

Esercizio

Determinare due funzioni non costanti $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$
tali che

$$P(p, q) = p f(p) + q$$

$$Q(p, q) = q g(q) + \frac{p^2}{2}$$

definiscano una trasformazione canonica univalente su
 $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Sol.

Imponiamo

$$\{Q, P\} = 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = g + q g' , \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = p$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = 1 , \quad \frac{\partial P}{\partial q} = f + p f'$$

$$(g + q g')(f + p f') - p = 1$$

g è funzione di q , f è funzione di p

$$\begin{cases} g + qg' = c & (c \text{ è una costante}) \\ f + pf' = \frac{1+p}{c} \end{cases}$$

$$\underbrace{g + qg'}_{\parallel} = c$$

$$(qg)'$$

$$\rightarrow qg = cq + a \quad \text{con } a \neq 0$$

$$g(q) = c + \frac{a}{q}$$

$$\text{scegliamo } c = a = 1 \quad g(q) = 1 + \frac{1}{q}$$

$$\underbrace{f + pf'}_{\parallel} = \frac{1+p}{c} = 1+p$$

$$(fp)'$$

$$(fp)' = 1 + p \rightarrow fp = p + \frac{p^2}{2} + b \quad (b \text{ costante})$$

$$f(p) = 1 + \frac{1}{2}p \quad (b = 0)$$

un'altra scelta possibile è

$$f(p) = 1 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{p} \quad (b = 1)$$

Esercizio (18 giugno 2019)

Consideriamo la trasformazione

$$\psi : (p, q, t) \longrightarrow (P, Q, t)$$

che dipende da $\alpha, \omega, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{cases} P = e^{-\alpha t} [p \cos(\omega t) + q \sin(\omega t)] \\ Q = e^{\alpha t} [\beta p \sin(\omega t) + \gamma q \cos(\omega t)] \end{cases}$$

- i) Trovare tutti i valori di $\alpha, \omega, \beta, \gamma$ che rendono ψ canonica univalente

Sl.

$$\{Q, P\} = 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = e^{\alpha t} \gamma \cos(\omega t)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = e^{\alpha t} \beta \sin(\omega t)$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$$

$$e^{\alpha t} \gamma \cos(\omega t) e^{-\alpha t} \cos(\omega t) -$$

$$e^{\alpha t} \beta \sin(\omega t) e^{-\alpha t} \sin(\omega t) = 1$$

$$\gamma \cos^2(\omega t) - \beta \sin^2(\omega t) = 1$$

$$\beta = -1, \gamma = 1, \omega, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Con questa scelta dei parametri la trasformazione a tempo bloccato

$$\begin{cases} P = e^{-\alpha \bar{t}} [p \cos(\omega \bar{t}) + q \sin(\omega \bar{t})] \\ Q = e^{\alpha \bar{t}} [-p \sin(\omega \bar{t}) + q \cos(\omega \bar{t})] \end{cases}$$

è canonica con valenza 1

Poiché l'insieme di definizione di p, q è semplicemente connesso segue che ψ è canonica univalente

ii) Per i valori di ω, β, γ trovati e per $\alpha = 1$ estendere ψ ad una trasformazione canonica nello spazio delle fasi esteso

$$\tilde{\psi} : (p, e, q, t) \longrightarrow (P, \mathcal{E}, Q, t)$$

dove P, Q sono definite da ψ e $\mathcal{E}, e$ sono i momenti coniugati al tempo

Sol.

$$\mathcal{E} = e - H_0$$

con $H_0 = K_0 \circ \psi$ e

K_0 è la funz. hamiltoniana relativa al campo
vettoriale

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \psi^{-1} = X_{K_0}$$

con

$$(p, q, t) \xrightarrow{\Phi} (P, Q)$$

Considerando che

$$\begin{cases} P = e^{-t} [p \cos(\omega t) + q \sin(\omega t)] \\ Q = e^t [-p \sin(\omega t) + q \cos(\omega t)] \end{cases}$$

si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = & \left(-e^{-t} [p \cos(\omega t) + q \sin(\omega t)] + \right. \\ & e^{-t} [-\omega p \sin(\omega t) + \omega q \cos(\omega t)], e^t [-p \sin(\omega t) + \\ & q \cos(\omega t)] + e^t [-p \omega \cos(\omega t) - q \omega \sin(\omega t)] \left. \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \psi^{-1} = & \left(-e^{-t} \frac{P}{e^{-t}} + \omega e^{-t} \frac{Q}{e^t}, \right. \\ & \left. e^t \frac{Q}{e^t} - \omega e^t \frac{P}{e^{-t}} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \psi^{-1} = (-P + e^{-2t} \omega Q, Q - \omega e^{2t} P)$$

$$\begin{cases} \dot{P} = -P + e^{-2t} \omega Q = -\frac{\partial K_0}{\partial Q} \\ \dot{Q} = Q - \omega e^{2t} P = \frac{\partial K_0}{\partial P} \end{cases}$$

integrando la seconda equazione si ha

$$K_0(P, Q, t) = PQ - \frac{1}{2} \omega e^{2t} P^2 + f(Q, t)$$

e integrando la prima equazione si ha

$$K_0(P, Q, t) = PQ - \frac{1}{2} \omega e^{-2t} Q^2 + g(P, t)$$

da cui

$$K_0(P, Q, t) = PQ - \frac{1}{2} \omega e^{-2t} Q^2 - \frac{1}{2} \omega e^{2t} P^2$$

e

$$\begin{aligned} H_0(p, q, t) &= K_0 \circ \psi = -p^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) \\ &+ pq (\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)) + q^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) \\ &- \frac{1}{2} \omega (p^2 + q^2) \end{aligned}$$

infatti $\begin{pmatrix} e^t P \\ e^{-t} Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$

$$H_0 = \frac{1}{2} \sin(2\omega t) (q^2 - p^2) + pq \cos(2\omega t) - \frac{\omega}{2} (p^2 + q^2)$$

La trasformazione canonica estesa $\tilde{\Psi}$ è

$$\left\{ \begin{array}{l} P = e^{-t} [p \cos(\omega t) + q \sin(\omega t)] \\ \mathcal{E} = e - H_0 = e - \frac{1}{2} \sin(2\omega t) (q^2 - p^2) - pq \cos(2\omega t) + \frac{\omega}{2} (p^2 + q^2) \\ Q = e^t [-p \sin(\omega t) + q \cos(\omega t)] \\ t = t \end{array} \right.$$

Esercizio

Completare la relazione

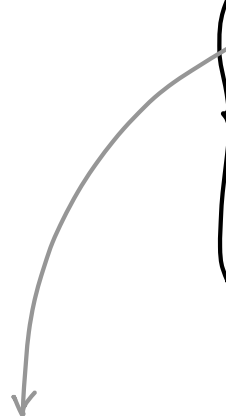
$$Q = q^2 + p(1+t^2)$$

ad una trasformazione canonica dipendente dal tempo

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (p, q, t) \xrightarrow{\Psi} (P, Q, t)$$

Sol.

Chiamiamo una funzione generatrice $S(q, Q, t)$

$$\begin{cases} p = S_q = \frac{\partial S}{\partial q} \\ P = -S_Q = -\frac{\partial S}{\partial Q} \end{cases}$$


$$p = \frac{Q - q^2}{1 + t^2} \rightarrow \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{Q - q^2}{1 + t^2}$$

integrando, pongo

$$\begin{aligned} S(q, Q, t) &= \frac{Qq}{1 + t^2} - \frac{1}{3} \frac{q^3}{1 + t^2} \\ &= \frac{1}{1 + t^2} \left(Qq - \frac{1}{3} q^3 \right) \end{aligned}$$

dato che

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Q \partial q} = \frac{1}{1 + t^2} \neq 0$$

$S(q, Q, t)$ è una buona funzione generatrice

Proseguiamo

$$P = -\frac{\partial S}{\partial Q} = -\frac{q}{1 + t^2}$$

Le trasformazioni ψ e ψ^{-1} sono quindi

$$\begin{cases} P = -\frac{q}{1+t^2} \\ Q = q^2 + p(1+t^2) \end{cases} \quad \begin{cases} q = -P(1+t^2) \\ P = \frac{Q}{1+t^2} - P^2(1+t^2) \end{cases}$$

ii) Estendere tale trasformazione ad una trasformazione canonica nello spazio delle fasi esteso

Sol. Proponiamo due soluzioni

a)

$$\mathcal{E}(p, e, q, t) = e - \frac{\partial S}{\partial t}(q, Q(p, q, t), t)$$

$$S(q, Q, t) = \frac{1}{1+t^2} \left(Qq - \frac{1}{3} q^3 \right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{2t}{(1+t^2)^2} \left(Qq - \frac{1}{3} q^3 \right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} \circ \psi = -\frac{2t}{(1+t^2)^2} \left[q^3 + pq(1+t^2) - \frac{1}{3} q^3 \right]$$

$$= -\frac{2t}{(1+t^2)^2} \left[\frac{2}{3} q^3 + pq(1+t^2) \right]$$

$$\mathcal{E}(p, e, q, t) = e + \frac{2t}{(1+t^2)^2} \left[\frac{2}{3} q^3 + pq(1+t^2) \right]$$

b)

$$\mathcal{E}(p, e, q, t) = e - H_0(p, q, t)$$

chiamo Φ la trasformazione

$$(p, q, t) \xrightarrow{\Phi} (P, Q)$$

$$P = -\frac{q}{1+t^2}, \quad Q = q^2 + p(1+t^2)$$

$$(P = \frac{Q}{1+t^2} - P^2(1+t^2))$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left(\frac{2tq}{(1+t^2)^2}, 2pt \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \psi^{-1} &= \left(\frac{2t}{(1+t^2)^2} (-P)(1+t^2), \right. \\ &\quad \left. 2t \left(\frac{Q}{1+t^2} - P^2(1+t^2) \right) \right) \end{aligned}$$

Ora scriviamo X_{K_0} :

$$\begin{cases} \dot{P} = -\frac{2tP}{1+t^2} = -\frac{\partial K_0}{\partial Q} \\ \dot{Q} = \frac{2t}{1+t^2} Q - 2t(1+t^2)P^2 = \frac{\partial K_0}{\partial P} \end{cases}$$

Integrando la prima equazione si ha

$$K_0 = \frac{2tPQ}{1+t^2} + f(P, t)$$

e integrando la seconda si ha

$$K_0 = \frac{2tPQ}{1+t^2} - \frac{2}{3}t(1+t^2)P^3 + g(Q, t)$$

$$K_0 = \frac{2t}{1+t^2} PQ - \frac{2}{3}t(1+t^2)P^3$$

$$H_0 = K_0 \circ \psi =$$

$$\frac{2t}{1+t^2} \left(-\frac{q^3}{1+t^2} - pq \right) - \frac{2}{3}t \cancel{(1+t^2)} \left(-\frac{q^3}{(1+t^2)^{\cancel{2}}_2} \right) =$$

$$\frac{2t}{1+t^2} \left(-\frac{2}{3} \frac{q^3}{1+t^2} - pq \right)$$

$$\mathcal{E}(p, e, q, t) = e + \frac{2t}{(1+t^2)^2} \left[\frac{2}{3} q^3 + pq(1+t^2) \right]$$

Esercizio

Si consideri la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q), \quad V(q) = q^2 \log q$$

con $q > 0$, $\dot{q} \in \mathbb{R}$.

- i) Tracciare il ritratto di fase delle equazioni di Eulero-Lagrange per L .
- ii) Mostrare che la soluzione $\bar{\gamma}(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange con condizioni iniziali

$$\bar{\gamma}(0) = e^{-1/2}, \quad \dot{\bar{\gamma}}(0) = (1/e - 1/3)^{1/2}$$

è una funzione periodica tale che

$$\bar{\gamma}(t) > 1/e, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- iii) Mostrare che esiste un valore τ_* del tempo t per cui $\bar{\gamma}(t)$ non può essere un minimo debole del funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}_L(\gamma) = \int_0^{\tau_*} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt.$$

i)

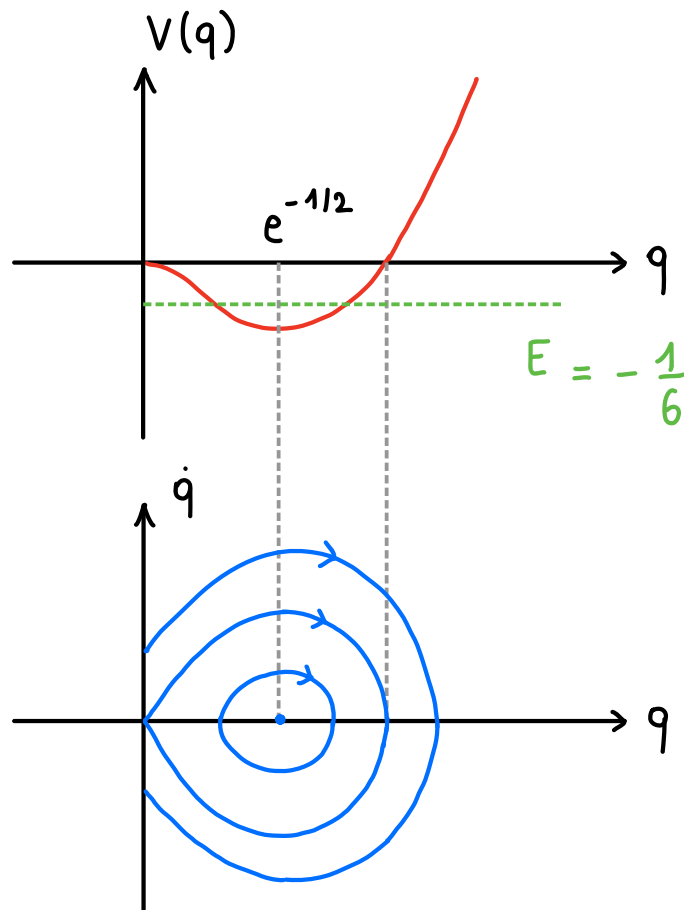
$$\lim_{q \rightarrow 0^+} q^2 \log q = 0$$

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} q^2 \log q = +\infty$$

calcoliamo $V'(q)$:

$$V'(q) = 2q \log q + q$$

$$V'(q) = 0 \text{ per } \log q = -\frac{1}{2} \rightarrow q = e^{-1/2}$$



ii)

Calcoliamo il valore dell'energia meccanica che è una quantità conservata lungo il moto

$$E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 + V(q)$$

$$\bar{E}(\bar{\gamma}(0), \dot{\bar{\gamma}}(0)) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{e} \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{6}$$

notando che

$$V(e^{-1/2}) = \frac{1}{e} \left(-\frac{1}{2} \right) < \bar{E} < 0$$

possiamo dire dal ritratto di fase che $\bar{\gamma}(t)$ è una funzione periodica; inoltre

$$V\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e^2} > -\frac{1}{6}$$

perciò dato che $\frac{1}{e} < \frac{1}{\sqrt{e}}$ possiamo

affermare che

$$\bar{\gamma}(t) > \frac{1}{e} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

iii)

Vogliamo considerare la soluzione dell'equazione di Fuchs

$$-\frac{d}{dt} (a(t)\eta) + (c(t) - b(t))\eta = 0$$

con condizioni iniziali

$$\eta(0) = 0, \quad \dot{\eta}(1) = 0$$

e mostrare che esiste $\tau^* > 0$ tale che $\eta(\tau^*) = 0$

$$L_{\dot{q}} = \dot{q} \quad L_q = -V' = -2q \log q - q$$

$$a(t) = \frac{1}{2} L_{\dot{q}\dot{q}}(\bar{\gamma}(t), \dot{\bar{\gamma}}(t)) = \frac{1}{2} > 0$$

$$b(t) = \frac{1}{2} L_{q\dot{q}}(\bar{\gamma}(t), \dot{\bar{\gamma}}(t)) = 0$$

$$c(t) = \frac{1}{2} L_{qq}(\bar{\gamma}(t), \dot{\bar{\gamma}}(t)) = -\frac{1}{2} V''(\bar{\gamma}(t))$$

$$-\frac{1}{2} (2 \log \bar{\gamma}(t) + 2 + 1) = -\frac{3}{2} - \log \bar{\gamma}(t)$$

$$-\frac{1}{2} \ddot{\eta} - \left(\frac{3}{2} + \log \bar{\gamma}(t) \right) \eta = 0$$

$$\ddot{\eta} = -(3 + 2 \log \bar{\eta}(t)) \eta$$

poiché $\bar{\eta}(t) > \frac{1}{e}$ si ha

$$3 + 2 \log \bar{\eta}(t) > 3 + 2 \log \frac{1}{e} = 1$$

Considero il problema di Cauchy

$$\ddot{\xi} = -\xi, \quad \xi(0) = 0, \quad \dot{\xi}(0) = 1$$

che ha soluzione $\xi(t) = \sin t$

Considero allora i due sistemi

$$\begin{cases} \ddot{\eta} = -(3 + 2 \log \bar{\eta}(t)) \eta \\ \dot{\eta}(0) = 1 \\ \eta(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = -\xi \\ \dot{\xi}(0) = 1 \\ \xi(0) = 0 \end{cases} \quad \text{con soluzione } \xi(t) = \sin t$$

Integrando si ha

$$\dot{\eta}(t) = 1 - \int_0^t (3 + 2 \log \bar{\eta}(\tau)) \eta(\tau) d\tau$$

$$\dot{\eta}(t) < 1 - \int_0^t \eta(\tau) d\tau \quad 1$$

$$\dot{\xi}(t) = 1 - \int_0^t \xi(\tau) d\tau \quad 2$$

Dal teorema del confronto (per esempio si veda il teorema 6.4 delle dispense di Paolo Baiti) applicato considerando l'intervallo $[0, \pi]$ si ha che

$$\eta(t) < \xi(t) = \sin t$$

per ogni $t \in (0, \pi]$.

Concludiamo che esiste $\tau^* < \pi$ tale che $\eta(\tau^*) = 0$.