Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica
14 Novembre 2023

Esercizio 1
Si consideri l'equazione di Newton

$$\ddot{x} = 0,$$
$$\ddot{z} = -\frac{1}{2},$$

di un punto materiale di massa unitaria che si muove sul piano (x, z) soggetto ad una forza di intensità costante.

i) Determinare la soluzione di tale equazione con condizioni iniziali

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0.$$

ii) Mostrare che la funzione $\bar{u}(x) = z(x)$ ottenuta dalla soluzione del punto precedente, è un estremale del funzionale

$$\mathcal{A}_L = \int_0^{x_1} L(\bar{u}(x), \bar{u}'(x))dx,$$

definito dalla lagrangiana

$$L(u, u') = \sqrt{1-u}\,\sqrt{1+u'^2}$$

con $u' = \frac{du}{dx}$.

iii) Mostrare che $\bar{u}(x)$ è un minimo debole stretto del funzionale $\mathcal{A}_L$ per ogni $x_1 > 0$ nella classe di funzioni $C^1([0, x_1], \mathbb{R})$. *Suggerimento*: cercare la soluzione dell'equazione di Jacobi in una forma polinomiale.

Esercizio 2

i) Si completi la relazione

$$Q = e^q$$

ad una trasformazione canonica univalente

$$\mathbb{R}^2 \ni (p, q) \overset{\mathbf{\Psi}}{\mapsto} (P, Q)$$

tramite il metodo della funzione generatrice.

ii) Si consideri il sistema hamiltoniano ad un grado di libertà con funzione di Hamilton

$$H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 e^{-2q} + p$$

e se ne calcoli la soluzione con condizioni iniziali al tempo $t = 0$

$$p_0 = 1, \qquad q_0 = 0$$

considerando il sistema hamiltoniano ottenuto tramite la trasformazione canonica $\mathbf{\Psi}$.

iii) Fissato un tempo $\tau > 0$ si verifichi che si ha

$$K(\mathbf{\Phi}^\tau(P, Q)) = K(P, Q),$$

dove $K = H \circ \Psi^{-1}$ e $\mathbf{\Phi}^t(P, Q)$ è il flusso integrale del campo vettoriale hamiltoniano X_K.

Soluzioni

Esercizio 1

i) La soluzione è data da

$$x(t) = t,$$
$$z(t) = -\frac{t^2}{4}.$$

ii) Otteniamo

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+u'^2}{1-u}},$$
$$\frac{\partial L}{\partial u'} = u'\sqrt{\frac{1-u}{1+u'^2}},$$
$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} = \frac{u''}{1+u'^2}\sqrt{\frac{1-u}{1+u'^2}} - \frac{u'^2}{2\sqrt{1-u}\sqrt{1+u'^2}}.$$

L'equazione di Eulero-Lagrange per L diventa

$$\frac{u''}{1+u'^2}\sqrt{\frac{1-u}{1+u'^2}} - \frac{u'^2}{2\sqrt{1-u}\sqrt{1+u'^2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+u'^2}{1-u}}, \tag{1}$$

che può essere semplificata nella forma

$$u'' = -\frac{1}{2}\left(\frac{1+u'^2}{1-u}\right).$$

Si verifica che la funzione

$$\bar{u}(x) = -\frac{x^2}{4},$$

ottenuta dalla soluzione del punto precedente, soddista l'equazione (1). Infatti, notiamo che

$$1 + \bar{u}'^2 = 1 - \bar{u} = 1 + \frac{x^2}{4} \tag{2}$$

e

$$\bar{u}'' = -\frac{1}{2}.$$

Segue che $\bar{u}(x)$ è un estremale del funzionale $\mathcal{A}_L$.

iii) Per scrivere l'equazione di Jacobi ci servono le seguenti derivate:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u^2} = -\frac{1}{4(1-u)}\sqrt{\frac{1+u'^2}{1-u}},$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial u \partial u'} = -\frac{u'}{2\sqrt{1-u}\sqrt{1+u'^2}},$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial u'^2} = \frac{1}{1+u'^2}\sqrt{\frac{1-u}{1+u'^2}}.$$

Ricordando che vale (2), si ha

$$
\begin{aligned}
a(x) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial u'^2}(\bar u(x), \bar u'(x)) = \frac{2}{4+x^2},\\
b(x) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial u \partial u'}(\bar u(x), \bar u'(x)) = \frac{x}{2(4+x^2)},\\
c(x) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(\bar u(x), \bar u'(x)) = -\frac{1}{2(4+x^2)}.
\end{aligned}
$$

L'equazione di Jacobi

$$-\frac{d}{dx}(a\eta') + (c-b')\,\eta = 0$$

diventa

$$-\frac{2}{4+x^2}\eta'' + \frac{4x}{(4+x^2)^2}\eta' - \frac{4}{(4+x^2)^2}\eta = 0,$$

che può essere semplificata nella forma

$$(4+x^2)\eta'' - 2x\eta' + 2\eta = 0.$$

La soluzione di questa equazione con condizioni iniziali $\eta(0) = 0$, $\eta'(0) = 1$ è data da

$$\eta(x) = x.$$

Notando che $\eta(x) > 0$ per $x > 0$ concludiamo che $\bar u(x)$ è un minimo debole stretto del funzionale $\mathcal{A}_L$ per ogni $x_1 > 0$ nella classe di funzioni $C^1([0, x_1], \mathbb{R})$.

Esercizio 2

i) Considero una funzione generatrice della forma $S(q, P)$. Le relazioni che definiscono implicitamente la trasformazione sono

$$p = S_q, \qquad Q = S_P.$$

Dalla seconda si ottiene che

$$S_{Pq} = e^q \neq 0.$$

Possiamo quindi porre

$$S = Pe^q$$

e quindi

$$p = Pe^q,$$

da cui

$$(P, Q) = (pe^{-q}, e^q).$$

ii) La funzione di Hamilton K nelle variabili (P, Q) è

$$K(P, Q) = H \circ \boldsymbol{\Psi}^{-1}(P, Q) = \frac{1}{2}P^2 + PQ.$$

Il sistema hamiltoniano corrispondente è

$$\dot P = -K_Q = -P, \qquad \dot Q = K_P = P + Q.$$

La prima equazione è indipendente e la sua soluzione generale è

$$P(t) = P_0 e^{-t}.$$

La seconda equazione diventa quindi

$$\dot{Q} - Q = P_0 e^{-t}, \tag{3}$$

che ha come soluzione particolare $\bar{Q}(t) = -\frac{P_0}{2} e^{-t}$. La soluzione generale della (3) è quindi

$$Q(t) = Ae^t - \frac{P_0}{2} e^{-t}. \tag{4}$$

Le condizioni iniziali corrispondenti a $(p_0, q_0) = (1, 0)$ sono

$$(P_0, Q_0) = (1, 1),$$

per cui, sostituendo in (4), si trova che

$$A = Q_0 + \frac{P_0}{2} = \frac{3}{2}.$$

La soluzione del problema di Cauchy nelle nuove variabili è quindi

$$P(t) = e^{-t}, \qquad Q(t) = \frac{3}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t} = e^t + \sinh(t)$$

per cui, la soluzione richiesta nelle vecchie variabili è

$$p(t) = P(t)Q(t) = 1 + e^{-t} \sinh(t), \qquad q(t) = \log(Q(t)) = \log(e^t + \sinh(t)).$$

iii) Dai conti fatti al punto 2. si vede che il flusso integrale del campo vettoriale hamiltoniano X_K è

$$\mathbf{\Phi}^t(P, Q) = (Pe^{-t}, Qe^t + P\sinh(t)).$$

Sa $\tau > 0$ è un tempo fissato si ha

$$\begin{aligned}
K(\mathbf{\Phi}^\tau(P, Q)) &= \frac{1}{2} P^2 e^{-2\tau} + Pe^{-\tau}(Qe^\tau + P\sinh(\tau)) \\
&= \frac{1}{2} P^2 e^{-2\tau} + Pe^{-\tau}\left(Qe^\tau + \frac{P}{2}(e^\tau - e^{-\tau})\right) \\
&= \frac{1}{2} P^2 e^{-2\tau} + PQ + \frac{1}{2} P^2 (1 - e^{-2\tau}) = K(P, Q).
\end{aligned}$$