

Esercizio

Consideriamo l'hamiltoniana

$$H(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2} (I_1^2 + I_2^2) -$$

$$\varepsilon [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

dove $(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$

i) Completare le relazioni

$$\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$$

ad una trasformazione canonica

$$(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) \longrightarrow (J_1, J_2, \psi_1, \psi_2)$$

e scrivere il sistema hamiltoniano nelle nuove variabili

Sol.

$$\dot{I}_1 = \frac{\partial}{\partial \varphi_1} [\varepsilon \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \varepsilon \cos(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$= -\varepsilon \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\dot{I}_2 = \varepsilon \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\dot{\varphi}_1 = I_1$$

$$\dot{\varphi}_2 = I_2$$

Chiamo una funzione generatrice $S(\varphi, J)$

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T, \quad \jmath = (\jmath_1, \jmath_2)^T$$

$$\psi_1 = \frac{\partial S}{\partial \jmath_1} = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\psi_2 = \frac{\partial S}{\partial \jmath_2} = \varphi_1 - \varphi_2$$

poniamo $S(\varphi, \jmath) = \jmath_1(\varphi_1 + \varphi_2) + \jmath_2(\varphi_1 - \varphi_2)$

e verifichiamo che $\det \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi \partial \jmath} \neq 0$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \varphi \partial \jmath} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \det \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi \partial \jmath} = -2$$

$S(\varphi, \jmath)$ è una buona funzione generatrice

$$I_1 = \frac{\partial S}{\partial \varphi_1} = \jmath_1 + \jmath_2, \quad I_2 = \frac{\partial S}{\partial \varphi_2} = \jmath_1 - \jmath_2$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \jmath_1 \\ \jmath_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \jmath_1 \\ \jmath_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\jmath_1 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2), \quad \jmath_2 = \frac{1}{2}(I_1 - I_2)$$

Riassumendo, la trasformazione canonica creata è

$$\begin{cases} \psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2 \\ \psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{J}_1 = \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \\ \mathcal{J}_2 = \frac{1}{2} (I_1 - I_2) \end{cases}$$

Oppure si poteva completare la relazione puntuale

$$\psi = A \varphi, \quad \psi = (\psi_1, \psi_2)^T, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ponendo

$$\mathcal{J} = A^{-T} I, \quad I = (I_1, I_2)^T$$

La nuova hamiltoniana diventa

$$\tilde{H}(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \psi_1, \psi_2) = \frac{1}{2} [(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2)^2 + (\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2)^2]$$

$$- \varepsilon (\cos \psi_2 - \cos \psi_1) =$$

$$\mathcal{J}_1^2 + \mathcal{J}_2^2 - \varepsilon (\cos \psi_2 - \cos \psi_1)$$

Il corrispondente sistema hamiltoniano diventa

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{J}}_1 = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi_1} = \varepsilon \sin \psi_1 \\ \dot{\mathcal{J}}_2 = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi_2} = - \varepsilon \sin \psi_2 \\ \dot{\psi}_1 = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathcal{J}_1} = 2 \mathcal{J}_1 \\ \dot{\psi}_2 = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathcal{J}_2} = 2 \mathcal{J}_2 \end{cases}$$

ii) Per tale sistema trovare due integrali primi indipendenti e in involuzione

Sol.

Notiamo che

$$\tilde{H}(\gamma_1, \gamma_2, \psi_1, \psi_2) = \tilde{H}_1(\gamma_1, \psi_1) + \tilde{H}_2(\gamma_2, \psi_2)$$

con

$$\tilde{H}_1 = \gamma_1^2 + \varepsilon \cos \psi_1$$

$$\tilde{H}_2 = \gamma_2^2 - \varepsilon \cos \psi_2$$

poiché l'hamiltoniana $\tilde{H}$ è indipendente dal tempo possiamo dire che $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2$ sono due integrali primi per $X_{\tilde{H}}$; infatti

$$\frac{d\tilde{H}_1}{dt} = 2\gamma_1 \dot{\gamma}_1 - \varepsilon(\sin \psi_1) \dot{\psi}_1 = 2\gamma_1 \varepsilon \sin \psi_1 -$$

$$2\gamma_1 \varepsilon \sin \psi_1 = 0$$

$$\frac{d\tilde{H}_2}{dt} = 2\gamma_2 \dot{\gamma}_2 + \varepsilon(\sin \psi_2) \dot{\psi}_2 = 2\gamma_2 (-\varepsilon \sin \psi_2) +$$

$$2\gamma_2 \varepsilon \sin \psi_2 = 0$$

Questi due integrali sono in involuzione dato che

$$\frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial \gamma_i} \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial \psi_i} = 0, \quad i = 1, 2$$

$$\frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial \psi_i} = 0, \quad i = 1, 2$$

quindi

$$\{\tilde{H}_1, \tilde{H}_2\} = 0$$

Per quanto riguarda la loro indipendenza, calcoliamo

$$\frac{\partial(\tilde{H}_1, \tilde{H}_2)}{\partial(\zeta_1, \zeta_2, \psi_1, \psi_2)} = \begin{pmatrix} 2\zeta_1 & 0 & -\varepsilon \sin \psi_1 & 0 \\ 0 & 2\zeta_2 & 0 & \varepsilon \sin \psi_2 \end{pmatrix}$$

$\tilde{H}_1, \tilde{H}_2$ sono in generale indipendenti

non lo sono se

$$\zeta_1 = 0, \quad \psi_1 = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \vee$$

$$\zeta_2 = 0, \quad \psi_2 = k\pi$$

cioè in corrispondenza dei punti di equilibrio dei sistemi hamiltoniani associati a $\tilde{H}_1$ e $\tilde{H}_2$

iii) Mostrare che il sistema hamiltoniano definito da H soddisfa il principio della media per ogni tempo $t \in \mathbb{R}$, dimostrando che I_1, I_2 non possono variare più di $4\sqrt{2\varepsilon}$

Sol.

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \varepsilon \sin \psi_1 \\ \dot{\psi}_1 = 2\zeta_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\zeta}_2 = -\varepsilon \sin \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = 2\zeta_2 \end{cases}$$

dal sistema di sinistra abbiamo

$$\dot{\zeta}_1 = \frac{\dot{\psi}_1}{2} \quad e \quad \ddot{\psi}_1 = 2\varepsilon \sin \psi_1$$

da quello di destra abbiamo

$$\dot{\zeta}_2 = \frac{\dot{\psi}_2}{2} \quad e \quad \ddot{\psi}_2 = -2\varepsilon \sin \psi_2$$

Riconosciamo le equazioni differenziali di un pendolo di pulsazione $\sqrt{2\varepsilon}$; vogliamo scrivere le due hamiltoniane corrispondenti e tracciare il ritratto di fase nel piano (p_i, ψ_i) , $i = 1, 2$, con p_i momento associato a ψ_i

ψ_1 ha

$$K_1(p_1, \psi_1) = \frac{1}{2} p_1^2 + V_1(\psi_1)$$

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{\partial V_1}{\partial \psi_1} = 2\varepsilon \sin \psi_1, & \dot{p}_1 = \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_1 = p_1 \end{cases}$$

dalla prima equazione troviamo

$$V_1(\psi_1) = 2\varepsilon \cos \psi_1$$

Inoltre

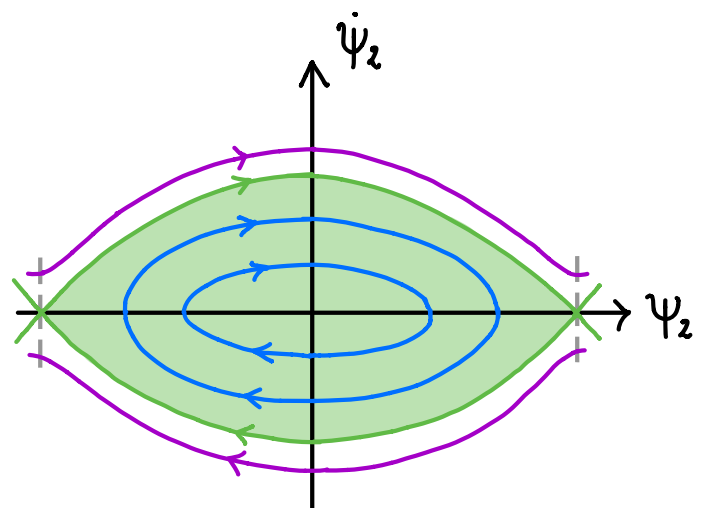
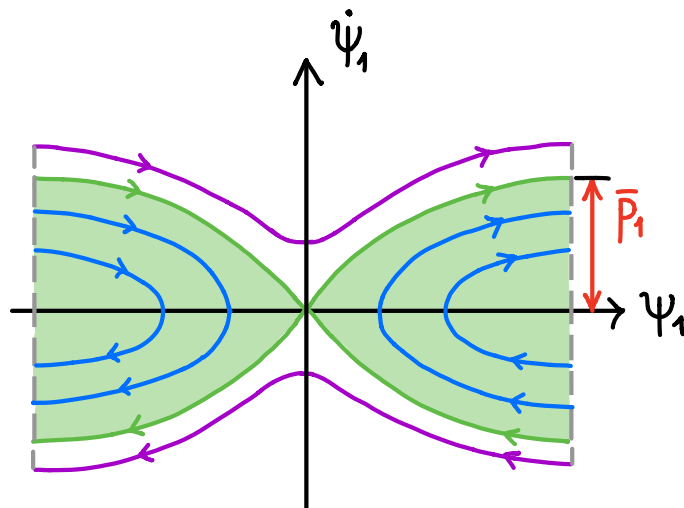
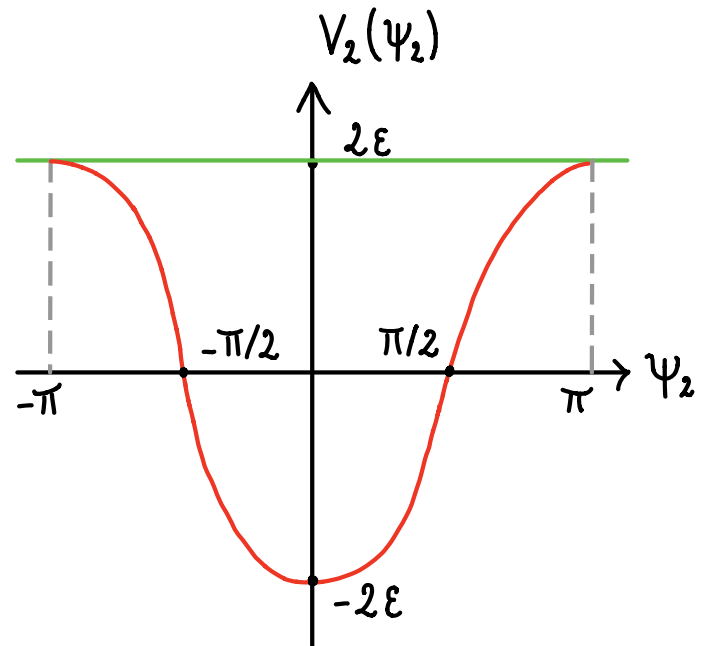
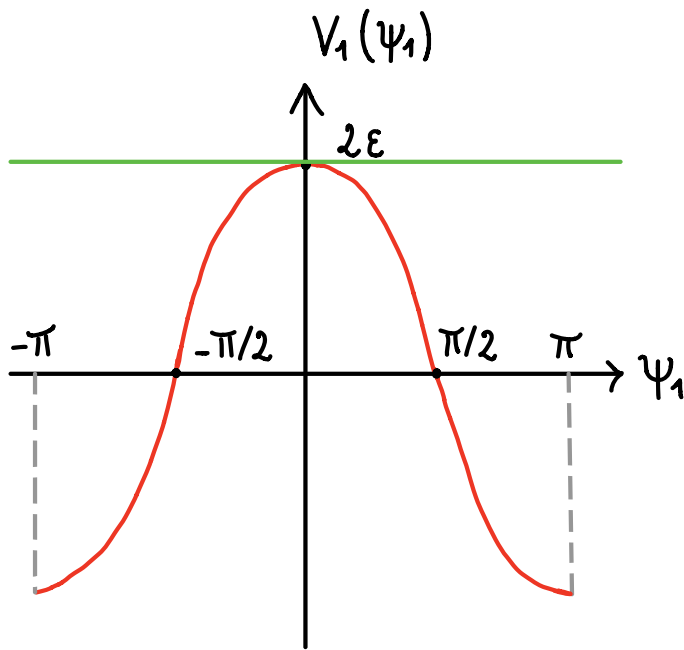
$$K_2(p_2, \psi_2) = \frac{1}{2} p_2^2 + V_2(\psi_2)$$

$$\begin{cases} \dot{p}_2 = -\frac{\partial V_2}{\partial \psi_2} = -2\varepsilon \sin \psi_2, & \dot{p}_2 = \dot{\psi}_2 \\ \dot{\psi}_2 = p_2 \end{cases}$$

e dalla prima equazione troviamo

$$V_2(\psi_2) = -2\varepsilon \cos \psi_2$$

Disegniamo i grafici di $V_1(\psi_1)$, $V_2(\psi_2)$, grazie ai quali tracciamo i ritratti di fase



Poichè entrambi i sistemi hamiltoniani definiscono la dinamica di un pendolo di pulsazione $\sqrt{2\varepsilon}$, la massima variazione di ψ_1 sarà uguale a quella di ψ_2 sia nulla

regione delle librazioni sia nella regione delle rotazioni

Consideriamo allora solo $(\psi_1, \dot{\psi}_1)$

Regione delle librazioni

È chiaro che la massima variazione di ψ_1 è minore di

$$2 \bar{p}_1$$

dove $\bar{p}_1$ è il massimo valore di $\dot{\psi}_1$ per il livello di energia che corrisponde alla separatrice (si veda la figura precedente), che è dato da

$$K_1^* = V_1(0) = 2\varepsilon \cos(0) = 2\varepsilon$$

$$p_1(\psi_1) = \sqrt{2(K_1 - V_1(\psi_1))} = \sqrt{2(K_1 - 2\varepsilon \cos \psi_1)}$$

$$p_1^*(\psi_1) = \sqrt{2(K_1^* - 2\varepsilon \cos \psi_1)} = \sqrt{4\varepsilon(1 - \cos \psi_1)}$$

Si vede che $p_1^*(\psi_1)$ assume il suo valore massimo per

$$\psi_1 = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \text{ allora}$$

$$\bar{p}_1 = p_1^*(\pi) = \sqrt{4\varepsilon(1 - (-1))} = 2\sqrt{2\varepsilon}$$

La massima variazione di ψ_1 e di ψ_2 nella regione delle librazioni è minore di $4\sqrt{2\varepsilon}$

Vediamo come ψ_1, ψ_2 sono legate a $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ e poi come queste ultime a I_1, I_2

abbiamo

$$p_1 = \dot{\psi}_1 = 2\dot{\gamma}_1$$

$$p_2 = \dot{\psi}_2 = 2\dot{\gamma}_2$$

da cui si vede che la massima variazione di γ_1, γ_2 è minore di $2\sqrt{2\varepsilon}$

Infine, tenendo conto che

$$I_1 = \gamma_1 + \gamma_2$$

$$I_2 = \gamma_1 - \gamma_2$$

concludiamo quanto segue

$$|I_1(t) - I_1(0)| < 4\sqrt{2\varepsilon}$$

$$|I_2(t) - I_2(0)| < 4\sqrt{2\varepsilon}$$

Regione delle rotazioni

Fissiamo un valore dell'energia maggiore di 2ε

$$K_1^* = 2\varepsilon + \delta, \quad \delta > 0$$

$$\begin{aligned} p_1^*(\psi_1) &= \sqrt{2(K_1^* - V_1(\psi_1))} = \sqrt{2(2\varepsilon + \delta - 2\varepsilon \cos \psi_1)} \\ &= \sqrt{4\varepsilon(1 - \cos \psi_1) + 2\delta} \end{aligned}$$

per δ fissato, il valore massimo assunto da $p_1^*(\psi_1)$

è ottenuto per $\psi_1 = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ed è

$$p_1^*(\pi) = \sqrt{8\varepsilon + 2\delta}$$

mentre il valore minimo di $p_1^*(\psi_1)$ si ha per

$$\psi_1 = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{ed è}$$

$$p_1^*(0) = \sqrt{2\mathcal{E}}$$

Allora per $\mathcal{E}$ fissato la variazione massima di $p_1^*(\psi_1)$ è data da

$$(\Delta p_1^*)_{\max} = \sqrt{8\mathcal{E} + 2\mathcal{E}} - \sqrt{2\mathcal{E}}$$

Introduciamo $\phi(\mathcal{E}) = \sqrt{8\mathcal{E} + 2\mathcal{E}} - \sqrt{2\mathcal{E}}$ e notiamo che

$$\phi'(\mathcal{E}) = \frac{1}{\sqrt{8\mathcal{E} + 2\mathcal{E}}} - \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{E}}} < 0 \quad \text{per } \mathcal{E} \geq 0$$

perciò il valore massimo assunto da $\phi(\mathcal{E})$ è

$$\phi(0) = \sqrt{8\mathcal{E}} = 2\sqrt{2\mathcal{E}}$$

La variazione massima di ψ_1 e di ψ_2 nella regione delle rotazioni è minore di $2\sqrt{2\mathcal{E}}$. Date le relazioni tra ψ_1, ψ_2 e I_1, I_2 si può concludere che

$$|I_1(t) - I_1(0)| < 2\sqrt{2\mathcal{E}}$$

$$|I_2(t) - I_2(0)| < 2\sqrt{2\mathcal{E}}$$

Esercizio

Si consideri la seguente funzione di Hamilton espressa in variabili azione - angolo

$$H_\varepsilon(I, \varphi) = \frac{1}{2} I_1^2 - I_2 - \varepsilon \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

con

$$I = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{variabili azione})$$

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2 \quad (\text{variabili angolo})$$

i) Usare il metodo di Lie per trovare una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I, \varphi) \xrightarrow{\mathcal{C}_\varepsilon^{-1}} (\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$

tale che $\tilde{H}_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \mathcal{C}_\varepsilon$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ε ; scrivere inoltre la forma normale non risonante fino al secondo ordine in ε incluso

Sol.

Introduciamo la funzione hamiltoniana generatrice $\chi(I, \varphi)$ e consideriamo il flusso Φ_χ^ε . Si ha

$$\mathcal{C}_\varepsilon(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) = \Phi_\chi^\varepsilon(\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$

Scriviamo H_ε nella forma

$$H_\varepsilon(I, \varphi) = h(I) + \varepsilon f(\varphi)$$

con

$$h(I) = \frac{1}{2} I_1^2 - I_2, \quad f(\varphi) = -\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Calcoliamo

$$h \circ \Phi_\chi^\varepsilon = h + \varepsilon \{h, \chi\} + \frac{\varepsilon^2}{2} \{\{h, \chi\}, \chi\} + O(\varepsilon^3)$$

$$\phi \circ \Phi_x^\varepsilon = \phi + \varepsilon \{ \phi, \chi \} + O(\varepsilon^2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\varepsilon(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) &= H_\varepsilon \circ \Phi_x^\varepsilon = h + \varepsilon (\{h, \chi\} + \phi) \\ &+ \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} \{ \{h, \chi\}, \chi \} + \{ \phi, \chi \} \right) + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

Cerchiamo χ in modo che

$$\{h, \chi\}(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) + \phi(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) = g(\tilde{I})$$

$$g(\tilde{I}) = \langle \phi \rangle_{\varphi}(\tilde{I})$$

$$\{h, \chi\} = -\frac{\partial h}{\partial I} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = -\omega \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \varphi}$$

$$\text{con } \omega = \frac{\partial h}{\partial I} = (I_1, -1)$$

NOTA. Poiché la dipendenza di h dalle azioni non è lineare (caso non isocrono), le frequenze dipendono in generale dalle variabili azione

Si procede ora scrivendo lo sviluppo in serie di Fourier di ϕ , che in questo caso è immediato

$$\phi(\varphi) = -\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -\frac{1}{2} \left(e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} \right)$$

$$\phi(\varphi) = \sum_{k \in K} \hat{\phi}_k e^{i k \cdot \varphi}$$

Si vede subito che la media sugli angoli di φ è nulla, inoltre

$$K = \{(1, -1), (-1, 1)\}$$

e i coefficienti $\hat{\varphi}_{(1, -1)}$, $\hat{\varphi}_{(-1, 1)}$ sono

$$\hat{\varphi}_{(1, -1)} = -\frac{1}{2}, \quad \hat{\varphi}_{(-1, 1)} = -\frac{1}{2}$$

Notiamo che la condizione di non risonanza è in generale soddisfatta

$$\omega \cdot k \neq 0 \quad \text{per } k \in K$$

$$(I_1, -1) \cdot (1, -1) = I_1 + 1 \neq 0$$

$$(I_1, -1) \cdot (-1, 1) = -(I_1 + 1) \neq 0$$

$$I_1 \neq -1$$

Siamo pronti per determinare la funzione χ
assumiamo anche per χ uno sviluppo in serie di Fourier

$$\chi(I, \varphi) = \sum_{k \in K} \hat{\chi}_k(I) e^{i k \cdot \varphi}$$

in cui

$$\hat{\chi}_k = \frac{\hat{\varphi}_k}{i \omega \cdot k}$$

$$\hat{\chi}_{(1, -1)} = \frac{\hat{\varphi}_{(1, -1)}}{i (1, -1) \cdot (I_1, -1)} = \frac{\hat{\varphi}_{(1, -1)}}{i (I_1 + 1)} = -\frac{1}{2i (1 + I_1)}$$

$$\hat{\chi}_{(-1,1)} = \frac{\hat{\phi}_{(-1,1)}}{i(-1,1) \cdot (I_1, -1)} = - \frac{\hat{\phi}_{(-1,1)}}{i(I_1+1)} = \frac{1}{2i(1+I_1)}$$

Allora

$$\chi(I, \varphi) = \hat{\chi}_{(1,-1)} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + \hat{\chi}_{(-1,1)} e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\begin{aligned} \chi(I, \varphi) &= -\frac{1}{2i(1+I_1)} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + \\ &\quad \frac{1}{2i(1+I_1)} e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \\ &\quad -\frac{1}{1+I_1} \left(\frac{e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} - e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)}}{2i} \right) \end{aligned}$$

$$\chi(I, \varphi) = -\frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{1+I_1}$$

Possiamo scrivere la forma normale non risonante
fino al secondo ordine in ε

$$\tilde{H}_\varepsilon(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) = \frac{1}{2} \tilde{I}_1^2 - \tilde{I}_2 +$$

$$\varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} \{ \{ h, \chi \}, \chi \}(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) + \{ \phi, \chi \}(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) \right) + O(\varepsilon^3)$$

dall'equazione omologica, essendo $g=0$, si ha

$$\{h, \chi\} = -\phi$$

da cui

$$\frac{1}{2} \{ \{h, \chi\}, \chi \} (\tilde{I}, \tilde{\varphi}) + \{f, \chi\} (\tilde{I}, \tilde{\varphi}) =$$

$$\frac{1}{2} \{ -f, \chi \} (\tilde{I}, \tilde{\varphi}) + \{f, \chi\} (\tilde{I}, \tilde{\varphi}) =$$

$$\frac{1}{2} \{f, \chi\} (\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$

Calcoliamo allora

$$\{f, \chi\} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial I} = (\sin(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$- \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \cdot \left(\frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{(1 + I_1)^2}, 0 \right)$$

$$= \frac{\sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{(1 + I_1)^2} \quad (f = -\cos(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Infine, la forma normale non risonante è data da

$$\tilde{H}_\varepsilon(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) = \frac{1}{2} \tilde{I}_1^2 - \tilde{I}_2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\sin^2(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2)}{(1 + \tilde{I}_1)^2} + O(\varepsilon^3)$$

la trasformazione canonica vicina all'identità è

$$I_j = \tilde{I}_j + \varepsilon \{I_j, \chi\}(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) +$$

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \{ \{I_j, \chi\}, \chi \}(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) + O(\varepsilon^3),$$

$$j = 1, 2$$

$$\{I_j, \chi\} = - \frac{\partial \chi}{\partial \varphi_j}$$

$$\{I_1, \chi\} = -\frac{\partial \chi}{\partial \varphi_1} = \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{1 + I_1}$$

$$\{I_2, \chi\} = -\frac{\partial \chi}{\partial \varphi_2} = -\frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{1 + I_1}$$

$$\begin{aligned} \{\{I_1, \chi\}, \chi\} &= -\frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{1 + I_1} \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{(1 + I_1)^2} \\ &\quad + \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{(1 + I_1)^2} \left(-\frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{(1 + I_1)} \right) \\ &= -\frac{1}{(1 + I_1)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\{I_2, \chi\}, \chi\} &= \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{1 + I_1} \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{(1 + I_1)^2} \\ &\quad - \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{(1 + I_1)^2} \left(-\frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{(1 + I_1)} \right) \\ &= \frac{1}{(1 + I_1)^3} \end{aligned}$$

$$I_1 = \tilde{I}_1 + \varepsilon \frac{\cos(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2)}{1 + \tilde{I}_1} - \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{1}{(1 + \tilde{I}_1)^3} + O(\varepsilon^3)$$

$$I_2 = \tilde{I}_2 - \varepsilon \frac{\cos(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2)}{1 + \tilde{I}_1} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{1}{(1 + \tilde{I}_1)^3} + O(\varepsilon^3)$$

passando alle variabili angolo

$$\varphi_j = \tilde{\varphi}_j + \varepsilon \{\varphi_j, \chi\}(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) +$$

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \{ \{ \varphi_j, \chi \}, \chi \} (\tilde{I}, \tilde{\varphi}) + O(\varepsilon^3),$$

$$j = 1, 2$$

$$\{ \varphi_j, \chi \} = \frac{\partial \chi}{\partial I_j}$$

$$\{ \varphi_1, \chi \} = \frac{\partial \chi}{\partial I_1} = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{(1 + I_1)^2}$$

$$\{ \varphi_2, \chi \} = 0$$

$$\begin{aligned} \{ \{ \varphi_1, \chi \}, \chi \} &= \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{(1 + I_1)^2} \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{(1 + I_1)^2} \\ &\quad + \frac{2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{(1 + I_1)^3} \left(- \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{1 + I_1} \right) \\ &= - \frac{\sin(2(\varphi_1 - \varphi_2))}{2(1 + I_1)^4} \end{aligned}$$

$$\{ \{ \varphi_2, \chi \}, \chi \} = 0$$

$$\varphi_1 = \tilde{\varphi}_1 + \varepsilon \frac{\sin(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2)}{(1 + \tilde{I}_1)^2} - \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{\sin(2(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2))}{(1 + \tilde{I}_1)^4} + O(\varepsilon^3)$$

$$\varphi_2 = \tilde{\varphi}_2$$

Vediamo ora come risulta la forma normale non risonante usando il metodo della funzione generatrice

Partiamo da

$$S(\varphi, \tilde{I}) = \varphi \cdot \tilde{I} + \varepsilon W(\varphi, \tilde{I})$$

con

$$W(\varphi, \tilde{I}) = \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{1 + \tilde{I}_1} \quad (= -\chi)$$

Poi

$$I = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \tilde{I} + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial \varphi}(\varphi, \tilde{I})$$

$$\tilde{\varphi} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{I}} = \varphi + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial \tilde{I}}(\varphi, \tilde{I})$$

Allora

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\varepsilon(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) &= \frac{1}{2} \left(\tilde{I}_1 + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial \varphi_1}(\varphi, \tilde{I}) \right)^2 - \\ &\quad \left(\tilde{I}_2 + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial \varphi_2}(\varphi, \tilde{I}) \right) - \varepsilon \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}$$

$$\text{con } \varphi = \varphi(\tilde{\varphi}, \tilde{I})$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\varepsilon(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) &= \frac{1}{2} \tilde{I}_1^2 - \tilde{I}_2 + \varepsilon \left(\tilde{I}_1 \frac{\partial W}{\partial \varphi_1}(\varphi, \tilde{I}) - \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial W}{\partial \varphi_2}(\varphi, \tilde{I}) - \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi_1}(\varphi, \tilde{I}) \right)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi_1} = \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{1 + \tilde{I}_1}, \quad \frac{\partial W}{\partial \varphi_2} = -\frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{1 + \tilde{I}_1}$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\varepsilon(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) &= \frac{1}{2} \tilde{I}_1^2 - \tilde{I}_2 + \varepsilon \left(\tilde{I}_1 \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{1 + \tilde{I}_1} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{1 + \tilde{I}_1} - \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi_1}(\varphi, \tilde{I}) \right)^2 \end{aligned}$$

questo termine è uguale a zero

$$\tilde{H}_\varepsilon(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) = \frac{1}{2} \tilde{I}_1^2 - \tilde{I}_2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\cos^2(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2)}{(1 + \tilde{I}_1)^2} + O(\varepsilon^3)$$

che è diversa da quella trovata con il metodo di Lie

$$\tilde{H}_\varepsilon(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) = \frac{1}{2} \tilde{I}_1^2 - \tilde{I}_2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\sin^2(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2)}{(1 + \tilde{I}_1)^2} + O(\varepsilon^3)$$

inoltre abbiamo

$$I_1 = \tilde{I}_1 + \varepsilon \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{1 + \tilde{I}_1} - \frac{\sin(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2)}{(1 + \tilde{I}_1)^2}$$

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2) - \sin(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2) \left(-\varepsilon \frac{\partial W}{\partial \tilde{I}_1}(\tilde{\varphi}, \tilde{I}) \right) + O(\varepsilon^2)$$

$$I_1 = \tilde{I}_1 + \varepsilon \frac{\cos(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2)}{1 + \tilde{I}_1} - \varepsilon^2 \frac{\sin^2(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2)}{(1 + \tilde{I}_1)^3} + O(\varepsilon^3)$$

$$I_2 = \tilde{I}_2 - \varepsilon \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{1 + \tilde{I}_1}$$

$$I_2 = \tilde{I}_2 - \varepsilon \frac{\cos(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2)}{1 + \tilde{I}_1} + \varepsilon^2 \frac{\sin^2(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2)}{(1 + \tilde{I}_1)^3} + O(\varepsilon^3)$$

e per le variabili angolo

$$\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1 - \varepsilon \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{(1 + \tilde{I}_1)^2} - \frac{\sin(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2)}{(1 + \tilde{I}_1)^2}$$

$$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2) + \cos(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2) \left(-\varepsilon \frac{\partial W}{\partial \tilde{I}_1}(\tilde{\varphi}, \tilde{I}) \right) + O(\varepsilon^2)$$

$$\psi_1 = \tilde{\psi}_1 + \varepsilon \frac{\sin(\tilde{\psi}_1 - \tilde{\psi}_2)}{(1 + \tilde{I}_1)^2} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\sin(2(\tilde{\psi}_1 - \tilde{\psi}_2))}{(1 + \tilde{I}_1)^4} + O(\varepsilon^3)$$

$$\psi_2 = \tilde{\psi}_2$$

Notiamo che le relazioni appena scritte per I_1 , I_2 , ψ_1 , ψ_2 sono uguali a quelle scritte con il metodo di Lie solo al primo ordine in ε

Tali relazioni, al primo ordine in ε , si possono invertire ottenendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{I}_1 = I_1 - \varepsilon \frac{\cos(\psi_1 - \psi_2)}{1 + I_1} \\ \tilde{I}_2 = I_2 + \varepsilon \frac{\cos(\psi_1 - \psi_2)}{1 + I_1} \\ \tilde{\psi}_1 = \psi_1 - \varepsilon \frac{\sin(\psi_1 - \psi_2)}{(1 + I_1)^2} \\ \tilde{\psi}_2 = \psi_2 \end{array} \right.$$

ii) Mostrare che I_1 , I_2 compiono oscillazioni di ampiezza di ordine $\sqrt{\varepsilon}$ attorno a dei valori costanti

Sol.

Partiamo dal sistema hamiltoniano associato ad H_ε

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = -\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \varphi_1} = -\varepsilon \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \dot{I}_2 = -\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \varphi_2} = \varepsilon \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \dot{\varphi}_1 = \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial I_1} = I_1 \\ \dot{\varphi}_2 = \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial I_2} = -1 \end{cases}$$

L'idea è quella di ricondurci all'equazione di un oscillatore armonico, magari dopo aver applicato una opportuna trasformazione canonica

Notiamo che

$$J_1 = I_1 + I_2$$

è un integrale primo per X_{H_ε}

Scriviamo una trasformazione che riguardi i soli momenti

$$\begin{cases} J_1 = I_1 + I_2 \\ J_2 = I_2 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{= A} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

e la completiamo ad una trasformazione canonica

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = A^{-T} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \theta_1 = \varphi_1 \\ \theta_2 = \varphi_2 - \varphi_1 \end{cases}$$

Inoltre abbiamo

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 \\ \mathcal{J}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} I_1 = \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2 \\ I_2 = \mathcal{J}_2 \end{cases}$$

La nuova hamiltoniana diventa

$$K_\varepsilon(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}(\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2)^2 - \mathcal{J}_2 - \varepsilon \cos \theta_2$$

e

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{J}}_1 = 0 \\ \dot{\mathcal{J}}_2 = -\varepsilon \sin \theta_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\theta}_1 = \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2 \\ \dot{\theta}_2 = -(\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2) - 1 \\ \quad = \mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_1 - 1 \end{cases}$$

si vede che $\dot{\mathcal{J}}_2 = \ddot{\theta}_2$ e

$$\ddot{\theta}_2 = -\varepsilon \sin \theta_2$$

che è l'equazione di un pendolo di pulsazione $\sqrt{\varepsilon}$

Sappiamo allora che θ_2 compie oscillazioni di ampiezza

di ordine $\sqrt{\varepsilon}$

poiché $\mathcal{J}_2 = \dot{\theta}_2 + c$, con $c = 1 + \mathcal{J}_2$ costante, e

$$I_1 = \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2, \quad I_2 = \mathcal{J}_2$$

si può concludere che I_1, I_2 compiono oscillazioni

di ampiezza di ordine $\sqrt{\varepsilon}$ attorno a dei valori costanti