

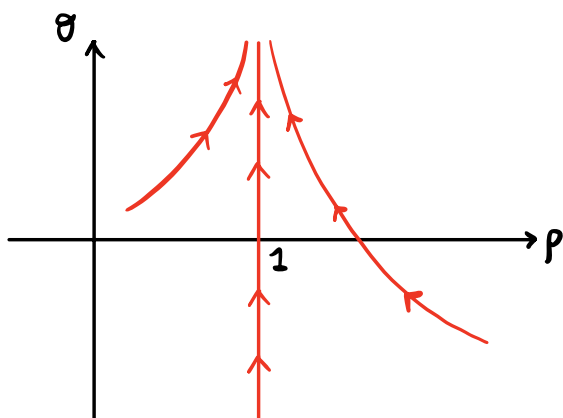
ESERCIZIO

Coordinate polari

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1-\rho^2) \\ \dot{\theta} = \rho^2 \end{cases} \quad \rho \in \mathbb{R}^+, \theta \in S^1$$

$\{\rho = 1\}$ è un insieme invariante, infatti

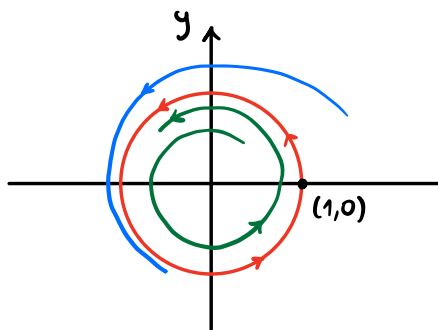
$$I(\rho, \theta) = \rho \quad \left. \frac{dI}{d\rho} \right|_{\rho=1} = \dot{\rho}|_{\rho=1} = \rho(1-\rho^2)|_{\rho=1} = 0$$



$$\frac{d\rho}{d\theta} = ? \quad \frac{d\rho}{d\theta} \dot{\theta} = \dot{\rho} \rightarrow \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{1-\rho^2}{\rho}$$

$$d\theta = \frac{\rho}{1-\rho^2} d\rho \quad \theta = \int \frac{\rho}{1-\rho^2} d\rho = -\frac{1}{2} \log|1-\rho^2| + \text{cost}$$

Ora ci chiediamo se $\vec{x} = (1, 0)$ è stabile



$O(1, 0)$ è periodica di periodo 2π , infatti

$$\dot{\theta}|_{\rho=1} = 1$$

Considera $\vec{y} = (1+\delta, 0)$, $\delta > 0$, vedo che

$O^+(\vec{y})$ interseca il semi-asse $x > 0$ dopo un tempo $< 2\pi$,

infatti

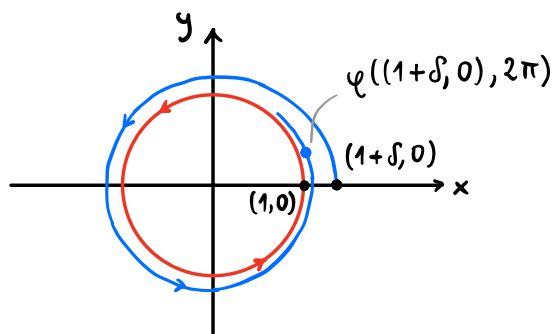
$$\dot{\theta} = p^2 \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = p^2 \rightarrow$$

$$dt = \frac{1}{p^2} d\theta \rightarrow \bar{t} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{p^2} d\theta < 2\pi$$

in quanto $p(t) > 1$

Allora qualsiasi sia δ esiste κ tale che

$$d(\varphi((1,0), 2\kappa\pi) - \varphi((1+\delta, 0), 2\kappa\pi)) > \delta$$



ESEMPIO

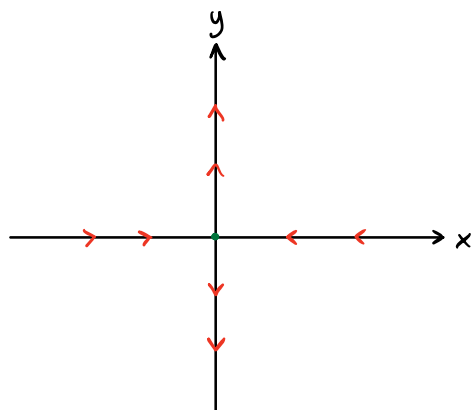
$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

punto di equilibrio $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} 3x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad JF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

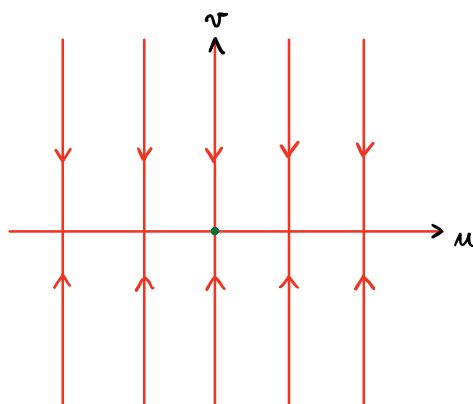
il sistema linearizzato è

$$\begin{cases} \dot{u} = 0 \\ \dot{v} = -v \end{cases}$$



$$\begin{aligned} y_0 &= 0 & y(t) &= 0 \\ x_0 &= 0 & x(t) &= 0 \end{aligned}$$

il punto fisso è instabile



$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$$

$$\lambda^2 + \lambda = 0 \quad \lambda = 0 \quad \lambda = -1$$

$$\begin{cases} u(t) = u_0 \\ v(t) = v_0 e^{-t} \end{cases}$$

il punto fisso è stabile

ESEMPIO

Sistema di Lotka - Volterra : modello per descrivere l'evoluzione di un sistema in cui interagiscono due specie animali : predatori e prede. Indichiamo con x le prede e con y i predatori.

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3-x-2y) \\ \dot{y} = y(2-x-y) \end{cases} \quad x \geq 0, y \geq 0$$

Punti fissi

$$\begin{cases} x(3-x-2y) = 0 \\ y(2-x-y) = 0 \end{cases}$$

$$(x, y) = (0, 0), (x, y) = (0, 2), (x, y) = (3, 0)$$

$$x = 3 - 2y \quad 2 - 3 + 2y - y = 0$$

$$-1 + y = 0 \rightarrow y = 1$$

$$(x, y) = (1, 1)$$

Abbiamo

$$\nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} 3 - 2x - 2y & -2x \\ -y & 2 - x - 2y \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = 3 - x - 2y - x = 3 - 2x - 2y$$

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = 2 - x - y - y = 2 - x - 2y$$

$$(0, 0) \quad \nabla F(0, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$$

$$v_1 = (1, 0), \quad v_2 = (0, 1) \quad \text{NODO INSTABILE}$$

$$(0, 2) \quad \nabla F(0, 2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$$

NODO STABILE

$$-2(\mu + \nu) = -\nu \rightarrow -2\mu = \nu \quad v_1 = (1, -2)$$

$$-2(\mu + \nu) = -2\nu \rightarrow \mu = 0 \quad v_2 = (0, 1)$$

$$(3, 0) \quad \nabla F(3, 0) = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1$$

NODO STABILE

$$-3(\mu + 2\nu) = -3\mu \rightarrow \nu = 0 \quad v_1 = (1, 0)$$

$$-3(\mu + 2\nu) = -\mu \rightarrow -6\nu = 2\mu \quad v_2 = (-3, 1)$$

$$(1,1) \quad JF(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$$

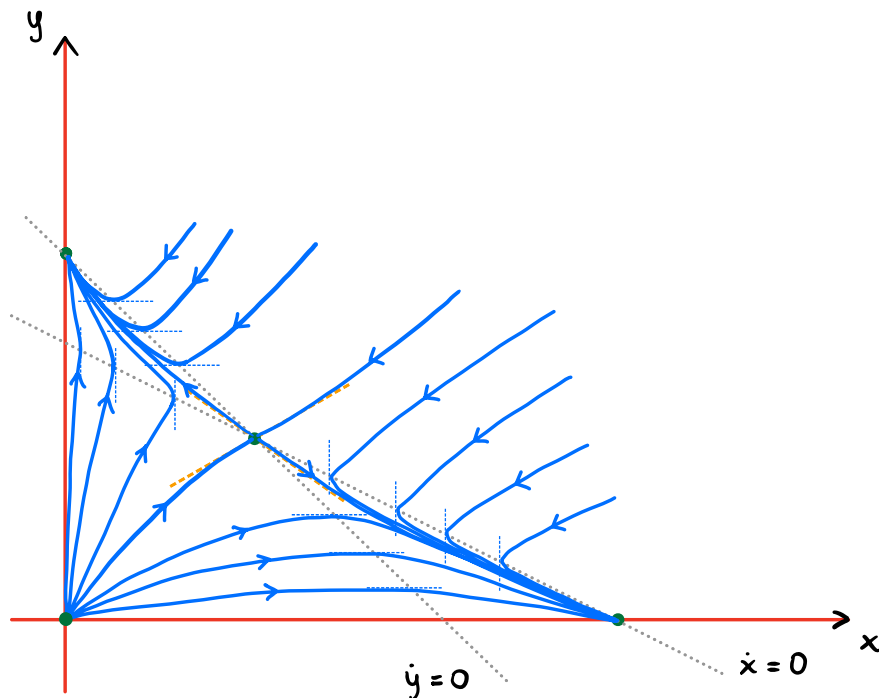
$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

SELLA

$$-u - 2v = (-1 + \sqrt{2})u \rightarrow -2v = \sqrt{2}u \quad v_1 = (1, -1/\sqrt{2})$$

$$-u - v = (-1 - \sqrt{2})u \rightarrow -v = -\sqrt{2}u \quad v_2 = (1, 1/\sqrt{2})$$

Tutti i punti fissi sono iperbolici e per il teorema di Hartman - Grobman la stabilità del punto fisso del sistema linearizzato corrisponde a quella del sistema nonlineare.



se $x_0 = 0$ allora $x(t) = 0$, se $y_0 = 0$ allora $y(t) = 0$

$$\dot{x} = 0 \rightarrow 3 - x - 2y = 0 \quad y = (3 - x)/2$$

$$\dot{y} = 0 \rightarrow 2 - x - y = 0 \quad y = 2 - x$$

rette associate agli autovettori v_1 e v_2 in $(1,1)$:

$$y - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (x - 1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} (x - 1)$$

ESERCIZIO

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 + y^2 \\ \dot{y} = -y - yx^3 \end{cases} \quad \text{stabilità di } (0,0)?$$

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} -3x^2 & 2y \\ -3yx^2 & -1-x^2 \end{pmatrix}$$

$$JF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{che ha autovalori } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$$

$(0,0)$ non è un punto fisso iperbolico

$$\text{Pongo } V(x,y) = Ax^{2m} + By^{2n} \text{ con } A, B > 0 \\ m, n \in \mathbb{N}$$

allora $(0,0)$ è un punto di minimo isolato di $V(x,y)$

ed $\exists U(0,0)$ t.c. $V(x,y) > V(0,0) \quad \forall (x,y) \in U(0,0) \setminus \{(0,0)\}$

$$\dot{V}(x,y) = \nabla V(x,y) \cdot F(x,y) =$$

$$\underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) \cdot (-x^3 + y^2)}_{2mA x^{2m-1}} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial y}(x,y) \cdot (-y - yx^3)}_{2nB y^{2n-1}} =$$

$$-2mA x^{2m+1} - 2nB y^{2n} + 2mA x^{2m-1} y^2 - 2nB y^{2n} x^3$$

cerchiamo m, n, A, B tali che la somma degli ultimi due addendi sia 0

$$\begin{cases} 2m - 1 = 3 \longrightarrow m = 2 \\ 2n = 2 \longrightarrow n = 1 \\ 2mA = 2nB \longrightarrow B = 2A \end{cases}$$

risultante

$$\dot{V}(x, y) = -4A(x^6 + y^6) > 0, \quad \forall (x, y) \in U(0, 0) \setminus \{(0, 0)\}$$

quindi $V(x, y) = x^4 + 2y^2$ ($A = 1$) è funzione di Lyapunov definita di $(0, 0)$; segue che $(0, 0)$ è asintoticamente stabile nel senso di Lyapunov.

ESERCIZIO

$$\begin{cases} \dot{x} = (\mu x + 2y)(z + 1) \\ \dot{y} = (-x + \mu y)(z + 1) \\ \dot{z} = -z^3 \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

$$JF(x, y, z) = \begin{pmatrix} \mu(z+1) & 2(z+1) & \mu x + 2y \\ -(z+1) & \mu(z+1) & -x + \mu y \\ 0 & 0 & -3z^2 \end{pmatrix}$$

$$JF(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} \mu & 2 & 0 \\ -1 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda^2 - 2\mu\lambda + (\mu^2 + 2) &= 0 \\ \lambda_{2,3} &= \mu \pm i\sqrt{2} \end{aligned}$$

$(0, 0, 0)$ non è iperbolico

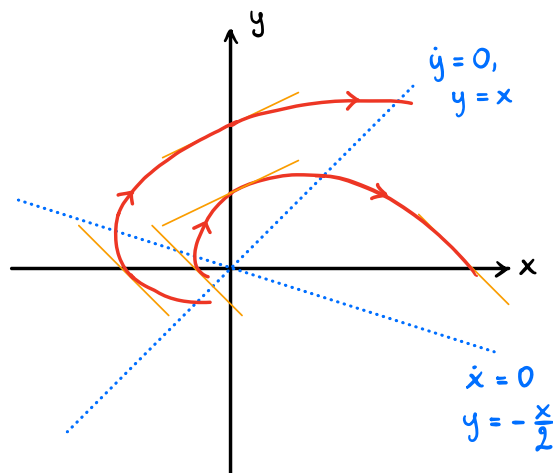
Mostriamo che $\{z=0\}$ è invariante:

$$\dot{z} = -z^3 \quad \dot{z}|_{z=0} = 0$$

Sul piano $z=0$ la dinamica è data dal sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + 2y \\ \dot{y} = -x + \mu y \end{cases}$$

Per $\mu > 0$ l'origine $(0,0)$ è un fuoco instabile



$$\mu = 1$$

$$(\dot{x}, \dot{y})|_{x=0} = y(2, 1)$$

$$(\dot{x}, \dot{y})|_{y=0} = x(1, -1)$$

si può allora concludere che $(0,0,0)$ è instabile

$$(\exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. } \forall \delta > 0 \exists y \in B_y(x_0) \text{ e } \bar{t} > 0 \text{ t.c.}$$

$$d(\varphi(y, \bar{t}), x_0) > \varepsilon)$$

Per $\mu < 0$ cerchiamo una funzione di Lyapunov del tipo

$$V(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y, z) = & [2\alpha x(\mu x + 2y) + 2\beta y(-x + \mu y)](z+1) \\ & + 2\gamma z(-z^3) \end{aligned}$$

$$= [\mu (2\alpha x^2 + 2\beta y^2) + 4\alpha xy - 2\beta xy](z+1) - 2\gamma z^4$$

pongo $\beta = 2\alpha = 1 = \gamma$

$$\dot{V}(x, y, z) = \mu (x^2 + 2y^2)(z+1) - 2z^4$$

se $z > -1$, $\dot{V}(x, y, z) < 0 \quad \forall (x, y, z) \in U(\vec{0}) \setminus \{\vec{0}\}$

con U intorno di $\vec{0} = (0, 0, 0)^T$ che soddisfa $z > -1$

Allora

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 + z^2$$

è una funzione di Lyapunov tratta di $\vec{0}$ che per il secondo teorema di L. è asintoticamente stabile.

Per $\mu = 0$ si ha

$$\dot{V}(x, y, z) = -2z^4 \leq 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

allora $V(x, y, z)$ è una funzione di Lyapunov di $\vec{0}$ che per il primo teorema di L. è stabile. È asintoticamente stabile?

$$\left(\exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall y \in B_\delta(x) \text{ si ha } d(x, \varphi(y, t)) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \right)$$

In $z = 0$ che è un insieme invariante, si ha

$$\dot{x} = 2y, \quad \dot{y} = -x$$

quindi $(x, y) = (0, 0)$ è un punto fisso di tipo centro e le traiettorie sono circonferenze, segue che $(0, 0, 0)$ per il sistema originario non è asintoticamente stabile.

Notiamo che considerato $Y = (x, y, 0)$ si ha

$$\omega(Y) = \mathcal{O}(x, y, 0) \subset \{\dot{V} = 0\},$$

come ci aspettiamo dal teorema di invarianza di La Salle;
 inoltre $\{\dot{V} = 0\}$ è un insieme invariante.