

Continuazione dell'esercizio

- ii) Sia $P(0) \neq N^\pm$,
usiamo coord. sferiche $(\alpha, \delta) \in [0, 2\pi) \times$
 $(-\pi/2, \pi/2)$;
descrivere le possibili traiettorie.

Sol. ii)

$$T = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2$$

$$\begin{cases} x = R \cos \delta \cos \alpha \\ y = R \cos \delta \sin \alpha \\ z = R \sin \delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -R \dot{\delta} \sin \delta \cos \alpha - R \dot{\alpha} \cos \delta \sin \alpha \\ \dot{y} = -R \dot{\delta} \sin \delta \sin \alpha + R \dot{\alpha} \cos \delta \cos \alpha \\ \dot{z} = R \dot{\delta} \cos \delta \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\alpha}^2 \cos^2 \delta + \dot{\delta}^2)$$

$$V = mgR \sin \delta$$

$$L \text{ non dipende da } \alpha, \quad L = \tilde{L}_\alpha + \tilde{L}_\delta$$

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = m R^2 \dot{\alpha} \cos^2 \delta, \quad p_\alpha = c$$

$$\dot{\alpha} = \frac{c}{m R^2 \cos^2 \mathcal{J}}$$

$$L_R^{(c)} = (\tilde{L}_0 - \tilde{L}_2) \Big|_{\dot{\alpha} = c / (m R^2 \cos^2 \mathcal{J})}$$

$$= \frac{1}{2} m R^2 \dot{\mathcal{J}}^2 - mg R \sin \mathcal{J} - \frac{1}{2} m R^2 \cancel{\cos^2 \mathcal{J}} \frac{c^2}{m^2 R^2 \cancel{\cos^2 \mathcal{J}} \cos^2 \mathcal{J}}$$

$$= \frac{1}{2} m R^2 \dot{\mathcal{J}}^2 - mg R \sin \mathcal{J} - \frac{1}{2} \frac{c^2}{m R^2 \cos^2 \mathcal{J}}$$

$$V_{\text{eff}}^{(c)}(\mathcal{J}) = mg R \sin \mathcal{J} + \frac{1}{2} \frac{c^2}{m R^2 \cos^2 \mathcal{J}}$$

$$\frac{dV_{\text{eff}}^{(c)}(\mathcal{J})}{d\mathcal{J}} = mg R \cos \mathcal{J} + \frac{c^2}{m R^2} \frac{\tan \mathcal{J}}{\cos^2 \mathcal{J}}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \mathcal{J}} \left(\underbrace{mg R \cos^3 \mathcal{J}}_A + \underbrace{\frac{c^2}{m R^2} \tan \mathcal{J}}_B \right)$$

$$\longrightarrow A \cos^3 \mathcal{J} = -B \tan \mathcal{J}$$

1) $B \neq 0$ (cioè $c \neq 0$)

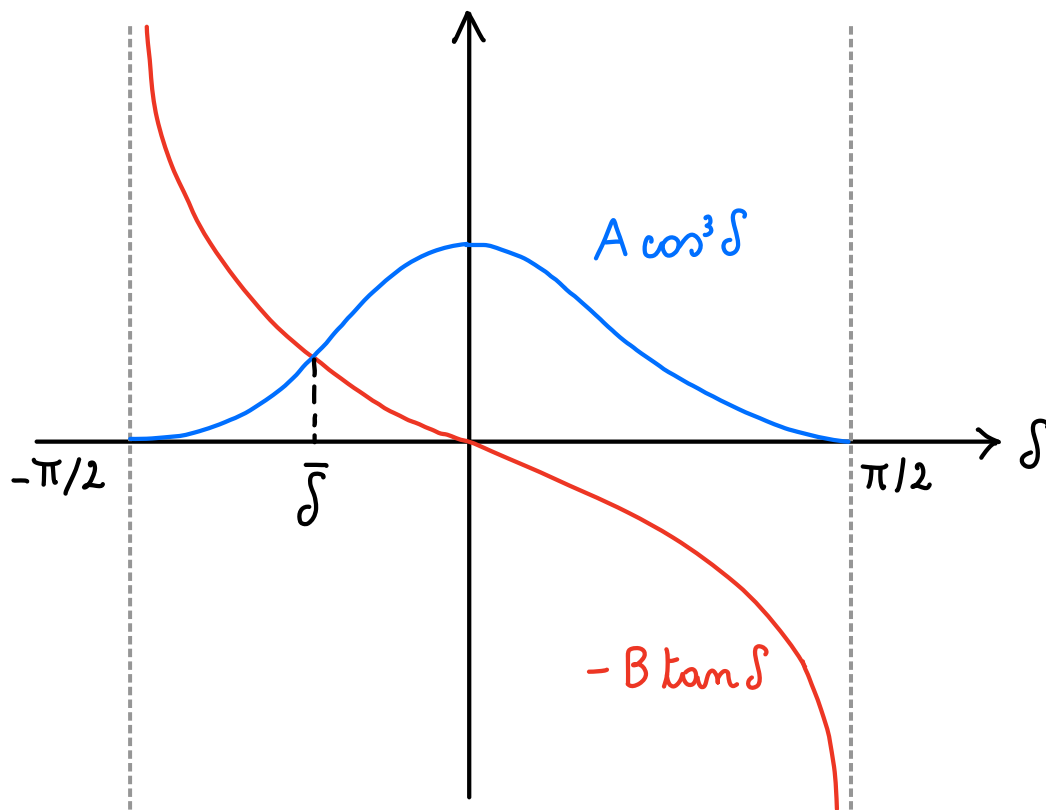
$$\mathcal{J}(\mathcal{J}) = \cos^3 \mathcal{J} \quad \mathcal{J}(\pm \pi/2) = 0$$

$$\mathcal{J}'(\mathcal{J}) = 3(\cos \mathcal{J})^2 (-\sin \mathcal{J}) = 0$$

$$\text{per } \mathcal{J} = 0 \text{ e } \mathcal{J} = \pm \pi/2$$

noto che per $\mathcal{J} \in (-\pi/2, 0)$ si ha $\mathcal{J}'(\mathcal{J}) > 0$

e per $\mathcal{J} \in (0, \pi/2)$ si ha $\mathcal{J}'(\mathcal{J}) < 0$

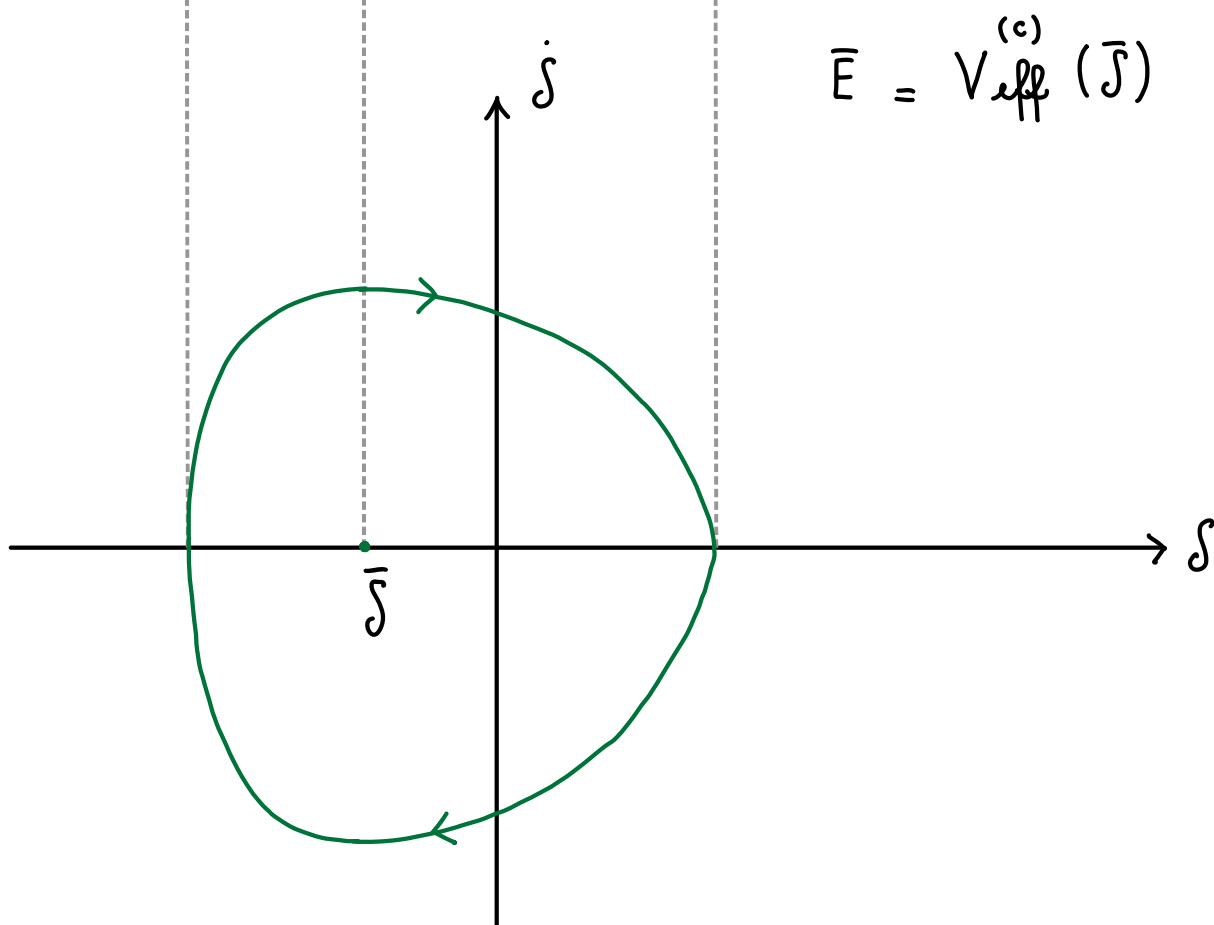
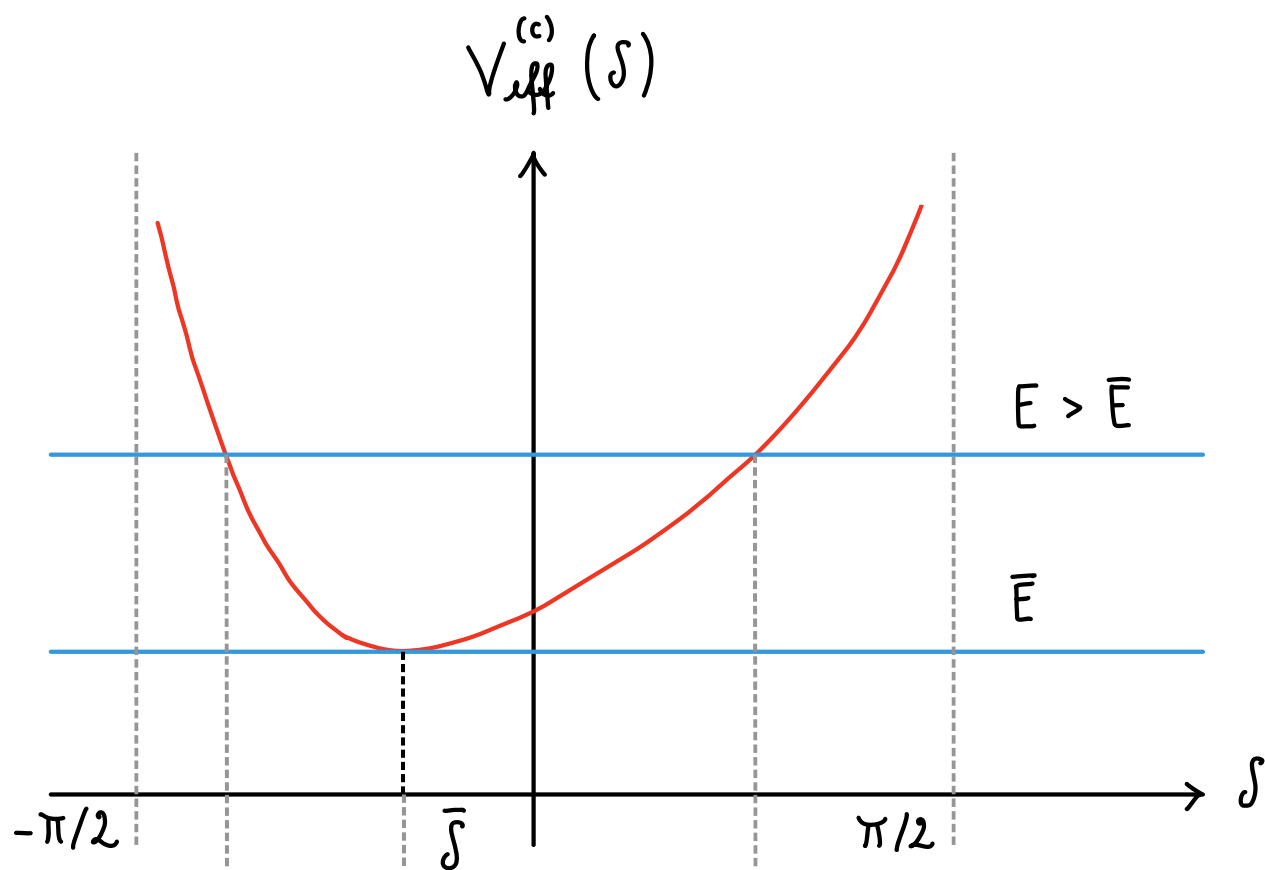


Esiste $\bar{\mathcal{J}} : -\pi/2 < \bar{\mathcal{J}} < 0$ t. c.

$$\frac{dV_{\text{eff}}^{(c)}}{d\mathcal{J}}(\bar{\mathcal{J}}) = 0$$

Dal ritratto di fase riportato nella prossima pagina si vede che

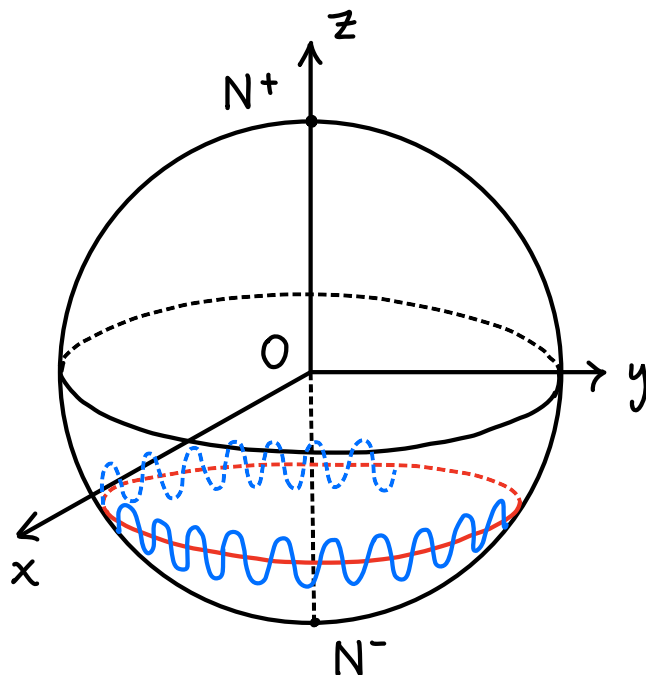
esiste un'orbita periodica con $\mathcal{J}(t) = \bar{\mathcal{J}}$ e poi esiste una famiglia di orbite quasi periodiche



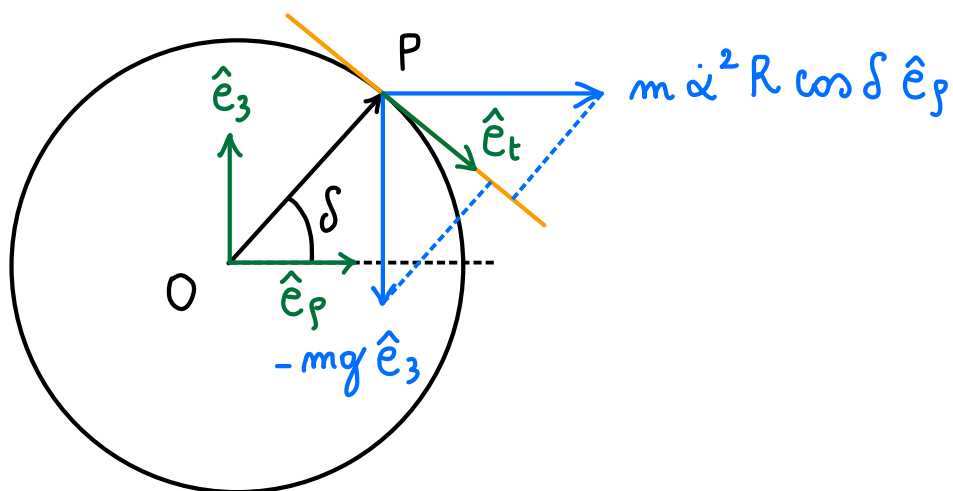
$$\bar{E} = V_{\text{eff}}^{(c)}(\bar{J})$$

Nello spazio delle configurazioni le traiettorie

appassione come segue



Diamo una spiegazione fisica dell'esistenza dell'orbita periodica. Consideriamo il piano che ad ogni istante contiene P e l'asse Oz . Rispetto ad un sistema di riferimento solidale a questo piano le forze che agiscono su m sono quella di gravità e quella centrifuga.



Proiettiamo tali forze lungo $\hat{e}_t$ e poniamo la somma delle due proiezioni uguale a 0

$$-mg \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_t + m \dot{\alpha}^2 R \cos \mathcal{S} \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_t = 0$$

$$mg \cos \mathcal{S} + m \dot{\alpha}^2 R \cos \mathcal{S} \sin \mathcal{S} = 0$$

$$mg \cos \mathcal{S} + \cancel{mR} \frac{c^2}{m^2 \cancel{R^4} \cos^2 \mathcal{S}} \cancel{\cos \mathcal{S} \sin \mathcal{S}} = 0$$

$$\frac{1}{\cos^2 \mathcal{S}} \left(mg \cos^3 \mathcal{S} + \frac{c^2}{m R^3} \tan \mathcal{S} \right) = 0$$

che è la stessa equazione scritta per trovare i punti critici di $V_{\text{eff}}^{(c)}(\mathcal{S})$.

2) $B = 0$ (cioè $c = 0$)

$$V_{\text{eff}}(\mathcal{S}) = mgR \sin \mathcal{S}$$

si ottiene la dinamica di un pendolo matematico di lunghezza R ; il moto avviene lungo il meridiano definito dal piano contenente $P-O$ e Oz . A seconda della velocità iniziale potremo avere delle librazioni di $\mathcal{S}$ o delle rotazioni di $\mathcal{S}$.

Esercizio (30 gennaio 2018)

Consideriamo un punto materiale P di massa m vincolato a muoversi sulla superficie di equazione

$$x^2 + y^2 = 1 + z^2$$

soggetto ad una forza conservativa con energia potenziale

$$V(z) = -\frac{k^2}{1+z^2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

- i) Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange nelle coordinate cilindriche (z, θ) e trovare $\bar{\gamma}(t)$ nel caso $k > 1$ con c.i.

$$z(0) = \sqrt{k-1}, \quad \dot{z}(0) = 0, \quad \theta(0) = 0$$

$$\dot{\theta}(0) = \sqrt{\frac{2}{m}}.$$

Sol. i)

$$\begin{cases} x = r(z) \cos \theta \\ y = r(z) \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad r(z) = \sqrt{1+z^2}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = r'(z) \dot{z} \cos \theta - r(z) \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} = r'(z) \dot{z} \sin \theta + r(z) \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{z} = \dot{z} \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m \left[(1 + (r'(z))^2) \dot{z}^2 + (r(z))^2 \dot{\theta}^2 \right]$$

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{k^2}{1 + z^2}$$

$$L(z, \dot{z}, \dot{\theta}) = T(z, \dot{z}, \dot{\theta}) - V(z)$$

θ è una variabile ciclica

$$p_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m (r(z))^2 \dot{\theta}, \quad p_{\theta} = c$$

$$\dot{\theta} = \frac{c}{m (r(z))^2}$$

Lagrangiana ridotta

$$L_R^{(c)} = (\tilde{L}_0 - \tilde{L}_2) \Big|_{\dot{\theta} = c / (m (r(z))^2)}$$

$$L_R^{(c)}(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} m [1 + (r'(z))^2] \dot{z}^2 + \frac{k^2}{1 + z^2} -$$

$$- \frac{1}{2} \cancel{m} (\cancel{r(z)})^2 \frac{c^2}{\cancel{m^2} (\cancel{r(z)})^{\cancel{4} 2}} =$$

$$\frac{1}{2} m [1 + (r'(z))^2] \dot{z}^2 + \frac{k^2}{1+z^2} - \frac{1}{2} \frac{c^2}{m (r(z))^2}$$

Calcoliamo l'espressione c dalle c.i.

$$c = m \underbrace{(r(0))^2}_{= 1+z^2(0)} \dot{\theta}(0) = m k \sqrt{\frac{2}{m}} = k \sqrt{2m}$$

$$1 + z^2(0) = 1 + k - 1 = k$$

$$L_R(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} m [1 + (r'(z))^2] \dot{z}^2 + \frac{k^2}{1+z^2} - \frac{1}{2} \frac{\cancel{k^2} \cancel{2m}}{\cancel{m} (1+z^2)}$$

$$L_R(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} m [1 + (r'(z))^2] \dot{z}^2$$

$$r(z) = \sqrt{1+z^2}$$

$$r'(z) = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$L_R(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} m \left(1 + \frac{z^2}{1+z^2} \right) \dot{z}^2$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{1+2z^2}{1+z^2} \right) \dot{z}^2$$

introduco $\beta(z) = \frac{1+2z^2}{1+z^2}$

$$\frac{\partial L_R}{\partial \dot{z}} = m \beta(z) \dot{z}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_R}{\partial \dot{z}} \right) = m \beta(z) \ddot{z} + m \dot{z}^2 \beta'(z)$$

$$\beta'(z) = \frac{4z(1+z^2) - (1+2z^2)2z}{(1+z^2)^2} = \frac{2z}{(1+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial L_R}{\partial z} = \frac{1}{2} m \beta'(z) \dot{z}^2 = \frac{m z \dot{z}^2}{(1+z^2)^2}$$

Si ottiene

$$m \frac{1+2z^2}{1+z^2} \ddot{z} + \frac{2m z \dot{z}^2}{(1+z^2)^2} = \frac{m z \dot{z}^2}{(1+z^2)^2}$$

$$\begin{cases} m \frac{1+2z^2}{1+z^2} \ddot{z} = - \frac{m z \dot{z}^2}{(1+z^2)^2} \\ z(0) = \sqrt{k-1} \quad \dot{z}(0) = 0 \end{cases}$$

La soluzione è $z(t) = \sqrt{k-1}$.

Si poteva giungere allo stesso risultato

sfruttando la conservazione dell'energia.

Introduco l'**hamiltoniana** H attraverso la **trasformata di Legendre**

$$H(p_z, z) = \left[p_z \dot{z} - L_R(z, \dot{z}) \right] \Big|_{\dot{z} = \varphi(p_z, z)}$$

$$p_z = \frac{\partial L_R}{\partial \dot{z}} = m \beta(z) \dot{z}$$

$$\dot{z} = \frac{p_z}{m \beta(z)} \quad (\beta(z) \neq 0)$$

$$\begin{aligned} H(p_z, z) &= \frac{p_z^2}{m \beta(z)} - \frac{1}{2} m \beta(z) \frac{p_z^2}{m^2 \beta^2(z)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{p_z^2}{m \beta(z)} \end{aligned}$$

Notiamo che H (che coincide con l'energia meccanica del sistema) è un integrale primo del moto, allora

$$H(p_z(t), z(t)) = H(p_z(0), z(0)) = 0$$

infatti $p_z(0) = 0$ dato che $\dot{z}(0) = 0$.

Segue che $p_z(t) = 0$, cioè $\dot{z}(t) = 0$

$$\text{e } z(t) = z(0) = \sqrt{k-1}.$$

Determiniamo ora $\theta(t)$

$$m \dot{\theta} (1 + z^2) = c = k \sqrt{2m}$$

$$m \dot{\theta} (1 + k - 1) = k \sqrt{2m}$$

$$mk \dot{\theta} = k \sqrt{2m}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{m}} \longrightarrow \theta(t) = \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

La soluzione cercata è

$$\bar{\gamma}(t) = (\bar{z}(t), \bar{\theta}(t)) = \left(\sqrt{k-1}, \sqrt{\frac{2}{m}} t \right)$$

ii) $\bar{z}(t)$ ha valori coniugati a $t_0 = 0$ per $t > 0$?

(rispondere usando la lagrangiana $L_R(z, \dot{z})$)

che si ottiene eliminando θ nelle equazioni)

Sol. ii)

Si chiede di usare la lagrangiana ridotta

$$L_R(z, \dot{z}) = \frac{m}{2} \left(\frac{1 + 2z^2}{1 + z^2} \right) \dot{z}^2$$

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} -\frac{d(a(t)\dot{\eta})}{dt} + (c(t) - b(t))\eta = 0 \\ \eta(0) = 0 \\ \dot{\eta}(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{2} L_{R,\dot{z}\dot{z}}(\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t)) = \frac{m}{2} \left(\frac{1 + 2(\bar{z}(t))^2}{1 + (\bar{z}(t))^2} \right) \\ &= \frac{m}{2} \left(\frac{1 + 2u - 2}{u} \right) = \frac{m}{2} \left(\frac{2u - 1}{u} \right) > 0 \quad (u > 1) \end{aligned}$$

la condizione di Legendre stretta è soddisfatta

$$b(t) = \frac{1}{2} L_{R,z\dot{z}}(\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t)) = 0$$

$$c(t) = \frac{1}{2} L_{R,zz}(\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t)) = 0$$

Risulta

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \frac{2u-1}{u} \dot{\eta} \right) = 0$$

$$\ddot{\eta} = 0, \quad \eta(0) = 0, \quad \dot{\eta}(0) = 1$$

$$\eta(t) = t, \quad \text{poiché per } t > 0 \text{ si ha } \eta(t) > 0$$

non ci sono valori coniugati a $t_0 = 0$
per $t > 0$.

iii) Dire se per $h = 0$ esistono soluzioni con
c. i. $z(0) > 0$, $\dot{z}(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 1$ tali che
 $z(t) \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$

Sol. iii)

Mostriamo due modi di rispondere

1) Usiamo l'integrale di Clairaut

$$\mathcal{C} = \frac{m(P-O) \times \vec{v} \cdot \hat{e}_3}{|\vec{v}|},$$

il numeratore è costante perché è la componente
del momento angolare di P rispetto ad O
lungo la direzione di Oz ;

il denominatore è costante perché essendo

$h = 0$ si ha che l'energia meccanica coincide con
l'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2.$$

Consideriamo la superficie su cui si muove il punto

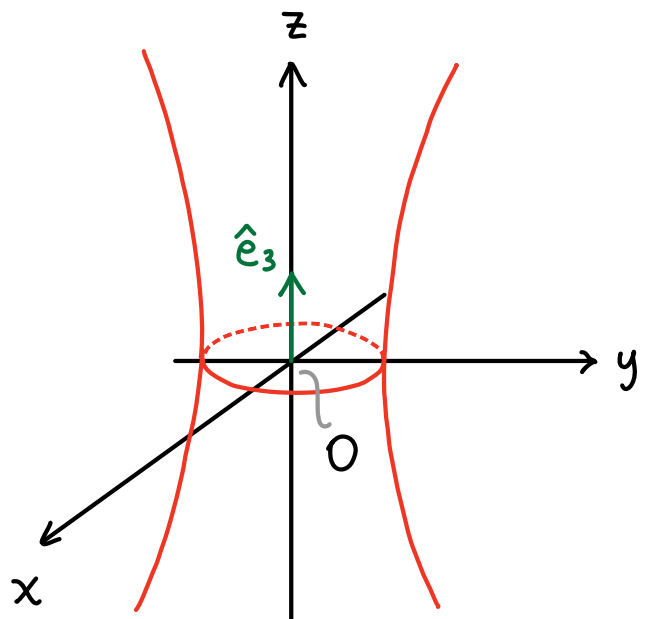
$$r(z) = \sqrt{1+z^2}$$

$$r(0) = 1$$

$$r(z) > 1 \quad \text{se } z \neq 0$$

$$r'(z) = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = 0$$

$$\text{per } z = 0$$



Riscriviamo $\mathcal{L}$ come segue

$$\mathcal{L}(z) = m \hat{e}_3 \times (P - O) \cdot \hat{t}$$

$$\text{con } \hat{t} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\mathcal{L}(z) = m r(z) \hat{u} \cdot \hat{t} \quad \text{dove} \quad r(z) \hat{u} = \hat{e}_3 \times (P - O)$$

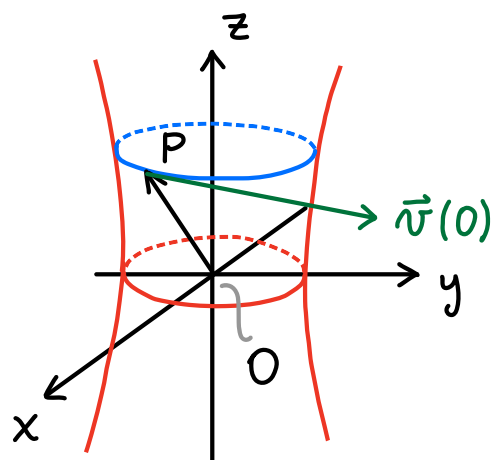
All'istante iniziale dato che $\dot{z}(0) = 0$ si ha

$$\vec{v}(0) \perp \hat{e}_3 \quad \text{e}$$

$$\vec{v}(0) \perp P - O$$

$$\text{perciò } \hat{t} \parallel \hat{u}$$

all'istante iniziale



Otteniamo

$$\mathcal{E} = m r(z(t)) \hat{u}(t) \cdot \hat{t}(t) = \\ m r(z_0)$$

$$\text{con } z_0 = z(0) > 0$$

Assumiamo che ad un certo istante si abbia $z = 0$, allora deve essere

$$r(0) \underbrace{\cos(\alpha(0))}_{\parallel \hat{u}(0) \cdot \hat{t}(0)} = r(z_0) > 1,$$

ma $r(0) = 1$, quindi

$$\cos(\alpha(0)) > 1$$

che è impossibile.

2) Consideriamo l'energia meccanica

$$E(z, \dot{z}) = \frac{m}{2} \left(\frac{1 + 2z^2}{1 + z^2} \right) \dot{z}^2 + \frac{c^2}{2m(1 + z^2)}$$

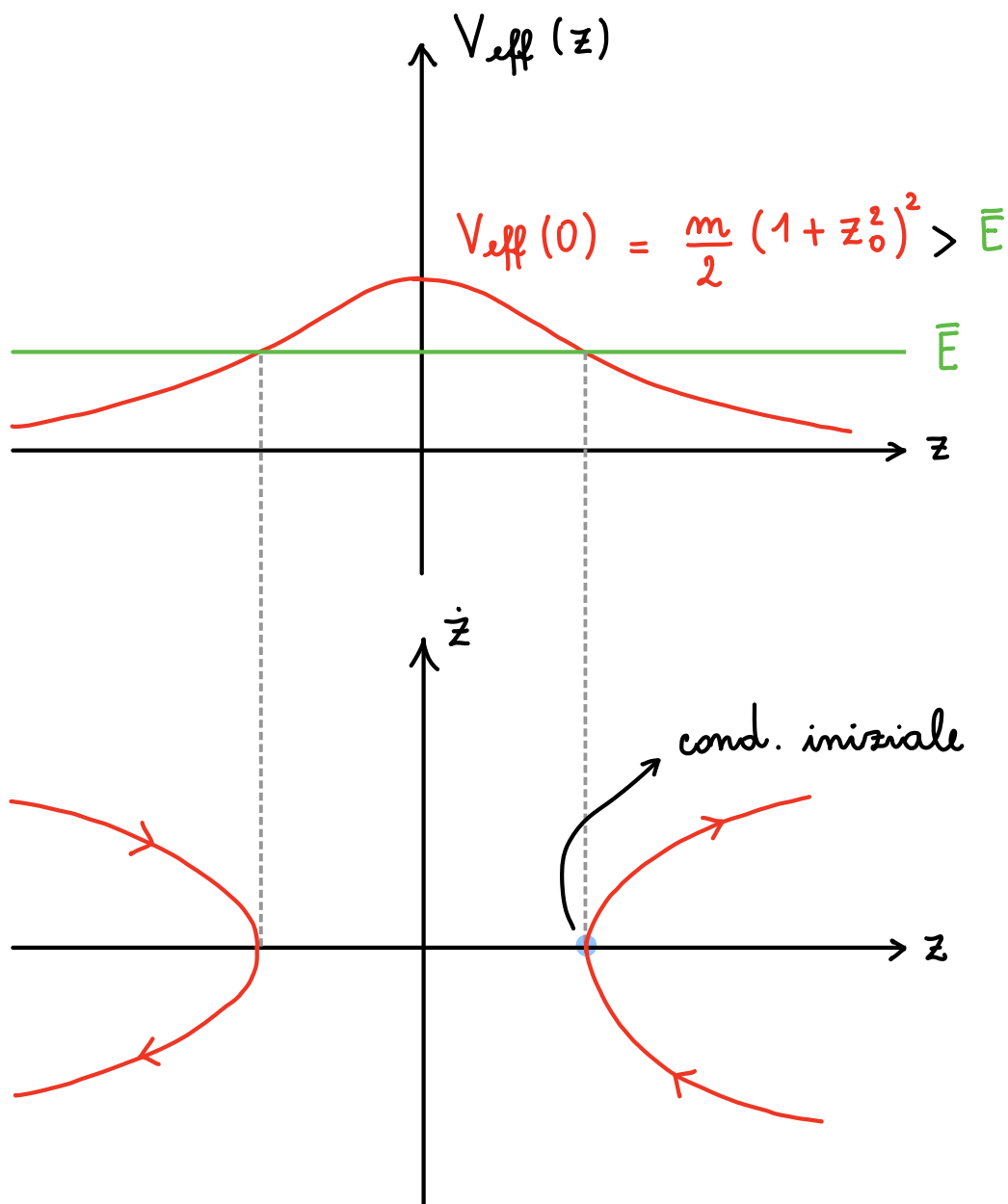
e calcoliamone l'espressione in funzione delle c.i.

$$c = m(1 + z_0^2) \quad (\dot{\theta}(0) = 1)$$

$$\bar{E} = \frac{m^2 (1 + z_0^2)^2}{2m (1 + z_0^2)} = \frac{m}{2} (1 + z_0^2) > 0$$

Introduciamo la funzione $V_{\text{eff}}(z)$

$$V_{\text{eff}}(z) = \frac{c^2}{2m (1 + z^2)} = \frac{m}{2} \frac{(1 + z_0^2)^2}{1 + z^2}$$



Si conclude che non esistono soluzioni tali che $z(t) \rightarrow -\infty$ per $t \rightarrow +\infty$.