

Esercizio

Determinare le traiettorie del moto geodetico di un punto materiale di massa m sulla superficie

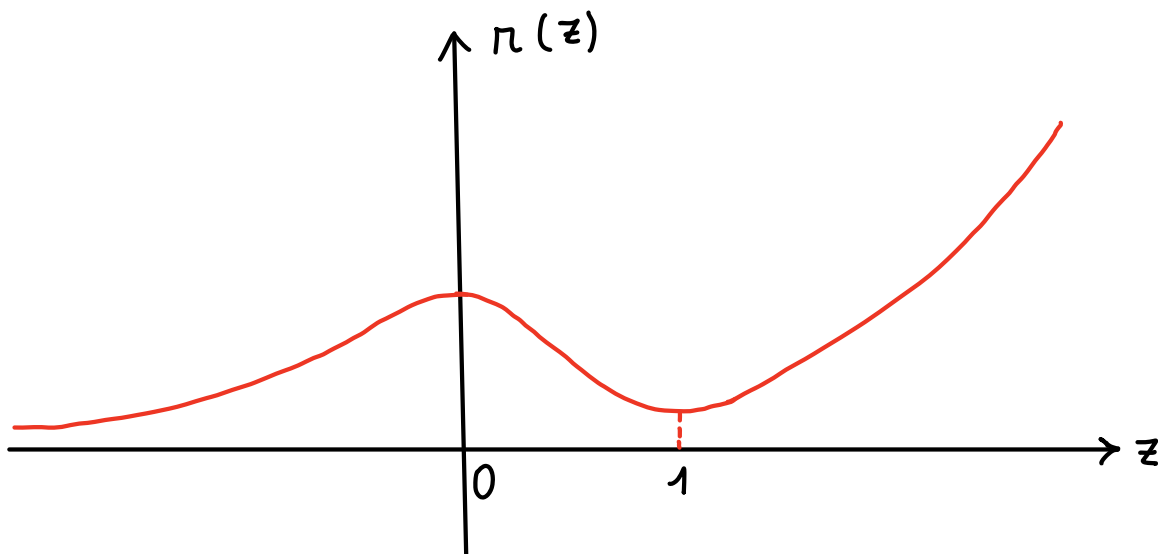
$$\begin{cases} x = r(z) \cos \varphi \\ y = r(z) \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}, \varphi \in S^1$$

con $r(z) = (z^2 - 3z + 3) e^z$

Sol.

$$\begin{aligned} r'(z) &= (2z - 3) e^z + (z^2 - 3z + 3) e^z \\ &= e^z (z^2 - z) \end{aligned}$$

$$r'(z) = 0 \quad \text{se } z = 0 \text{ e } z = 1$$



$$E = T + V \quad \text{energia}$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = r'(z) \dot{z} \cos \varphi + r(z) (-\sin \varphi) \dot{\varphi} \\ \dot{y} = r'(z) \dot{z} \sin \varphi + r(z) (\cos \varphi) \dot{\varphi} \\ \dot{z} = \dot{z} \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{z}^2 [1 + (r'(z))^2] + r^2(z) \dot{\varphi}^2)$$

$$V = 0$$

$$E = T(z, \dot{z}, \dot{\varphi}) \quad \text{non dipende da } \varphi$$

La variabile φ si dice ciclica.

Introduciamo la lagrangiana $L = T - V$,

si ha che anche L non dipende da φ .

Il momento associato a φ , definito da

$$p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2(z) \dot{\varphi}$$

è un integrale primo del moto.

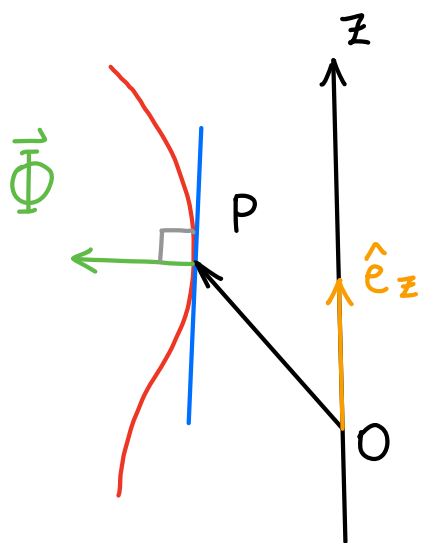
Infatti, scriviamo l'equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

Poiché $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ segue che

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0 \rightarrow p_{\varphi} = c \text{ costante.}$$

La quantità p_{φ} è la componente del momento angolare lungo l'asse Oz . Verifichiamo che p_{φ} si conserva usando la 2^a eq. cardinale della dinamica (assumiamo che i vincoli siano ideali)



$$\vec{M}_O = m (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \times \vec{v}_P$$

$$\dot{\vec{M}}_O = \vec{N}_O - m \cancel{\vec{v}_O} \times \vec{v}_P \quad (\vec{v}_O = \vec{0})$$

$$\vec{N}_O = (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \times \vec{\Phi}$$

la direzione di $\vec{N}_O$ è
perpendicolare a Oz

Quindi $\dot{\vec{M}}_O \cdot \hat{e}_z = \vec{N}_O \cdot \hat{e}_z = 0$, da cui

$$\frac{d}{dt} (\vec{M}_0 \cdot \hat{e}_z) = 0$$

$M_z = \vec{M}_0 \cdot \hat{e}_z$ è un integrale primo, la sua espressione è data da

$$M_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = m r^2(z) \dot{\psi}$$

↑
abbiamo usato

$$P - O = x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2 + z \hat{e}_3$$

$$\vec{v}_P = \dot{x} \hat{e}_1 + \dot{y} \hat{e}_2 + \dot{z} \hat{e}_3$$

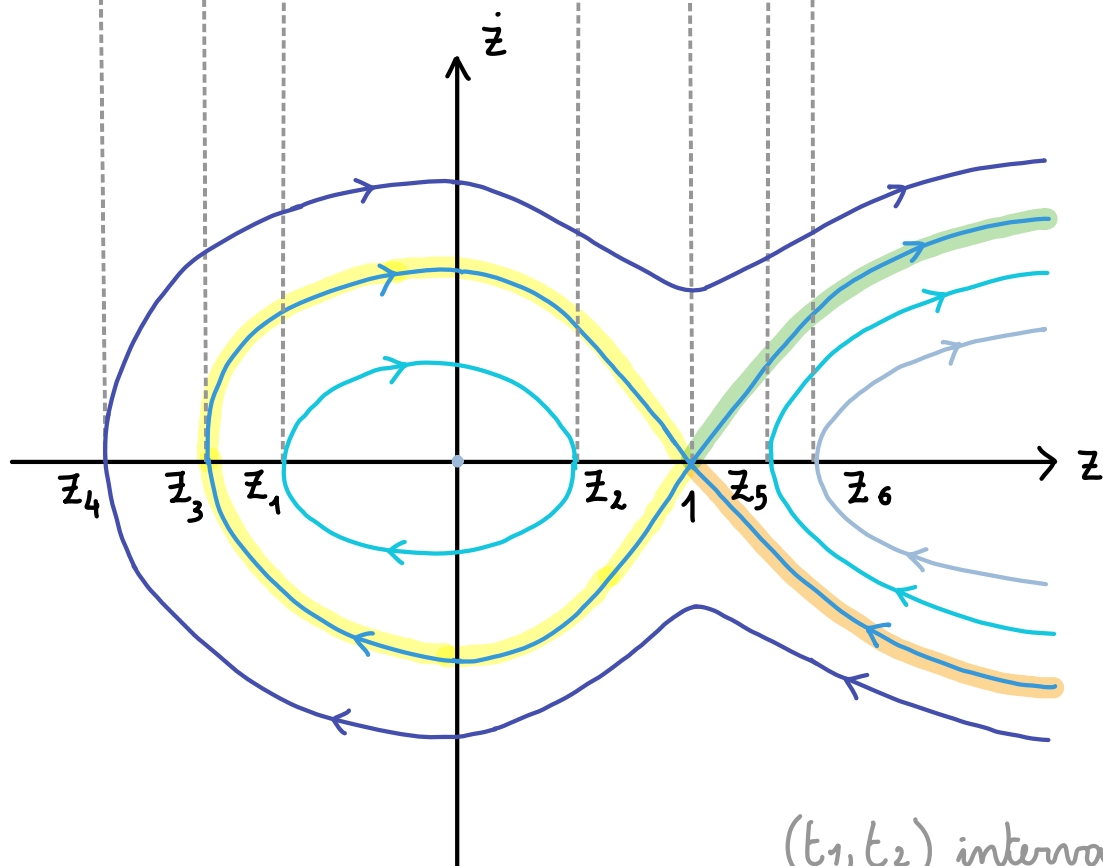
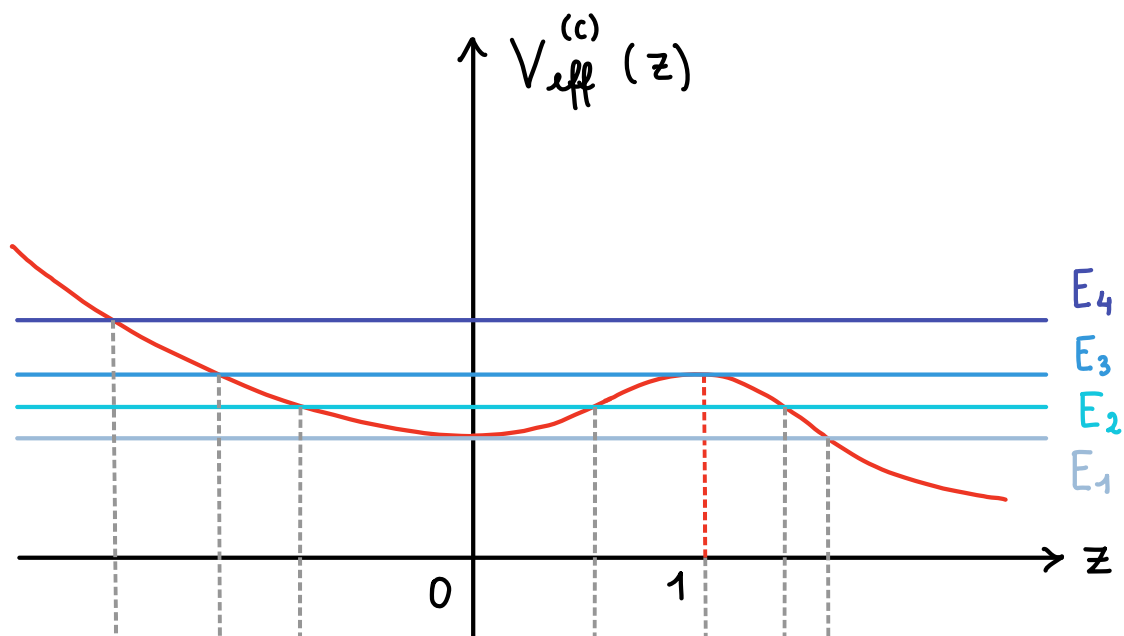
Tornando all'esercizio

$$P_\psi = c = m r^2(z) \dot{\psi} \quad \rightarrow \quad \dot{\psi} = \frac{c}{m r^2(z)}$$

$$\begin{aligned} E(z, \dot{z}) &= \frac{m}{2} [1 + (r'(z))^2] \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m r^2(z) \frac{c^2}{m^2 r^4(z)} = \\ &= \frac{m}{2} [1 + (r'(z))^2] \dot{z}^2 + \frac{c^2}{2 m r^2(z)} \end{aligned}$$

Introduciamo l'energia potenziale efficace

$$V_{\text{eff}}^{(c)}(z) = \frac{c^2}{2 m r^2(z)} \quad \text{e disegniamone il grafico}$$



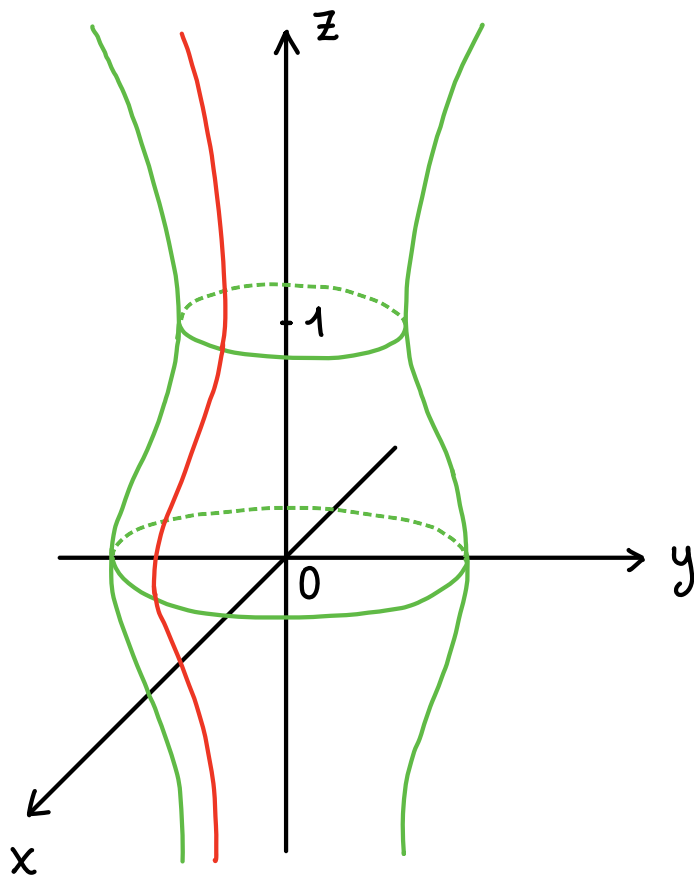
(t_1, t_2) intervallo
massimale di esistenza
della soluzione

Iniziamo dal caso $c = 0$

$$p_\varphi = C = m r^2 \dot{\varphi} \rightarrow \dot{\varphi} = 0 \rightarrow \varphi \text{ è costante}$$

se $\dot{z}(0) \neq 0$ la traiettoria è illimitata e corrisponde a
un meridiano; $|z| \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow t_1, t_2$

le traiettorie sono disegnate in rosso



$$E(z, \dot{z}) =$$

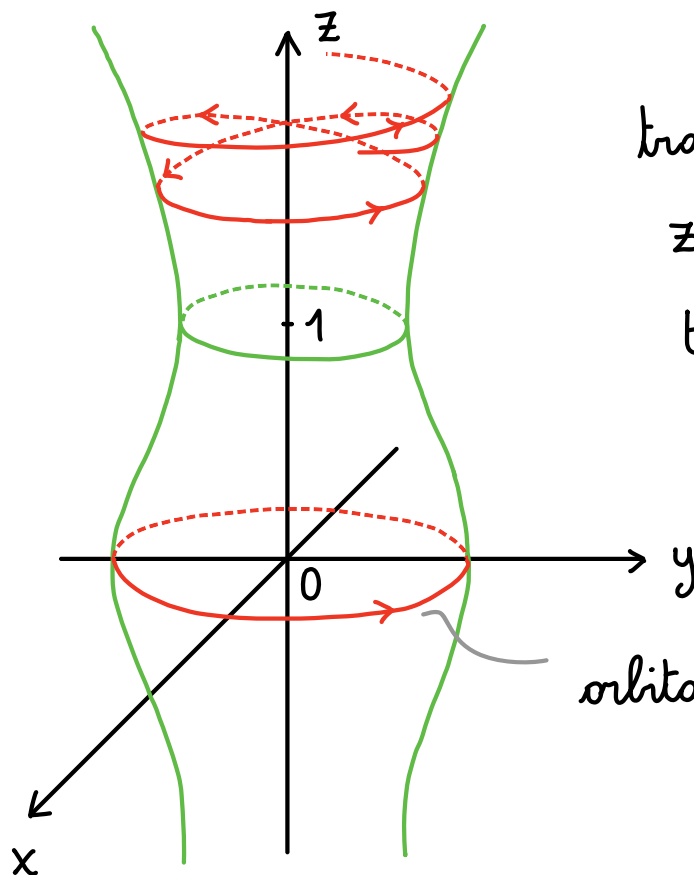
$$\frac{1}{2} m [1 + (r'(z))^2] \dot{z}^2$$

Se $\dot{z}(0) = 0$ allora

$$\dot{z}(t) = 0 \quad \forall t \text{ e}$$

abbiamo un punto di equilibrio

Trattiamo ora il caso $c \neq 0$, $E = E_1$



traiettoria illimitata

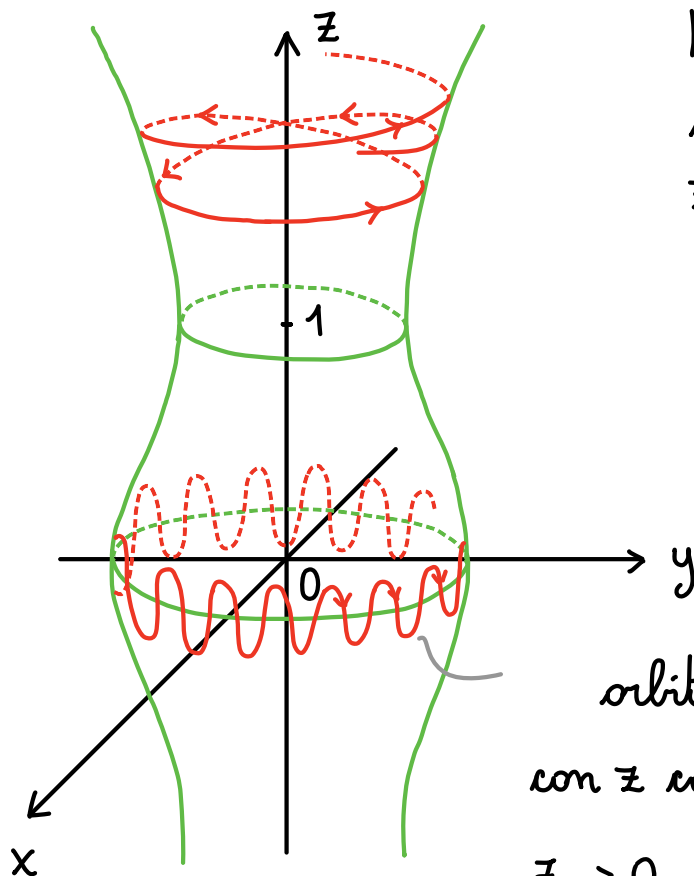
$$z \rightarrow +\infty \text{ per}$$

$$t \rightarrow t_1, t_2$$

$$z \geq z_0$$

orbita periodica ($z = 0$)

Caso $E = E_2$



traiettoria
illimitata

$z \rightarrow +\infty$ per

$t \rightarrow t_1, t_2$

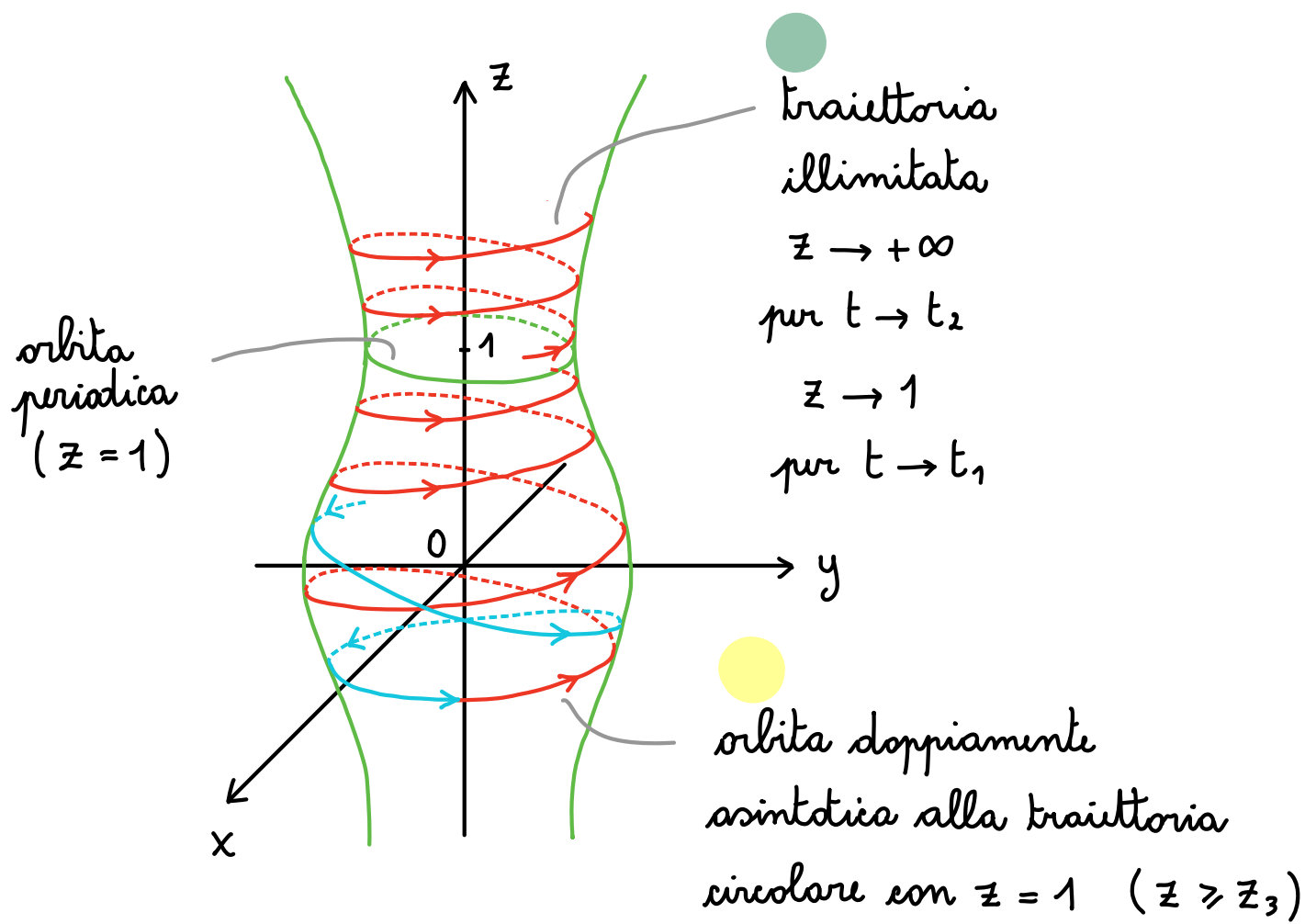
$z \geq z_5$

orbita quasi periodica
con z compreso tra $z_1 < 0$ e
 $z_2 > 0$

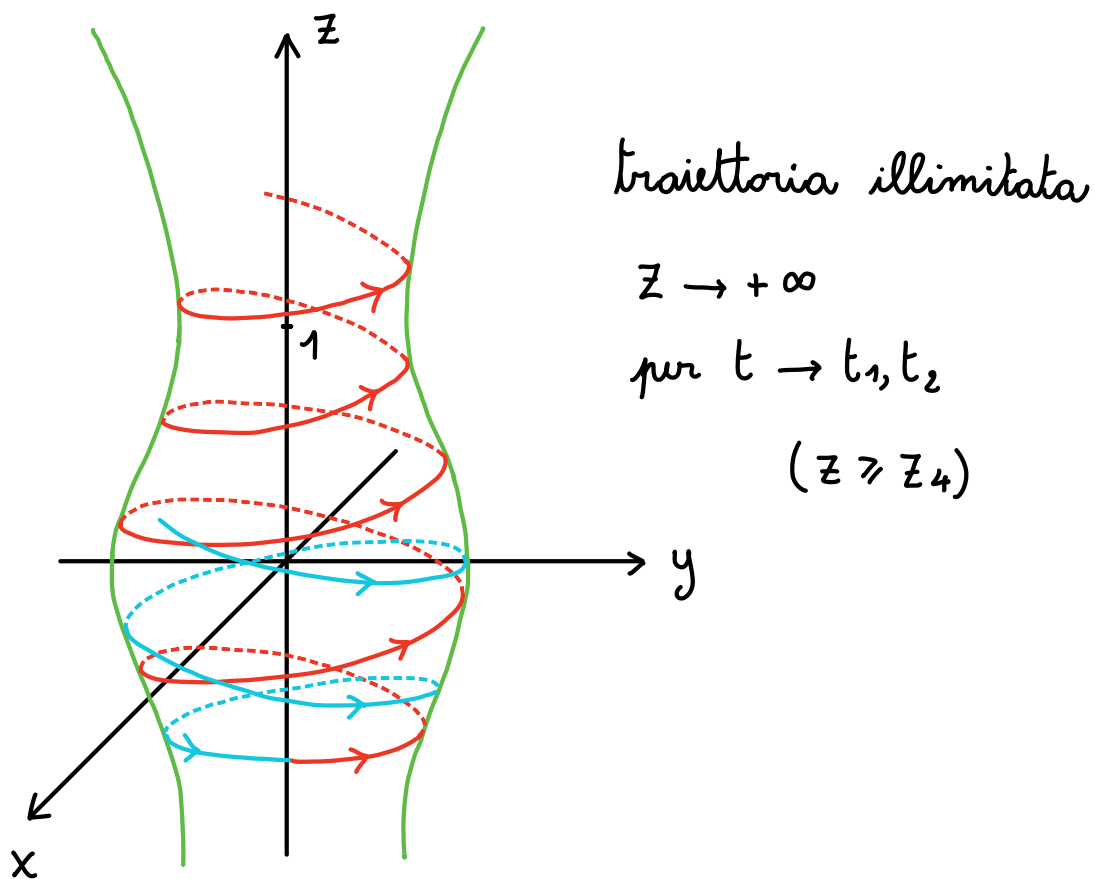
è un'orbita periodica se il rapporto tra i
periodi di φ e di z è un numero razionale

Il caso più complicato è $E = E_3$

Ci sono tre tipi di traiettorie che si hanno per
condizioni iniziali $(z, \dot{z})$ appartenenti alle
componenti dell'insieme di livello indicate in
giallo, arancione e verde nel ritratto di fase
precedente. Inoltre si ha un'orbita periodica.



$$E = E_4$$



VARIABILI CICLICHE E LAGRANGIANA RIDOTTA

Per semplicità consideriamo sistemi a due gradi di libertà, rappresentati ad esempio da φ e z come nell'esercizio precedente.

Gia φ una variabile ciclica, allora il momento associato p_φ è un integrale primo. Poniamo $p_\varphi = c$ e definiamo la lagrangiana ridotta come segue

$$L_R^{(c)}(z, \dot{z}) = \left(L(z, \dot{\varphi}, \dot{z}) - \dot{\varphi} c \right) \Big|_{\dot{\varphi} = \Phi(z, \dot{z}, c)}.$$

Nell'esercizio precedente si aveva $\dot{\varphi} = \frac{c}{m r^2(z)}$.

Si può dimostrare che

la mappa $t \rightarrow z(t)$ è soluzione dell'equazione di Lagrange definita da $L_R^{(c)}(z, \dot{z})$ con condizioni iniziali $z(0) = z_0$, $\dot{z}(0) = \dot{z}_0$.

La mappa $t \rightarrow \varphi(t)$ è data da

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \Phi(z(s), \dot{z}(s), c) ds.$$

Data una variabile ciclica, nel nostro caso φ ,

la lagrangiana può essere scritta nella forma

$$L = \tilde{L}_2 + \tilde{L}_1 + \tilde{L}_0,$$

con $\tilde{L}_i$, $i = 0, 1, 2$ funzioni omogenee di grado i rispetto a $\dot{\psi}$.

Possiamo allora scrivere

$$L_R^{(c)} = (\tilde{L}_2 + \tilde{L}_1 + \tilde{L}_0 - c\dot{\psi}) \Big|_{\dot{\psi} = \Phi(z, \dot{z}, c)}.$$

Notando che

$$p_{\dot{\psi}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}, \quad \dot{\psi} p_{\dot{\psi}} = 2\tilde{L}_2 + \tilde{L}_1$$

si ottiene

$$\begin{aligned} L_R^{(c)} &= (\tilde{L}_2 + \tilde{L}_1 + \tilde{L}_0 - 2\tilde{L}_2 - \tilde{L}_1) \Big|_{\dot{\psi} = \Phi(z, \dot{z}, c)} \\ &= (\tilde{L}_0 - \tilde{L}_2) \Big|_{\dot{\psi} = \Phi(z, \dot{z}, c)}. \end{aligned}$$

Nell'esercizio precedente si ha

$$L_R^{(c)} = \left(\frac{1}{2} m [1 + (r'(z))^2] \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m r^2(z) \dot{\psi}^2 - \dot{\psi} c \right) \Big|_{\dot{\psi} = \frac{c}{m r^2(z)}}$$

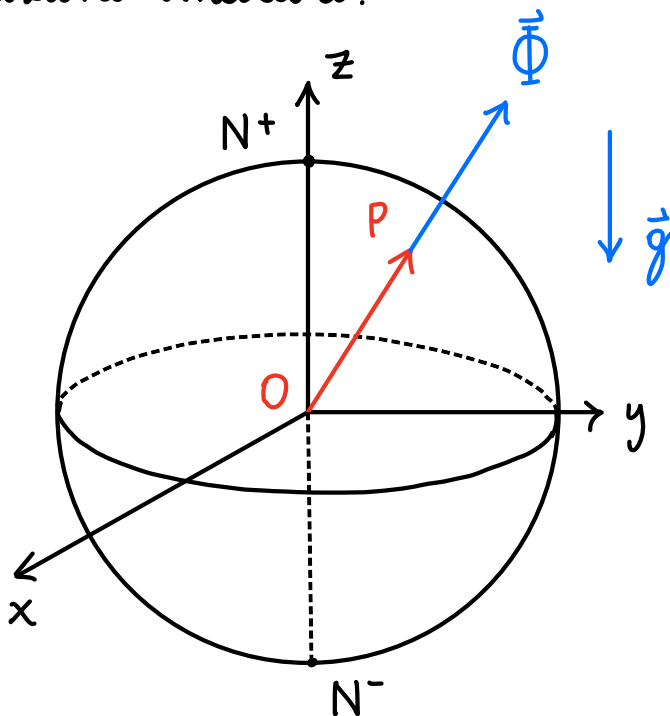
$$L_R^{(c)} = \frac{1}{2} m [1 + (r'(z))^2] \dot{z}^2 - \frac{c^2}{2 m r^2(z)}.$$

Esercizio (12 giugno 2015)

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ con l'asse Oz verticale ascendente.

Consideriamo un punto materiale P di massa m che si sposta su una superficie sferica di raggio R centrata in O , che assumiamo liscia.

Sul punto materiale agiscono la forza di gravità e la reazione vincolare.



i) Mostrare che se $P(0) = N^{\pm} \equiv (0, 0, \pm R)^T$

allora il momento angolare $\vec{M}_0$ o ha direzione costante o è nullo.

Sol. i)

Osserviamo subito che l'ipotesi di vincolo liscio si traduce nella condizione

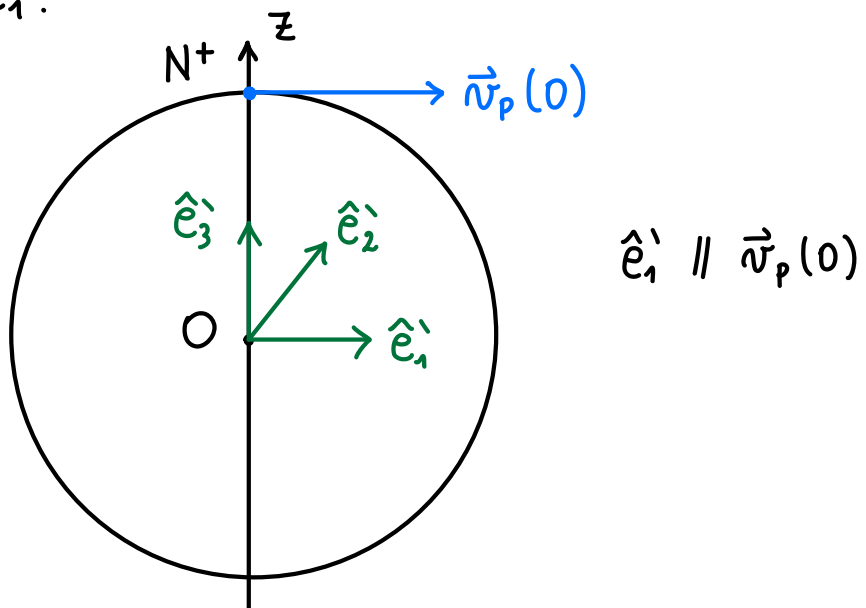
$$\vec{\Phi} \times (P - O) = \vec{0}.$$

Introduciamo un sistema di riferimento

$$\Sigma' = \{O; \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$$

«adattato» alle condizioni iniziali:

- $\hat{e}_1$ è definito dalla velocità iniziale $\vec{v}_p(0)$ (che assumiamo $\neq \vec{0}$): $\hat{e}_1 = \vec{v}_p(0) / |\vec{v}_p(0)|$,
- $\hat{e}_3$ è il vettore unitario associato all'asse Oz ,
- $\hat{e}_2 = \hat{e}_3 \times \hat{e}_1$.



$$\text{Scriviamo } P - O = \tilde{x} \hat{e}_1 + \tilde{y} \hat{e}_2 + \tilde{z} \hat{e}_3$$

$$\text{e } \vec{v}_p = \dot{\tilde{x}} \hat{e}_1 + \dot{\tilde{y}} \hat{e}_2 + \dot{\tilde{z}} \hat{e}_3$$

$$\vec{M}_0 = m (P - O) \times \vec{v}_P = m \left[(\tilde{y} \dot{\tilde{z}} - \dot{\tilde{y}} \tilde{z}) \hat{e}_1 + (\tilde{z} \dot{\tilde{x}} - \dot{\tilde{z}} \tilde{x}) \hat{e}_2 + (\tilde{x} \dot{\tilde{y}} - \dot{\tilde{x}} \tilde{y}) \hat{e}_3 \right]$$

$$\left. \frac{d\vec{M}_0}{dt} \right|_{\Sigma'} = m \left[(\tilde{y} \ddot{\tilde{z}} - \ddot{\tilde{y}} \tilde{z}) \hat{e}_1 + (\tilde{z} \ddot{\tilde{x}} - \ddot{\tilde{z}} \tilde{x}) \hat{e}_2 + (\tilde{x} \ddot{\tilde{y}} - \ddot{\tilde{x}} \tilde{y}) \hat{e}_3 \right]$$

Seconda equazione cardinale della dinamica

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{M}_0}{dt} \right|_{\Sigma'} &= \vec{N}_0 = (P - O) \times (\vec{\Phi} - mg \hat{e}_3) \\ &= (P - O) \times (-mg \hat{e}_3) \\ &= -mg (-\tilde{x} \hat{e}_2 + \tilde{y} \hat{e}_1). \end{aligned}$$

Osserviamo che $\vec{M}_0(0) \parallel \hat{e}_2$, e $\tilde{y}(0) = \dot{\tilde{y}}(0) = 0$.

Mostriamo che $\vec{M}_0(t) \parallel \hat{e}_2 \quad \forall t$ o equivalentemente che $\tilde{y}(t) = \dot{\tilde{y}}(t) = 0 \quad \forall t$.

Consideriamo le proiezioni della seconda eq. cardinale lungo $\hat{e}_1$ e $\hat{e}_3$:

$$\begin{cases} \tilde{y}(\ddot{\tilde{z}}) - (\ddot{\tilde{y}})\tilde{z} = -g\tilde{y} \\ \tilde{x}(\ddot{\tilde{y}}) - (\ddot{\tilde{x}})\tilde{y} = 0 \end{cases}.$$

Questo sistema ammette la soluzione $\tilde{y}(t) = 0$.

Allora P si muove lungo un meridiano,
di conseguenza $\vec{M}_0(t) \parallel \hat{e}_z \quad \forall t$.

Se $\vec{v}_P(0) = \vec{0}$ si ha invece $\vec{M}_0(t) = \vec{0} \quad \forall t$.

Un' altra soluzione è la seguente.

Consideriamo il sistema di riferimento $Oxyz$.

La seconda equazione cardinale proiettata lungo questi assi porge

$$\begin{cases} m \frac{d(y\dot{z} - \dot{y}z)}{dt} = -mgy \\ m \frac{d(z\dot{x} - \dot{z}x)}{dt} = mgx \\ m \frac{d(x\dot{y} - \dot{x}y)}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow M_z = m(x\dot{y} - \dot{x}y)$$

è un integrale primo
del moto

Notiamo che in $N^\pm$ si ha $M_z = 0$. Per mostrare
che la direzione di $\vec{M}_0$ è costante mostriamo che
anche M_y/M_x è un integrale primo (se $M_x(0) = 0$
si può ruotare opportunamente $Oxyz$ attorno ad
 Oz)

$$\frac{d(M_y/M_x)}{dt} = \frac{\dot{M}_y M_x - M_y \dot{M}_x}{M_x^2} =$$

$$\frac{1}{M_x^2} \left[m^2 g x (y \dot{z} - \dot{y} z) - m (\bar{z} \dot{x} - \dot{\bar{z}} x) (-mg y) \right] =$$

$$- \frac{m g \bar{z} M_z}{M_x^2} = 0 \quad \text{in quanto } M_z = 0.$$