q_1, Q_2),$$

ottenuta completando la trasformazione puntuale

$$Q_1 = \frac{1}{2}(q_1^2 - q_2^2),$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2),$$

rende separabili le nuove coordinate Q_1, Q_2 nell'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione di Hamilton $K = H \circ \Psi^{-1}$.

- ii) Trovare la soluzione per $t \geq 0$ delle equazioni di Hamilton associate ad H con condizioni iniziali $p_1(0) = p_2(0) = q_1(0) = q_2(0) = 1$.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

14 Giugno 2024

Esercizio 1

Si descrivano le traiettorie del moto geodetico di un punto materiale di massa unitaria sulla superficie di equazioni

$$\begin{cases} x = r(z) \cos \varphi \\ y = r(z) \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad r(z) = \begin{cases} 1 + \frac{\log(1+z^4)}{z^2} & \text{se } z \neq 0, \\ 1 & \text{se } z = 0, \end{cases}$$

dove $z \in \mathbb{R}, \varphi \in S^1$, disegnando anche il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto con coordinate $z, \dot{z}$ nel caso in cui la componente del momento angolare lungo l'asse z sia non nulla.

Esercizio 2

i) Si consideri la relazione

$$\mathbf{P} = A\mathbf{p} + A^t\mathbf{q}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che coinvolge i vettori $\mathbf{P}, \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$. Si può estendere tale relazione ad una trasformazione canonica lineare $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mapsto (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ di $\mathbb{R}^{2n}$?

ii) Data la relazione

$$\mathbf{P} = A\mathbf{p} + B\mathbf{q},$$

con A, B matrici reali invertibili di ordine n , quale proprietà devono soddisfare A e B affinché tale relazione si possa estendere ad una trasformazione canonica lineare $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mapsto (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ di $\mathbb{R}^{2n}$?

iii) Siano A, B, C matrici reali invertibili di ordine n . Assumiamo che A e CB^t siano simmetriche e che $(C - B)A = I$. Si trovino le soluzioni del sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot A(B\mathbf{p} + C\mathbf{q})$$

con condizioni iniziali $\mathbf{p}(0) = \mathbf{e}_1, \mathbf{q}(0) = \mathbf{0}$.

Esercizio 3

Si consideri la funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega(I_1 + I_2) + \varepsilon[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos \varphi_2]$$

con $(I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2, (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$ e $\omega \in \mathbb{R}, \omega \neq 0$.

- i) Mostrare che il sistema hamiltoniano associato ad H_ε è integrabile scrivendo due integrali primi indipendenti e in involuzione.
- ii) Trovare le soluzioni del sistema hamiltoniano associato ad H_ε e dire se tale sistema soddisfa il principio della media.

iii) Si consideri adesso la funzione di Hamilton

$$K_\varepsilon = H_\varepsilon + \varepsilon I_2 \cos \varphi_2.$$

Scrivere la forma normale risonante di K_ε relativa al multi-indice risonante $k^* = (1, -1)$, al primo ordine in ε .

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
Laurea Magistrale in Matematica
5 Luglio 2024

Esercizio 1

Si consideri la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q), \quad V(q) = -\frac{1}{q} - q,$$

con $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\dot{q} \in \mathbb{R}$.

- i) Scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange relativa a L e tracciare il suo ritratto di fase.
- ii) Si consideri la soluzione $t \mapsto \gamma_1(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma_1(0) = 1, \quad \dot{\gamma}_1(0) = 2.$$

Mostrare che l'intervallo massimale destro di γ_1 è $[0, +\infty)$.

- iii) Mostrare che per ogni tempo τ , con $0 < \tau < +\infty$, la soluzione $\gamma_1(t)$ è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}_L(\gamma) = \int_0^\tau L(\gamma(\tau), \dot{\gamma}(\tau)) dt \tag{1}$$

nella classe di funzioni $C^1([0, \tau], \mathbb{R})$.

- iv) Si consideri la soluzione $t \mapsto \gamma_2(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma_2(0) = -2, \quad \dot{\gamma}_2(0) = 0.$$

Mostrare che γ_2 è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è periodica.

- v) Mostrare che esiste un tempo $\tau > 0$ tale che la soluzione $\gamma_2(t)$ non è un minimo debole per il funzionale definito in (1) nella classe di funzioni $C^1([0, \tau], \mathbb{R})$.

Esercizio 2

Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{p_1^2}{q_1^2} + \frac{p_2^2}{q_2^2} \right) + q_1^2 + q_2^2,$$

con $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ e $(q_1, q_2) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$.

- i) Estendere le relazioni

$$P_1 = \frac{p_1}{q_1}, \quad P_2 = \frac{p_2}{q_2},$$

ad una trasformazione canonica

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \xrightarrow{\Psi} (P_1, P_2, Q_1, Q_2),$$

sul dominio di H . Scrivere inoltre la funzione di Hamilton $K = H \circ \Psi^{-1}$.

- ii) Trovare due integrali primi per il campo vettoriale associato ad H in involuzione ed indipendenti tra loro.
- iii) Scrivere un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione K .
- iv) Scrivere la soluzione del sistema hamiltoniano per H in corrispondenza delle condizioni iniziali $p_1(0) = p_2(0) = 0$, $q_1(0) = q_2(0) = \sqrt{2}$.

Esercizio 3

Si consideri la funzione hamiltoniana

$$H(I_1, I_2, I_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3 + \varepsilon [\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin^2(\varphi_2 - 2\varphi_3)]$$

con $(I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3$, $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3$, $\varepsilon \ll 0$. Determinare quali condizioni devono essere soddisfatte da $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ affinché valga il principio della media.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
Laurea Magistrale in Matematica
13 Settembre 2024

Esercizio 1

Si consideri la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q), \quad V(q) = -\frac{1}{q} - q,$$

con $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\dot{q} \in \mathbb{R}$.

- i) Scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange relativa a L e tracciare il suo ritratto di fase.
- ii) Si consideri la soluzione $t \mapsto \gamma_1(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma_1(0) = 1, \quad \dot{\gamma}_1(0) = 2.$$

Mostrare che l'intervallo massimale destro di γ_1 è $[0, +\infty)$.

- iii) Mostrare che per ogni tempo τ , con $0 < \tau < +\infty$, la soluzione $\gamma_1(t)$ è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}_L(\gamma) = \int_0^\tau L(\gamma(\tau), \dot{\gamma}(\tau)) dt \tag{1}$$

nella classe di funzioni $C^1([0, \tau], \mathbb{R})$.

- iv) Si consideri la soluzione $t \mapsto \gamma_2(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma_2(0) = -2, \quad \dot{\gamma}_2(0) = 0.$$

Mostrare che γ_2 è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è periodica.

- v) Mostrare che esiste un tempo $\tau > 0$ tale che la soluzione $\gamma_2(t)$ non è un minimo debole per il funzionale definito in (1) nella classe di funzioni $C^1([0, \tau], \mathbb{R})$.

Esercizio 2

Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + q_1 q_2,$$

con $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ e $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$.

- i) Estendere le relazioni

$$Q_1 = \frac{q_1 - q_2}{2}, \quad Q_2 = \frac{q_1 + q_2}{2},$$

ad una trasformazione canonica

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \xrightarrow{\Psi} (P_1, P_2, Q_1, Q_2),$$

sul dominio di H . Scrivere inoltre la funzione di Hamilton $K = H \circ \Psi^{-1}$.

- ii) Trovare due integrali primi per il campo vettoriale associato ad H in involuzione ed indipendenti tra loro.
- iii) Scrivere un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione K .
- iv) Scrivere la soluzione del sistema hamiltoniano per H in corrispondenza delle condizioni iniziali $p_1(0) = q_1(0) = 2, p_2(0) = q_2(0) = 1$.

Esercizio 3

Si consideri la funzione hamiltoniana

$$H(I_1, I_2, I_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3 + \varepsilon [\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin^2(\varphi_2 - 2\varphi_3)]$$

con $(I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3$, $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3$, $\varepsilon \ll 0$. Scrivere la forma normale risonante al primo ordine in ε nel caso $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 1$ e trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per il sistema hamiltoniano definito da tale forma normale risonante troncata al primo ordine in ε .

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

21 Gennaio 2025

Esercizio 1

Consideriamo la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q), \quad V(q) = \frac{4}{q} - \frac{3}{q^2} - 1,$$

con $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\dot{q} \in \mathbb{R}$.

- i) Si consideri la soluzione $t \rightarrow \gamma(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma(0) = \frac{3}{4}, \quad \dot{\gamma}(0) = 0.$$

Trovare gli estremi t_1, t_2 del suo intervallo massimale di definizione.

- ii) Mostrare che per ogni tempo τ , con $0 < \tau < t_2$, $\gamma(t)$ è un minimo debole del funzionale

$$\mathcal{A}_L = \int_0^\tau L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

nella classe di funzioni $C^1([0, \tau], \mathbb{R})$.

Esercizio 2

- i) Si dimostri che non è possibile completare le relazioni

$$P_1 = \cos(p_1 + p_2), \quad Q_2 = \sin(q_1 + q_2)$$

ad una trasformazione canonica

$$V \ni (p_1, p_2, q_1, q_2) \xrightarrow{\Psi} (P_1, P_2, Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^4 \quad (1)$$

su nessun aperto $V \subseteq \mathbb{R}^4$.

- ii) Sia $S : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^4$ e tale che

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial(q_1, q_2) \partial(Q_1, P_2)}(q_1, q_2, Q_1, P_2) \neq 0 \quad \text{per ogni } (q_1, q_2, Q_1, P_2) \in U.$$

Si dimostri che le relazioni

$$p_1 = S_{q_1}, \quad p_2 = S_{q_2}, \quad P_1 = -S_{Q_1}, \quad Q_2 = S_{P_2}$$

definiscono implicitamente una trasformazione canonica locale della forma (1).

- iii) Completare le relazioni

$$P_1 = \cos(q_1 - q_2), \quad Q_2 = \sin(q_1 + q_2)$$

ad una trasformazione canonica della forma (1) e descrivere esplicitamente un aperto su cui può essere definita tale trasformazione.

Esercizio 3

Si consideri la funzione hamiltoniana

$$H(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \frac{1}{2}(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) + \varepsilon \cos(a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3),$$

con $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3$, $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Mostrare che le variabili azione compiono delle oscillazioni limitate da $C_j\sqrt{\varepsilon}$, per delle costanti positive C_j , $j = 1, 2, 3$.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

14 Febbraio 2025

Esercizio 1

Si consideri il funzionale

$$\mathcal{A}_L(\gamma) = \int_0^2 ((t-1)^2 \dot{\gamma}^2 + (t-1) \dot{\gamma}^3) dt$$

definito sulle funzioni $C^1([0, 2]; \mathbb{R})$.

- i) Dimostrare che $\gamma_0 \equiv 0$ è un estremo di $\mathcal{A}_L$.
- ii) Calcolare la variazione seconda $\delta^2 \mathcal{A}_L(\gamma, \eta)$ in γ_0 e mostrare che si ha

$$\delta^2 \mathcal{A}_L(0, \eta) > 0, \quad \forall \eta \in C^1([0, 2]; \mathbb{R}) \setminus \{0\}.$$

- iii) Mostrare che γ_0 non è un minimo debole di $\mathcal{A}_L$.¹

Esercizio 2

Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} |\mathbf{p} - \mathbf{A}|^2, \quad \mathbf{A} = |\mathbf{q}|^{-3}(-y, x, 0),$$

con $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{q} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dove $x^2 + y^2 \neq 0$.

- i) Completare le relazioni

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z$$

ad una trasformazione canonica indipendente dal tempo

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \xrightarrow{\Psi} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}),$$

con $\mathbf{P} = (p_\rho, p_\theta, p_z) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{Q} = (\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \times \mathbb{R}$ e scrivere la hamiltoniana K coniugata ad H tramite la trasformazione Ψ .

- ii) Mostrare che p_θ è un integrale primo del campo vettoriale della hamiltoniana K e che le equazioni del moto si possono scrivere come

$$\ddot{\rho} = -V_\rho, \quad \ddot{z} = -V_z,$$

con

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{p_\theta}{\rho} - \frac{\rho}{r^3} \right)^2, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}.$$

Esercizio 3

Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) = h(\mathbf{I}) + \epsilon f(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}),$$

¹considerare una famiglia di funzioni continue e lineari a tratti che tende a γ_0 in norma $\|\cdot\|_1$.

dove

$$h(\mathbf{I}) = I_1\omega_1 + I_2\omega_2,$$
$$f(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) = 2[I_1^2 \cos^2(\varphi_1 - 5\varphi_2) + \sin \varphi_1 \cos(5\varphi_2)],$$

e

$$\mathbf{I} = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2, \quad \omega_1, \omega_2 \neq 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

- i) Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) \xrightarrow{\Psi_\epsilon} (\tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ al primo ordine in ϵ . Scrivere inoltre la forma normale non risonante.

- ii) Scrivere la forma normale risonante al primo ordine in ϵ nel caso $\omega_1 = 5\omega_2$.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
15 Settembre 2025

Esercizio 1

Si consideri la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q), \quad V(q) = q \log |q|$$

con $q, \dot{q} \in \mathbb{R}$.

- i) Tracciare il ritratto di fase delle equazioni di Eulero-Lagrange per L .
- ii) Mostrare che la soluzione $\bar{\gamma}(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange con condizioni iniziali

$$\bar{\gamma}(0) = \frac{1}{e}, \quad \dot{\bar{\gamma}}(0) = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

è una funzione periodica.

- iii) Dimostrare che esiste un valore positivo del tempo $\bar{t} < +\infty$ coniugato a $t = 0$.

Esercizio 2

Si consideri la trasformazione di coordinate dipendente dal tempo

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \xrightarrow{\Psi} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$$

con

$$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P} = R_t \mathbf{p}, \quad \mathbf{Q} = R_t \mathbf{q}, \quad R_t = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

- (i) Dimostrare che Ψ è canonica trovando una funzione generatrice della forma $S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$.
- (ii) Estendere Ψ ad una trasformazione canonica

$$(\mathbf{p}, e, \mathbf{q}, t) \xrightarrow{\tilde{\Psi}} (\mathbf{P}, \mathcal{E}, \mathbf{Q}, t)$$

definita sullo spazio delle fasi esteso, in cui $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ sono definite da Ψ ed $e, \mathcal{E} \in \mathbb{R}$ sono nuove variabili, coniugate al tempo.

- (iii) Scrivere il campo vettoriale

$$X = \begin{pmatrix} -\mathbf{q} \\ 0 \\ \mathbf{p} \\ 1 \end{pmatrix}$$

nelle nuove variabili $(\mathbf{P}, \mathcal{E}, \mathbf{Q}, t)$ definite da $\tilde{\Psi}$.

Esercizio 3

Si consideri la hamiltoniana

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \varepsilon f(\varphi_1, \varphi_2),$$

con $\omega_1, \omega_2 > 0$ e

$$f(\varphi_1, \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)[\cos(\varphi_1 + 2\varphi_2) - 1]$$

definita per $(I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$.

- i) Trovare la forma normale risonante di H_ε relativa alla risonanza singola definita da $k = (1, 2)$. Scrivere anche l'espressione della funzione generatrice χ che definisce la trasformazione canonica Φ_χ^ε usata per passare a tale forma normale.
- ii) Descrivere l'andamento delle variabili di azione I_1, I_2 al primo ordine in ε per la risonanza considerata e mostrare che in questo caso non vale il principio della media.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

10 Giugno 2025

Esercizio 1

Si consideri la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q), \quad V(q) = q \sin q$$

con $q, \dot{q} \in \mathbb{R}$.

- i) Tracciare il ritratto di fase delle equazioni di Eulero-Lagrange per L per $q \in [-2\pi, 2\pi]$.
- ii) Mostrare che la soluzione $\bar{\gamma}(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange con condizioni iniziali

$$\bar{\gamma}(0) = 0, \quad \dot{\bar{\gamma}}(0) = \sqrt{\pi}$$

è una funzione periodica tale che

$$-\frac{\pi}{2} \leq \bar{\gamma}(t) \leq \frac{\pi}{2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- iii) Trovare un valore $\bar{t} > 0$ del tempo tale che nell'intervallo $(0, \bar{t})$ non ci siano valori coniugati a $t = 0$.

Esercizio 2

Si consideri la trasformazione di coordinate dipendente dal tempo

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \xrightarrow{\Psi} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$$

con

$$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P} = A^{-T}(t)\mathbf{p}, \quad \mathbf{Q} = A(t)\mathbf{q}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} t+1 & 1 \\ t & 1 \end{bmatrix}.$$

- (i) Dimostrare che Ψ è canonica.
- (ii) Estendere Ψ ad una trasformazione canonica

$$(\mathbf{p}, e, \mathbf{q}, t) \xrightarrow{\tilde{\Psi}} (\mathbf{P}, \mathcal{E}, \mathbf{Q}, t)$$

definita sullo spazio delle fasi esteso, in cui $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ sono definite da Ψ ed $e, \mathcal{E} \in \mathbb{R}$ sono nuove variabili, coniugate al tempo.

- (iii) Scrivere il campo vettoriale

$$X = \begin{pmatrix} -\mathbf{q} \\ 0 \\ \mathbf{p} \\ 1 \end{pmatrix}$$

nelle nuove variabili $(\mathbf{P}, \mathcal{E}, \mathbf{Q}, t)$ definite da $\tilde{\Psi}$.

Esercizio 3

Si consideri la hamiltoniana

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2^2 + \varepsilon f(\varphi_1, \varphi_2),$$

con $\omega_1, \omega_2 > 0$ e

$$f(\varphi_1, \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)[\cos(\varphi_1 + 2\varphi_2) - 1]$$

definita per $(I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$.

- i) Trovare la forma normale risonante di H_ε relativa alla risonanza singola definita da $k = (1, -4)$. Scrivere anche l'espressione della funzione generatrice χ che definisce la trasformazione canonica Φ_χ^ε usata per passare a tale forma normale.
- ii) Descrivere l'andamento delle variabili di azione I_1, I_2 al primo ordine in ε all'interno della risonanza considerata e mostrare che in questo caso vale il principio della media.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

11 Luglio 2025

Esercizio 1

Data la funzione di Lagrange

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q), \quad V(q) = -\frac{1}{q} + \frac{1}{2q^2}, \quad q > 0,$$

si consideri la soluzione $\gamma(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per $L(q, \dot{q})$ con condizioni iniziali

$$q(0) = \frac{3}{2}, \quad \dot{q}(0) = 0.$$

Trovare un valore $\bar{t} > 0$ del tempo tale che nell'intervallo $(0, \bar{t})$ non ci siano valori coniugati a $t = 0$.

Esercizio 2

Si considerino le funzioni di Hamilton

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} [|\mathbf{p}|^2 |\mathbf{q}|^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2] + V(|\mathbf{q}|), \quad K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} (|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2),$$

dove $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ e $V : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^2 .

i) Calcolare la parentesi di Lie

$$[X_H, X_K]$$

dei campi vettoriali hamiltoniani associati ad H e K .

ii) Assumendo che

$$V(x) = \frac{1}{2} \log(n + x^2)$$

e che $\mathbf{q} \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$, mostrare che il sistema hamiltoniano definito da

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = [X_H, X_K]$$

è integrabile con il metodo di Hamilton-Jacobi.

Esercizio 3

Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \frac{1}{2}(4I_1^2 - 9I_2^2 + 5I_3^2) + \varepsilon \cos(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + k_3\varphi_3),$$

con $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3$, $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3$ e $0 < \varepsilon \ll 1$.

i) Trovare due integrali primi del sistema hamiltoniano tra loro indipendenti come combinazioni lineari di I_1, I_2, I_3 .

ii) Determinare dei valori dei coefficienti k_1, k_2, k_3 per cui esistono dei moti del sistema che non soddisfano il principio della media. Per una scelta particolare di tali valori trovare esplicitamente questi particolari moti.