

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
17 Novembre 2021

Esercizio 1

Si consideri la hamiltoniana

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \frac{t}{2} |\mathbf{p}|^2 + \frac{1}{2t} (|\mathbf{q}|^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q})$$

con $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$.

i) Completare le relazioni

$$Q_1 = \frac{q_1^2}{2t}, \quad Q_2 = \frac{q_2^2}{2t}$$

ad una trasformazione canonica dipendente dal tempo

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \xrightarrow{\Psi} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t),$$

con $\mathbf{P} = (P_1, P_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^2$, e scrivere la hamiltoniana K coniugata ad H tramite la trasformazione Ψ .

- ii) Trovare un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla hamiltoniana K .
- iii) Determinare due integrali primi indipendenti per il campo vettoriale X_H .

Esercizio 2

Si consideri la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q), \quad V(q) = q^2 \log q$$

con $q > 0$, $\dot{q} \in \mathbb{R}$.

- i) Tracciare il ritratto di fase delle equazioni di Eulero-Lagrange per L .
- ii) Mostrare che la soluzione $\bar{\gamma}(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange con condizioni iniziali

$$\bar{\gamma}(0) = e^{-1/2}, \quad \dot{\bar{\gamma}}(0) = (1/e - 1/3)^{1/2}$$

è una funzione periodica tale che

$$\bar{\gamma}(t) > 1/e, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- iii) Mostrare che esiste un valore τ_* del tempo t per cui $\bar{\gamma}(t)$ non può essere un minimo debole del funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}_L(\gamma) = \int_0^{\tau_*} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt.$$

Esercizio 1

i) Cerco una funzione generatrice $S(q, P, t)$.

Da

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1} = \frac{q_1^2}{2t} \quad Q_2 = \frac{\partial S}{\partial P_2} = \frac{q_2^2}{2t}$$

trovo

$$S(q, P, t) = \frac{q_1^2 P_1}{2t} + \phi_1(q, P_2, t)$$

$$S(q, P, t) = \frac{q_2^2 P_2}{2t} + \phi_2(q, P_1, t)$$

Rongo

$$S(q, P, t) = \frac{1}{2t} (q_1^2 P_1 + q_2^2 P_2)$$

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial P} = \frac{q_1 q_2}{t^2} \neq 0$$

$$P_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1} = \frac{q_1 P_1}{t} \quad P_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2} = \frac{q_2 P_2}{t}$$

$$\text{da cui si ha } P_1 = t \frac{P_1}{q_1}, \quad P_2 = t \frac{P_2}{q_2}$$

La trasformazione inversa porge

$$q_1 = \sqrt{2t Q_1} \quad q_2 = \sqrt{2t Q_2}$$

$$p_1 = P_1 \sqrt{\frac{2Q_1}{t}} \quad p_2 = P_2 \sqrt{\frac{2Q_2}{t}}$$

Ricaviamo l'hamiltoniana K coniugata ad H
tramite ψ

$$K(P, Q, t) = \left(H(p, q, t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q, P, t) \right) \circ \psi^{-1}$$

$$H \circ \psi^{-1} = \frac{t}{2} \left(\frac{2P_1^2 Q_1}{t} + \frac{2P_2^2 Q_2}{t} \right) +$$
$$\frac{1}{2t} (2t Q_1 + 2t Q_2 + 2P_1 Q_1 + 2P_2 Q_2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{2t^2} (q_1^2 P_1 + q_2^2 P_2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} \circ \psi^{-1} = -\frac{1}{t} (P_1 Q_1 + P_2 Q_2)$$

$$K = P_1^2 Q_1 + P_2^2 Q_2 + Q_1 + Q_2$$

ii) Dato che K è indipendente dal tempo
cerco un integrale completo della forma

$$S(Q, \alpha, t) = W(Q, \alpha) - e(\alpha) t$$

$$\text{con } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$$

Assumo

$$W(Q, \alpha) = W_1(Q_1, \alpha) + W_2(Q_2, \alpha)$$

L'equazione di Hamilton-Jacobi diventa

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial Q_1}\right)^2 Q_1 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial Q_2}\right)^2 Q_2 + Q_1 + Q_2 = e(\alpha)$$

Si possono quindi scrivere le due equazioni

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial W_1}{\partial Q_1}\right)^2 Q_1 + Q_1 = \alpha_1 \\ \left(\frac{\partial W_2}{\partial Q_2}\right)^2 Q_2 + Q_2 = \alpha_2 \end{cases}$$

$$\text{dove } e(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2$$

Consideriamo la prima equazione

$$\frac{\partial W_1}{\partial Q_1} = \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} \quad (\text{scegliendo il segno } +)$$

$$W_1(Q_1, \alpha_1) = \int \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} \, dQ_1$$

$$\int \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} \, dQ_1 = Q_1 \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} - \int \frac{Q_1 \left(-\frac{\alpha_1}{Q_1^2}\right)}{\sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1}} dQ_1$$

$$z = \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} \quad dz = -\left(\frac{\alpha_1}{2Q_1^2}\right) \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1}} dQ_1$$

$$Q_1 = \frac{\alpha_1}{1 + z^2}$$

$$\longrightarrow - \int \frac{\alpha_1}{1 + z^2} dz = -\alpha_1 \arctan z$$

quindi

$$\int \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} \, dQ_1 = Q_1 \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} - \alpha_1 \arctan \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1}$$

L'integrale completo cercato è dato da

$$S(Q, \alpha, t) = Q_1 \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} - \alpha_1 \arctan \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} - \alpha_1 t +$$

$$Q_2 \sqrt{\frac{\alpha_2}{Q_2} - 1} - \alpha_2 \arctan \sqrt{\frac{\alpha_2}{Q_2} - 1} - \alpha_2 t$$

iii) Il metodo di Hamilton-Jacobi ci indica una scelta possibile: α_1 e α_2

$$\alpha_1 = P_1^2 Q_1 + Q_1$$

$$\alpha_2 = P_2^2 Q_2 + Q_2$$

$$\frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial(P, Q)} = \begin{pmatrix} 2P_1 Q_1 & 0 & 1 + P_1^2 & 0 \\ 0 & 2P_2 Q_2 & 0 & 1 + P_2^2 \end{pmatrix}$$

il rango di questa matrice è 2, quindi i due integrali sono indipendenti

Si conclude che due integrali primi indipendenti per X_H sono

$$J_1 = t^2 \frac{P_1^2}{Q_1^2} \frac{Q_1^2}{2t} + \frac{Q_1^2}{2t} = \frac{t}{2} P_1^2 + \frac{Q_1^2}{2t}$$

$$J_2 = \frac{t}{2} P_2^2 + \frac{Q_2^2}{2t}$$

Esercizio 2

i)

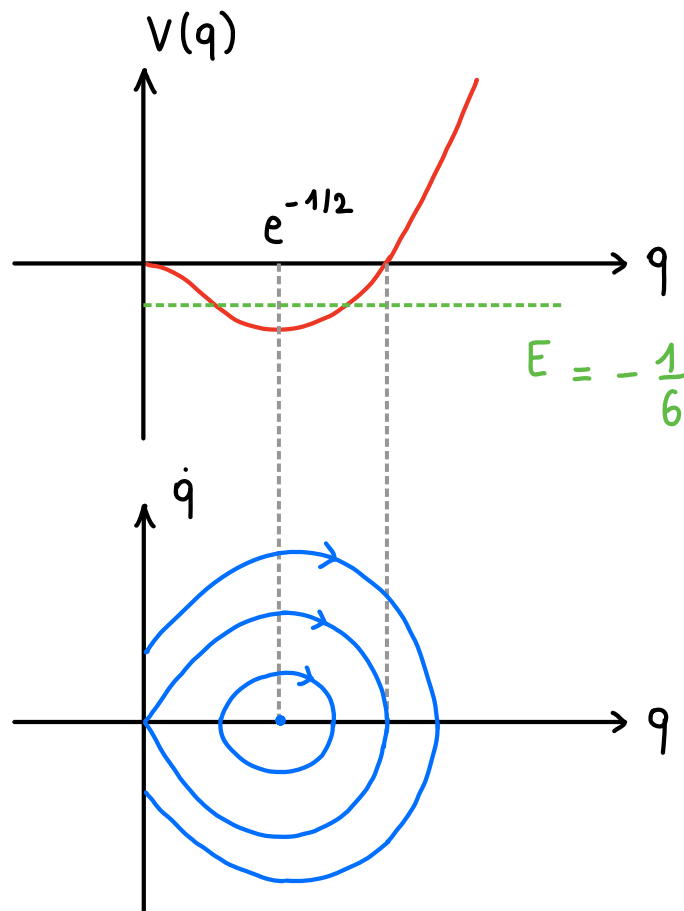
$$\lim_{q \rightarrow 0^+} q^2 \log q = 0$$

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} q^2 \log q = +\infty$$

calcoliamo $V'(q)$:

$$V'(q) = 2q \log q + q$$

$$V'(q) = 0 \text{ per } \log q = -\frac{1}{2} \rightarrow q = e^{-1/2}$$



ii)

Calcoliamo il valore dell'energia meccanica che è una quantità conservata lungo il moto

$$E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 + V(q)$$

$$\bar{E}(\bar{\gamma}(0), \dot{\bar{\gamma}}(0)) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{e} \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{6}$$

notando che

$$V(e^{-1/2}) = \frac{1}{e} \left(-\frac{1}{2} \right) < \bar{E} < 0$$

possiamo dire dal ritratto di fase che $\bar{\gamma}(t)$ è una funzione periodica; inoltre

$$V\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e^2} > -\frac{1}{6}$$

perciò dato che $\frac{1}{e} < \frac{1}{\sqrt{e}}$ possiamo

affermare che

$$\bar{\gamma}(t) > \frac{1}{e} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

iii)

Vogliamo considerare la soluzione dell'equazione di Fuchs

$$-\frac{d}{dt} (a(t)\eta) + (c(t) - b(t))\eta = 0$$

con condizioni iniziali

$$\eta(0) = 0, \quad \dot{\eta}(1) = 0$$

e mostrare che esiste $\tau^* > 0$ tale che $\eta(\tau^*) = 0$

$$L_{\dot{q}} = \dot{q} \quad L_q = -V' = -2q \log q - q$$

$$a(t) = \frac{1}{2} L_{\dot{q}\dot{q}}(\bar{\gamma}(t), \dot{\bar{\gamma}}(t)) = \frac{1}{2} > 0$$

$$b(t) = \frac{1}{2} L_{q\dot{q}}(\bar{\gamma}(t), \dot{\bar{\gamma}}(t)) = 0$$

$$c(t) = \frac{1}{2} L_{qq}(\bar{\gamma}(t), \dot{\bar{\gamma}}(t)) = -\frac{1}{2} V''(\bar{\gamma}(t))$$

$$-\frac{1}{2} (2 \log \bar{\gamma}(t) + 2 + 1) = -\frac{3}{2} - \log \bar{\gamma}(t)$$

$$-\frac{1}{2} \ddot{\eta} - \left(\frac{3}{2} + \log \bar{\gamma}(t) \right) \eta = 0$$

$$\dot{\eta} = -(3 + 2 \log \bar{\gamma}(t)) \eta$$

integrando rispetto al tempo si ha

$$\eta(t) = 1 - \int_0^t (3 + 2 \log \bar{\gamma}(s)) \eta(s) ds$$

e notando che $\bar{\gamma}(t) > \frac{1}{e}$ si ha

$$3 + 2 \log \bar{\gamma}(t) > 3 + 2 \log \frac{1}{e} = 1$$

da cui per ogni $t > 0$ tale che $\eta(t) > 0$ si può scrivere

$$\eta(t) = 1 - \int_0^t (3 + 2 \log \bar{\gamma}(s)) \eta(s) ds$$

$$\eta(t) \leq 1 - \int_0^t \eta(s) ds, \quad \eta(0) = 0 \quad (1)$$

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\ddot{\xi} = -\xi, \quad \xi(0) = 0, \quad \dot{\xi}(0) = 1$$

Si ha

$$\dot{\xi}(t) = 1 - \int_0^t \xi(s) ds, \quad \xi(0) = 0 \quad (2)$$

Dal confronto tra (1) e (2) segue che $\eta(t) < \xi(t) = \sin t$ finché $\eta(t) > 0$. Allora esiste $\tau^* < \pi$ tale che $\eta(\tau^*) = 0$.