Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica
19 Dicembre 2025

Esercizio 1
Si considerino le due funzioni di Hamilton

$$F = |\boldsymbol{p}|^2|\boldsymbol{q}|^2, \qquad G = (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})^2$$

dove $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$.

i) Scelti $f, g \in \mathbb{R}$, con $f > g > 0$, si consideri l'insieme

$$\mathcal{M} = \{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^4 : F(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = f,\ G(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = g\}.$$

Mostrare che $\mathcal{M}$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2.

ii) Mostrare che i flussi hamiltoniani $\boldsymbol{\Phi}_F^t$, $\boldsymbol{\Phi}_G^t$ associati a F, G commutano.

iii) Consideriamo il flusso generalizzato

$$\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Phi}_F^{\tau_1} \circ \boldsymbol{\Phi}_G^{\tau_2}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}).$$

Mostrare che $\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{\tau}}$ definisce una mappa da $\mathcal{M}$ in sé.

iv) Scelto un qualunque punto $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{M}$, mostrare che la mappa $\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{x}_0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{x}_0)$$

è un diffeomorfismo locale.

Esercizio 2
Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = 2I_1^2 - I_2^2 + \varepsilon[\sin^2(\varphi_1 + \varphi_2) - \sin^2(\varphi_1 + 2\varphi_2)],$$

con $(I_1, I_2) \in \mathbb{R}^3$, $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$ e $0 < \varepsilon \ll 1$.

i) Determinare una trasformazione canonica

$$(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) \xrightarrow{\Psi} (J_1, J_2, \Psi_1, \Psi_2)$$

tale che le nuove coordiante (Ψ_1, Ψ_2) siano separabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione di Hamilton $K_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \Psi^{-1}$.

ii) Trovare due integrali primi tra loro indipendenti del sistema hamiltoniano associato ad H_ε.

iii) Descrivere l'andamento delle variabili azione I_1, I_2 e mostrare che vale il principio della media per tutti i tempi.

Esercizio 1

i) Per mostrare che M è una sottovarietà di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2, dobbiamo verificare che

$$\text{rango} \frac{\partial (F,G)}{\partial (p,q)} = 2 \quad \text{per ogni } (p,q) \in M$$

Ci basta allora verificare che un minore 2×2 della matrice $\partial (F,G)/\partial (p,q)$ sia invertibile su M:

$$\frac{\partial (F,G)}{\partial p} = \begin{pmatrix} 2p^T |q|^2 \\ 2q^T (p \cdot q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p_1 |q|^2 & 2p_2 |q|^2 \\ 2q_1 (p\cdot q) & 2q_2 (p \cdot q) \end{pmatrix}$$

$$\det \frac{\partial (F,G)}{\partial p} = 4 |q|^2 (p \cdot q)(p_1 q_2 - p_2 q_1)$$

Se $(p,q) \in M$ abbiamo $(p \cdot q) = g \neq 0$, $|q|^2 \neq 0$ e $p_1 q_2 - p_2 q_1 \neq 0$, infatti presi $\tilde{p} = (p_1, p_2, 0)^T$ e $\tilde{q} = (q_1, q_2, 0)^T$, si ha che

$$p_1 q_2 - p_2 q_1 = (\tilde{p} \times \tilde{q}) \cdot e_3 \qquad (e_3 = (0,0,1)^T)$$

può essere nullo solo se $\tilde{p} \parallel \tilde{q}$, cioè $p \parallel q$, ma ciò non è possibile altrimenti si avrebbe $f = g$

ii) Mostriamo che i campi hamiltoniani associati a F e G commutano

$$[X_F, X_G] = X_{\{G,F\}}$$

Calcoliamo

$$\{G,F\} = \frac{\partial G}{\partial q}\cdot\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial G}{\partial p}\cdot\frac{\partial F}{\partial q} =$$

$$= 2(p\cdot q)|q|^2(p\cdot(2p)) - 2(p\cdot q)|p|^2(q\cdot(2q))$$

$$= 4(p\cdot q)\left[|q|^2|p|^2 - |p|^2|q|^2\right] = 0$$

iii) Notiamo che entrambi i flussi lasciano invariati i valori f e g assunti da F e G:

$\forall\, x \in M$, si ha che $y = \Phi_G^{\tau_2}(x) \in M$, infatti G ed F sono due integrali primi di X_G $(\{G,G\}=0,\ \{G,F\}=0)$, inoltre $z = \Phi_F^{\tau_1} \in M$, infatti F e G sono due integrali primi di X_G $(\{F,F\}=0,\ \{F,G\}=0)$

iv) Basta verificare che la mappa $\Phi^\tau(x_0)$ è invertibile, cioè

$$\text{rango}\ \frac{\partial \Phi^\tau(x_0)}{\partial(\tau_1,\tau_2)} = 2$$

Si ha

$$\frac{\partial \Phi^\tau(x_0)}{\partial \tau_1} = \frac{\partial\left(\Phi_F^{\tau_1}(\Phi_G^{\tau_2}(x_0))\right)}{\partial \tau_1} = X_F\left(\Phi_G^{\tau_2}(x_0)\right)$$

$$\frac{\partial \Phi^\tau(x_0)}{\partial \tau_2} = \frac{\partial\left(\Phi_F^{\tau_1}(\Phi_G^{\tau_2}(x_0))\right)}{\partial \tau_2} = \frac{\partial\left(\Phi_G^{\tau_2}(\Phi_F^{\tau_1}(x_0))\right)}{\partial \tau_2} = X_G\left(\Phi_F^{\tau_1}(x_0)\right)$$

noto che

$$X_F = \left(-\frac{\partial F}{\partial q}, \frac{\partial F}{\partial p}\right) \qquad X_G = \left(-\frac{\partial G}{\partial q}, \frac{\partial G}{\partial p}\right)$$

e nel punto i) abbiamo mostrato che

$$\det \frac{\partial(F,G)}{\partial p} \neq 0 \quad \text{per ogni } x_0 \in M$$

quindi

$$\text{rango} \, \frac{\partial \Phi^\tau(x_0)}{\partial(\tau_1, \tau_2)} = 2$$

Esercizio 2

i) Poniamo

$$\begin{cases} \psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2 \\ \psi_2 = \varphi_1 + 2\varphi_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Completiamo questa trasformazione ad una trasformazione canonica come segue

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = A^{-T} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A^{-T} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} J_1 = 2I_1 - I_2 \\ J_2 = I_2 - I_1 \end{cases}$$

da cui si ha

$$\begin{cases} I_1 = J_1 + J_2 \\ I_2 = J_1 + 2J_2 \end{cases}$$

L'hamiltoniana $K_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \psi^{-1}$ diventa

$$\begin{aligned} K_\varepsilon = {} & 2(J_1^2 + J_2^2 + 2J_1J_2) - (J_1^2 + 4J_2^2 + 4J_1J_2) \\ & + \varepsilon(\text{sen}^2\psi_1 - \text{sen}^2\psi_2) \\ = {} & J_1^2 - 2J_2^2 + \varepsilon(\text{sen}^2\psi_1 - \text{sen}^2\psi_2) \end{aligned}$$

Introduco la funzioni caratteristica di Hamilton

$$W(\psi_1,\psi_2,\alpha_1,\alpha_2) = W_1(\psi_1,\alpha_1) + W_2(\psi_2,\alpha_2)$$

L'equazioni di Hamilton-Jacobi è

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial \psi_1}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial W_2}{\partial \psi_2}\right)^2 + \varepsilon\,(\operatorname{sen}^2\psi_1 - \operatorname{sen}^2\psi_2) = e(\alpha_1,\alpha_2)$$

Allora le variabili ψ_1, ψ_2 sono separabili come segue

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial W_1}{\partial \psi_1}\right)^2 + \varepsilon \operatorname{sen}^2\psi_1 = \alpha_1 \\ \left(\frac{\partial W_2}{\partial \psi_2}\right)^2 + \varepsilon \operatorname{sen}^2\psi_2 = \alpha_2 \end{cases}$$

con $e(\alpha_1,\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$

2) Dal punto precedente si vede che

$$\begin{cases} F_1 = J_1^2 + \varepsilon \operatorname{sen}^2\psi_1 \\ F_2 = J_2^2 + \varepsilon \operatorname{sen}^2\psi_2 \end{cases}$$

sono integrali primi per X_K. Considero

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(J_1,J_2,\psi_1,\psi_2)} = \begin{pmatrix} 2J_1 & 0 & \varepsilon \operatorname{sen} 2\psi_1 & 0 \\ 0 & 2J_2 & 0 & \varepsilon \operatorname{sen} 2\psi_2 \end{pmatrix}$$

il rango di questa matrice è < 2 se

$$\left\{ J_1 = 0 \ \wedge \ \psi_1 = k\frac{\pi}{2} \right\} \vee \left\{ J_2 = 0 \ \wedge \ \psi_2 = k\frac{\pi}{2} \right\}$$

altrimenti il rango è massimo e F_1, F_2 sono indipendenti. Per il sistema hamiltoniano associato ad H_ε i due integrali sono

$$G_1 = F_1 \circ \psi = (2I_1 - I_2)^2 + \varepsilon \,\mathrm{sen}^2(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$G_2 = F_2 \circ \psi = (I_2 - I_1)^2 + \varepsilon \,\mathrm{sen}^2(\varphi_1 + 2\varphi_2)$$

3) Scriviamo X_K:

$$\begin{cases} \dot{J}_1 = -\varepsilon \,\mathrm{sen}\, 2\psi_1 \\ \dot{J}_2 = \varepsilon \,\mathrm{sen}\, 2\psi_2 \\ \dot{\psi}_1 = 2J_1 \\ \dot{\psi}_2 = -4J_2 \end{cases}$$

si ottengono le equazioni di due pendoli

$$\ddot{\psi}_1 = -2\varepsilon \,\mathrm{sen}\, 2\psi_1$$

$$\ddot{\psi}_2 = -4\varepsilon \,\mathrm{sen}\, 2\psi_2$$

Sappiamo che $\dot{\psi}_1$ e $\dot{\psi}_2$ compiono oscillazioni la cui ampiezza è al massimo dell'ordine $O(\sqrt{\varepsilon})$.

Allora questa affermazione vale per

$$J_1 = \dot{\psi}_1/2 \quad \text{e} \quad J_2 = -\dot{\psi}_2/4$$

Poiché $I_1 = J_1 + J_2$, $I_2 = J_1 + 2J_2$ si trova che anche le azioni I_1 e I_2 compiono oscillazioni di ampiezza di ordine $O(\sqrt{\varepsilon})$ e quindi soddisfano il principio della media per tutti i tempi