Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica
20 Novembre 2025

Esercizio 1

i) Estendere le relazioni

$$P_1 = p_2 \cos q_2, \qquad P_2 = p_1 q_1$$

ad una trasformazione canonica[1]

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \times (-\pi/2, \pi/2) \ni (p_1, p_2, q_1, q_2) \overset{\Psi}{\mapsto} (P_1, P_2, Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^4$$

ii) Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H = \frac{1}{2}(p_2^2 \cos^2 q_2 + p_1^2 q_1^2) + \frac{1}{2} \log^2 \left(\frac{1 + \sin q_2}{\cos q_2} \right) + \log q_1.$$

Si trovi la soluzione di questo sistema con dati iniziali

$$p_1(0) = 0, \qquad p_2(0) = 1, \qquad q_1(0) = e, \qquad q_2(0) = 0.$$

Esercizio 2
Consideriamo la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}(q + \sin t)^2,$$

con q, $\dot{q}$, $t \in \mathbb{R}$.

i) Trovare la soluzione $t \to \bar{\gamma}(t)$ dell'equazione di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali $\bar{\gamma}(0) = 1$, $\dot{\bar{\gamma}}(0) = 0$.

ii) Mostrare che per ogni $T > 0$, $\bar{\gamma}$ è un minimo debole del funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^T L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt,$$

nella classe di funzioni $C^1([0, T], \mathbb{R})$.

iii) Fissato $T > 0$, calcolare la slope function del campo di estremali $\{\gamma_\alpha(t)\}_\alpha$ definito in $\{(t, \alpha) : t \in (0, T), \alpha \in \mathbb{R}\}$ dalle soluzioni dell'equazione di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali $\bar{\gamma}(0) = 0$, $\dot{\bar{\gamma}}(0) = \alpha$.

iv) Scrivere le equazioni di Carathéodory e determinare la funzione icononale $S(q, t)$ nella forma

$$S(q, t) = f(q, t) + \int g(t)dt,$$

con $f(q, t)$, $g(t)$ funzioni che devono essere calcolate.

---

[1] può essere utile ricordare che, per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, si ha $\int \frac{1}{\cos x}dx = \log\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right) + C$, dove C è una costante arbitraria.

Esercizio 1

i) Cerco una funzione generatrice $S(q, P)$

Da

$$p_1 = \frac{P_2}{q_1} = \frac{\partial S}{\partial q_1} \qquad p_2 = \frac{P_1}{\cos q_2} = \frac{\partial S}{\partial q_2}$$

trovo

$$S(q, P) = P_2 \log q_1 + f(q_2, P)$$

$$S(q, P) = P_1 \log\left(\frac{1+\operatorname{sen} q_2}{\cos q_2}\right) + g(q_1, P)$$

Allora pongo

$$S(q, P) = P_2 \log q_1 + P_1 \log\left(\frac{1+\operatorname{sen} q_2}{\cos q_2}\right)$$

Vedo che

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial P \partial q} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1/q_1 \\ 1/\cos q_2 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{q_1 \cos q_2} \neq 0$$

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1} = \log\left(\frac{1+\operatorname{sen} q_2}{\cos q_2}\right) \qquad Q_2 = \frac{\partial S}{\partial P_2} = \log q_1$$

ii) L'hamiltoniana $K = H \circ \psi^{-1}$ diventa

$$K(P, Q) = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2) + \frac{1}{2} Q_1^2 + Q_2$$

Troviamo le condizioni iniziali per le variabili P e Q:

$$P_1(0) = 1 \cdot \cos 0 = 1$$

$$P_2(0) = 0 \cdot e = 0$$

$$Q_1(0) = \log \frac{1 + \operatorname{sen} 0}{\cos 0} = 0$$

$$Q_2(0) = \log e = 1$$

Le equazioni di Hamilton sono

$$\dot{P}_1 = -\frac{\partial K}{\partial Q_1} = -Q_1 \qquad \dot{P}_2 = -\frac{\partial K}{\partial Q_2} = -1$$

$$\dot{Q}_1 = \frac{\partial K}{\partial P_1} = P_1 \qquad \dot{Q}_2 = \frac{\partial K}{\partial P_2} = P_2$$

La soluzione è data da

$$P_2(t) = -t \qquad Q_2(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 1$$

$$(\ddot{Q}_1 = -Q_1) \qquad Q_1(t) = \operatorname{sen} t \qquad P_1(t) = \cos t$$

Otteniamo la soluzione $p(t), q(t)$

$$1 + \operatorname{sen} q_2 = e^{Q_1} \cos q_2$$

$$1 + \operatorname{sen} q_2 = e^{\operatorname{sen} t} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 q_2} \qquad (-\pi/2 \leq q_2 \leq \pi/2)$$

$$x = \operatorname{sen} q_2$$

$$1 + x^2 + 2x = e^{2 \operatorname{sen} t} (1 - x^2)$$

$$x^2 (1 + e^{2 \operatorname{sen} t}) + 2x + 1 - e^{2 \operatorname{sen} t} = 0$$

$$x = \frac{1}{1+e^{2\,\text{sen}\,t}}\left(-1 \pm \sqrt{1-1+e^{4\,\text{sen}\,t}}\right)$$

$\text{sen}\, q_2 = -1$ che non è possibile

$$\text{sen}\, q_2 = \frac{e^{2\,\text{sen}\,t}-1}{e^{2\,\text{sen}\,t}+1} \longrightarrow q_2(t) = \text{arcsen}\left(\frac{e^{2\,\text{sen}\,t}-1}{e^{2\,\text{sen}\,t}+1}\right)$$

$$q_1(t) = e^{-t^2/2+1}$$

$$p_1(t) = -t\, e^{t^2/2-1}$$

inoltre

$$\cos q_2 = \frac{1+\text{sen}\, q_2}{e^{Q_1}} = \frac{1}{e^{\text{sen}\,t}}\,\frac{2e^{2\,\text{sen}\,t}}{e^{2\,\text{sen}\,t}+1} = \frac{2e^{\text{sen}\,t}}{e^{2\,\text{sen}\,t}+1}$$

$$p_2(t) = \cos t\left(\frac{e^{2\,\text{sen}\,t}+1}{2e^{\text{sen}\,t}}\right)$$

Esercizio 2

i) Si ha

$$L_{\dot q} = \dot q\,, \quad L_q = q + \operatorname{sen} t$$

$$\ddot q = q + \operatorname{sen} t$$

Cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$q_p = A \operatorname{sen} t$$

Allora $\dot q_p = A \cos t\,,\ \ddot q_p = -A \operatorname{sen} t$

$$-A \operatorname{sen} t = A \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t$$

$$-A = A + 1 \longrightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$q_p(t) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} t$$

Scriviamo

$$q(t) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} t + a e^{t} + b e^{-t}$$

$$q(0) = a + b = 1 \longrightarrow a = 1 - b$$

$$\dot q(t) = -\frac{1}{2} \cos t + a e^{t} - b e^{-t}$$

$$\dot q(0) = -\frac{1}{2} + a - b = 0 \longrightarrow -\frac{1}{2} + 1 - 2b = 0$$

$$\frac{1}{2} - 2b = 0 \longrightarrow b = \frac{1}{4}\,, \quad a = \frac{3}{4}$$

Si ottiene

$$q(t) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} t + \frac{3}{4} e^{t} + \frac{1}{4} e^{-t}$$

$$q(t) = \frac{1}{2}(-\operatorname{sen} t + \cosh t + e^t)$$

ii) Calcoliamo

$$a(t) = \frac{1}{2} L_{\dot q \dot q}(\bar\gamma(t), \dot{\bar\gamma}(t), t) = \frac{1}{2} > 0$$

$$b(t) = \frac{1}{2} L_{\dot q q}(\bar\gamma(t), \dot{\bar\gamma}(t), t) = 0$$

$$c(t) = \frac{1}{2} L_{q q}(\bar\gamma(t), \dot{\bar\gamma}(t), t) = \frac{1}{2}$$

Si ottiene

$$-\frac{1}{2}\ddot\eta + \frac{1}{2}\eta = 0 \longrightarrow \ddot\eta = \eta$$

Consideriamo le c.i. $\eta(0) = 0$, $\dot\eta(0) = 1$

La soluzione è $\eta(t) = \operatorname{senh} t$ che è > 0 per $t = T > 0$

iii) Ritorniamo a

$$q(t) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t + a e^t + b e^{-t}$$

$$\dot q(t) = -\frac{1}{2}\cos t + a e^t - b e^{-t}$$

e poniamo

$$q(0) = a + b = 0 \longrightarrow a = -b$$

$$\dot q(0) = -\frac{1}{2} + a - b = \alpha = -\frac{1}{2} - 2b = \alpha$$

$$b = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \alpha\right), \quad a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)$$

Si ottiene

$$\gamma(t,\alpha) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}t + \left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\operatorname{senh}t = q$$

da cui

$$\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\operatorname{senh}t = q + \frac{1}{2}\operatorname{sen}t$$

$$\alpha = \frac{1}{\operatorname{senh}t}\left(q+\frac{1}{2}\operatorname{sen}t\right) - \frac{1}{2} = a(t,q)$$

Sappiamo che

$$P(t,q) = \gamma_t(t, a(t,q))$$

con

$$\gamma_t(t,\alpha) = -\frac{1}{2}\cos t + \left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\cosh t$$

Si ha

$$P(t,q) = -\frac{1}{2}\cos t + \frac{\cosh t}{\operatorname{senh}t}\left(q+\frac{1}{2}\operatorname{sen}t\right)$$

iv) $$\begin{cases} S_q = \overline{L_{\dot q}} \\ S_t = \overline{L} - P\,\overline{L_{\dot q}} \end{cases}$$

$$L_{\dot q} = \dot q \longrightarrow \overline{L_{\dot q}} = P$$

$$L = \frac{1}{2}\dot q^2 + \frac{1}{2}(q+\operatorname{sen}t)^2 \longrightarrow \overline{L} = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}(q+\operatorname{sen}t)^2$$

Abbiamo

$$S_q = P = -\frac{1}{2}\cos t + \frac{c}{s}\left(q+\frac{1}{2}\operatorname{sen}t\right)$$

con

$$s = \operatorname{senh} t \qquad c = \cosh t$$

Integrando rispetto a q si ha

$$S(q,t) = -\frac{1}{2} q \cos t + \frac{c}{2s} q^2 + \frac{c}{2s} q \operatorname{sen} t + g(t)$$

$$= \frac{c}{2s} q^2 + \frac{1}{2} q \left(\frac{c}{s} \operatorname{sen} t - \cos t \right) + g(t) \qquad (1)$$

Inoltre abbiamo

$$S_t = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} (q + \operatorname{sen} t)^2 - p^2 =$$

$$-\frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} (q + \operatorname{sen} t)^2$$

$$S_t = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \cos^2 t + \frac{c^2}{s^2} \left(q^2 + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 t + q \operatorname{sen} t \right) - \frac{c}{s} \cos t \left(q + \frac{1}{2} \operatorname{sen} t \right) \right)$$

$$+ \frac{1}{2} (q^2 + \operatorname{sen}^2 t + 2q \operatorname{sen} t)$$

da cui

$$S_t = \frac{1}{2} q^2 \left(1 - \frac{c^2}{s^2} \right) - \frac{1}{2} q \left(\frac{c^2}{s^2} \operatorname{sen} t - \frac{c}{s} \cos t - 2 \operatorname{sen} t \right)$$

$$-\frac{1}{8} \cos^2 t - \frac{1}{8} \frac{c^2}{s^2} \operatorname{sen}^2 t + \frac{1}{4} \frac{c}{s} \operatorname{sen} t \cos t + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 t \qquad (2)$$

Deriviamo (1) rispetto al tempo

$$S_t = \frac{1}{2} q^2 \left(1 - \frac{c^2}{s^2} \right) - \frac{1}{2} q \left(\frac{c^2}{s^2} \operatorname{sen} t - \frac{c}{s} \cos t - 2 \operatorname{sen} t \right) + g'(t)$$

e confrontiamo con (2) per ottenere

$$g(t) = \int \left(-\frac{1}{8} \cos^2 t - \frac{1}{8} \frac{c^2}{s^2} \operatorname{sen}^2 t + \frac{1}{4} \frac{c}{s} \operatorname{sen} t \cos t + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 t \right) dt$$

In definitiva si ha

$$S(t,q) = \frac{c}{2s} q^2 + \frac{1}{2} q \left(\frac{c}{s} \operatorname{sen} t - \cos t \right) +$$

$$\int \left(-\frac{1}{8} \cos^2 t - \frac{1}{8} \frac{c^2}{s^2} \operatorname{sen}^2 t + \frac{1}{4} \frac{c}{s} \operatorname{sen} t \cos t + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 t \right) dt$$