

$$\dot{X} = AX \quad X(0) = X_0$$

$$X \in \mathbb{R}^n, \quad A \in M_{\mathbb{R}}(n)$$

Soluzione in forma integrale

$$X(t) = X(0) + \int_0^t AX(s) ds$$

Metodo delle approssimazioni successive

$$\begin{cases} X_0(t) = X_0 \\ X_{k+1} = X_0 + \int_0^t AX_k(s) ds \end{cases}$$

quindi per esempio si ha $X_1 = X_0 + AX_0 t = (I + At)X_0$
ed è facile vedere che

$$X_k(t) = \left(\sum_{i=0}^k \frac{A^i t^i}{i!} \right) X_0$$

Perciò la soluzione si ha per $k \rightarrow +\infty$:

$$X(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i t^i}{i!} X_0 = \exp(At) X_0$$

dove abbiamo posto $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{B^i}{i!} = \exp(B)$ (e condizione di mostrare che la serie è convergente)

Esempio 1

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \rightarrow A^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k)$$

$$\exp(At) = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) \quad \text{è convergente per ogni } t \in \mathbb{R}$$

$$\text{soluzione} \quad x_i(t) = e^{\lambda_i t} c_i$$

Esempio 2

$A = \lambda I$ con I matrice identità

$$\rightarrow A^n = \lambda^n I$$

$$X(t) = e^{\lambda t} X_0$$

Esempio 3

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ allora $\det A = 0$ e A è una matrice nilpotente

$$A^2 = 0 \rightarrow \exp(At) = I + At = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

soluzione di $\dot{x} = 0, \dot{y} = x$ è $x(t) = x_0, y(t) = y_0 + x_0 t$

Questi esempi sono abbastanza generali e ci si può ricondurre ad una combinazione di questi nel caso in cui A ha autovalori reali

Esercizio

Trovare le soluzioni di $\dot{X} = AX$ nei seguenti casi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

①

②

③

① Notiamo che $A^2 = I$, quindi

$$A^{2k} = I \quad A^{2k+1} = A$$

ricordando che

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{b^{2m} t^{2m}}{(2m)!} = \cosh(bt) \quad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{b^{2m+1} t^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sinh(bt)$$

si ha $X(t) = (I \sinh t + A \cosh t) X_0$,

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \sinh t + y_0 \cosh t \\ y(t) = y_0 \sinh t + x_0 \cosh t \end{cases}$$

② lo lascia a loro (rientra in un caso già visto)

③ $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = 0$

$$X(t) = \left(I + At + \frac{A^2 t^2}{2} \right) X_0$$

$$x(t) = x_0$$

$$y(t) = y_0 + t x_0$$

$$z(t) = z_0 + t y_0 + \frac{t^2}{2} x_0$$

Teorema di convergenza dell'esponenziale di matrici

La serie esponenziale

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} \quad \text{con } A \text{ matrice quadrata } n \times n$$

a) converge per ogni $t \in \mathbb{R}$, uniformemente su ogni compatto di $\mathbb{R}$

b) il limite è una matrice funzione continua di t , per ogni $t \in \mathbb{R}$, che indichiamo con $\exp(At)$

Questo teorema basta a dimostrare l'esistenza del flusso integrale di un qualsiasi sistema dinamico continuo lineare $\dot{X} = AX$, dato da

$$\exp(At) X(0)$$

Ricordo poi due teoremi.

Teorema della somma degli esponenti.

Se due matrici quadrate $n \times n$ A e B commutano tra loro, cioè $AB = BA$ allora l'esponenziale della somma è il prodotto degli esponenziali

$$\exp(At + Bt) = \exp(At) \exp(Bt)$$

Teorema di derivazione dell'esponenziale

Valore $\frac{d}{dt} \exp(At) = A \exp(At) = \exp(At) A$

AUTOVALORI REALI

Il calcolo dell'esponenziale di matrice può diventare più semplice se si sfruttano gli autovettori della matrice data; per una matrice diagonalizzabile (in campo reale) si riduce al calcolo dell'esponenziale di una matrice diagonale

cambiamenti di coordinate

cambiamento di coordinate lineare $Y = BX$ (B matrice $n \times n$ invertibile)

$$\text{Si ha } \dot{Y} = B\dot{X} = BAX = BAB^{-1}Y = CY$$

che è un sistema dinamico lineare definito da una matrice (C) ottenuta per coniugio da A .

La soluzione è data da $Y(t) = \exp(Ct)Y_0$, con $Y_0 = BX_0$.

La relazione tra $X(t)$ e $Y(t)$ porta a scrivere

$$X(t) = B^{-1} \exp(Ct) B X_0$$

Le matrici $B^{-1} \exp(Ct) B$ e $\exp(Ct)$ che esprimono i flussi integrali sono coniugate attraverso la stessa matrice B del cambiamento di coordinate.

Perciò ha senso creare un sistema di coordinate in cui la trasformazione definita da A abbia una forma semplice, risolvere il sistema dinamico lineare in quel sistema di coordinate, e poi tornare al sistema originale usando la trasformazione inversa.

Se una matrice A è diagonalizzabile* è equivalente per coniugio ad una matrice diagonale

$$BAB^{-1} = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

dove i λ_i sono gli autovalori di A .

In particolare, indicando con V la matrice che ha per colonne gli autovettori V_i si ha $V^{-1}AV = D$.

* il numero di autovalori contati con le rispettive molteplicità è uguale a n
la molteplicità algebrica di ogni autovalore corrisponde con la rispettiva molteplicità geometrica

(Se gli autovalori sono tutti reali e distinti allora la matrice è diagonalizzabile.) ³

Teorema del sistema diagonalizzabile

Se A è diagonalizzabile allora tutte le orbite di $\dot{X} = AX$ si possono esprimere mediante combinazioni lineari di $\exp(\lambda t)$.

DIMENSIONE 2

$$\dot{X} = AX$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \operatorname{tr} A \lambda + \det A = 0$$

il discriminante dell'equazione di secondo grado è

$$\Delta = (\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}$$

se $\Delta > 0 \rightarrow$ due autovalori reali distinti e quindi due autovettori reali e linearmente indipendenti V_1 e V_2

esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

scrivere il flusso integrale di $\dot{X} = AX$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}$$

$$u_x + 2u_y = (2 + \sqrt{3})u_x$$

$$2u_y = (1 + \sqrt{3})u_x$$

$$u = (1, (1 + \sqrt{3})/2)^T$$

$$\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$u_x + 2u_y = (2 - \sqrt{3})u_x$$

$$2u_y = (1 - \sqrt{3})u_x$$

$$v = (1, (1 - \sqrt{3})/2)^T$$

costruiamo $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (1 + \sqrt{3})/2 & (1 - \sqrt{3})/2 \end{pmatrix}$

allora $X(t) = V Y(t)$ con $Y(t)$ flusso integrale di $\dot{Y} = DY$

e $D = \operatorname{diag}(2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$, cioè

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{(2 + \sqrt{3})t} & 0 \\ 0 & e^{(2 - \sqrt{3})t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{x,0} \\ w_{y,0} \end{pmatrix}$$

Risultato

$$X(t) = V \begin{pmatrix} e^{(2+\sqrt{3})t} & 0 \\ 0 & e^{(2-\sqrt{3})t} \end{pmatrix} V^{-1} X(0)$$

Per $\Delta < 0$ gli autovalori sono complessi, non possono esistere autovettori reali, quindi A non potrà essere in forma diagonale in nessun sistema di riferimento reale.

Nel caso $\Delta = 0$ non si può decidere se la matrice è diagonalizzabile soltanto dal valore di Δ

esempi

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

A è già in forma diagonale

$$B = \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

B non è diagonalizzabile poiché tutti gli autovettori sono linearmente dipendenti da $(1, 0)$ (quindi la mult. algebrica (2) è diversa da quella geometrica (1))

NODI e SELLE

matrice A con autovalori reali λ_1, λ_2 ; V_1, V_2 sono gli autovettori corrispondenti; nella base $\{V_1, V_2\}$ la matrice A si trasforma per coniugio con $B^{-1} = V = [V_1, V_2]$. Si ha $BAB^{-1} = V^{-1}AV = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Il comportamento qualitativo delle orbite si può studiare nel sistema in forma canonica il cui flusso integrale è dato da

$$\begin{cases} x(t) = e^{\lambda_1 t} x_0 \\ y(t) = e^{\lambda_2 t} y_0 \end{cases}$$

La traiettoria (cioè la curva descritta in $\mathbb{R}^2$ dalle soluzioni) si può ricavare come segue (limitandosi al primo quadrante)

$$\frac{x^{\lambda_2}}{y^{\lambda_1}} = \frac{x_0^{\lambda_2}}{y_0^{\lambda_1}} = \text{cost}$$

↳ quelle degli altri quadranti si ottengono per simmetria

Il comportamento qualitativo dipende dai segni di λ_1 e λ_2

4

1) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$)

tutte le orbite vanno all'infinito per $t \rightarrow -\infty$ e hanno come limite l'origine per $t \rightarrow +\infty$

$$E^s(0) = \mathbb{R}^2 \quad (E^u(0) = \mathbb{R}^2)$$

le traiettorie per $x_0 \neq 0$ sono $y = y_0 \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\lambda_2/\lambda_1}$

1a) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ ($\lambda_2 > \lambda_1 > 0$)

tutte le orbite tendono per $t \rightarrow +\infty$ ($-\infty$) all'origine con tangente che tende all'orizzontale (eccetto la curva $x=0$);
il punto di equilibrio si dice nodo $\hookrightarrow x_0 = 0$

1b) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ ($\lambda_1 > \lambda_2 > 0$)

tutte le orbite tendono per $t \rightarrow +\infty$ ($-\infty$) all'origine con tangente che tende alla verticale (eccetto la curva $y=0$);
il punto di equilibrio si dice nodo $\hookrightarrow y_0 = 0$

1c) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ ($\lambda_1 = \lambda_2 > 0$) con A matrice diagonalizzabile

tutte le traiettorie sono delle semirette il cui punto d'inizio coincide con l'origine; le orbite tendono all'origine per $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$);
il punto di equilibrio si dice stella

Esercizio sul caso 1b

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - 12\lambda + 27 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 6 \pm \sqrt{36 - 27}$$

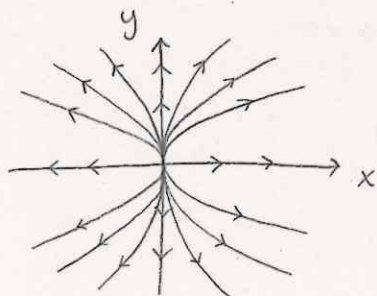
$$\lambda_1 = 9$$

$$\lambda_2 = 3$$

$$y = y_0 \left(\frac{x}{x_0} \right)^{1/3}$$

$$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$$

$$E^u(0) = \mathbb{R}^2$$



$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X, \quad X = (x, y)^T$$

Ora vogliamo tornare a $\dot{X} = AX$. Noto che se pongo $X = V_1$ e $X = V_2$ si ha

$$\dot{X} = AV_1 = \lambda_1 V_1 \quad \text{e} \quad \dot{X} = AV_2 = \lambda_2 V_2$$

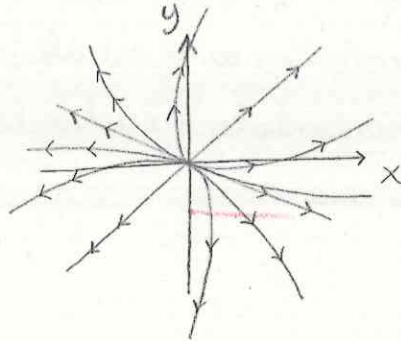
quindi X e $\dot{X}$ sono paralleli.

Cerco V_1 :

$$5u + 4v = 9u \rightarrow u = v \rightarrow V_1 = (1, 1)^T$$

Cerco V_2 :

$$5u + 4v = 3u \rightarrow v = -\frac{1}{2}u \rightarrow V_2 = \left(1, -\frac{1}{2}\right)^T$$



Esercizio sul caso 1c con matrice A non diagonalizzabile

$$\dot{X} = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{è una matrice nilpotente } N^2 = 0$$

scrivo $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2I + N$

$$e^{At} = e^{(2I+N)t} = e^{2t} e^{tN}, \quad e^{tN} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} N^k = I + tN = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow e^{At} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E^u(0) = \mathbb{R}^2$$

2) $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ ($\lambda_1 < 0 < \lambda_2$)

tutte le orbite con $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$ vanno all'infinito per $t \rightarrow \pm\infty$. Ci sono due curve eccezionali: $y = 0$ dove le orbite tendono all'origine per $t \rightarrow -\infty$; $x = 0$ dove le orbite tendono all'origine per $t \rightarrow +\infty$.

Le traiettorie sono

$$y = y_0 \left(\frac{x_0}{x} \right)^{-\lambda_2/\lambda_1}$$

per $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$ le traiettorie sono asintotiche all'asse x per $t \rightarrow +\infty$ e all'asse y per $t \rightarrow -\infty$; il punto di equilibrio si dice di tipo sella

Esercizio sul caso 2

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -9 & 13 \end{pmatrix}$$

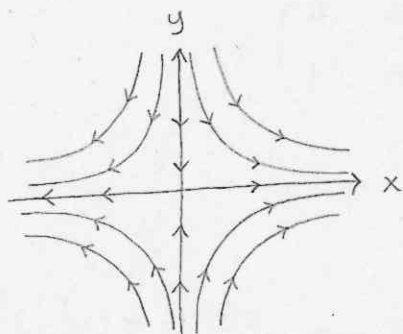
$$\lambda^2 - 5\lambda + (-104 + 54) = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 50 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{25 + 200}) \begin{cases} \lambda_1 = 10 \\ \lambda_2 = -5 \end{cases}$$

$$y = y_0 \left(\frac{x_0}{x} \right)^{1/2}$$

$$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$$



$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} X, \quad X = (x, y)^T$$

$$E^u(0) = \{y = 0\}, \quad E^s(0) = \{x = 0\}$$

Ora vogliamo tornare a $\dot{X} = AX$. Cerchiamo come nell'esempio del nodo gli autovettori

Cerca V_1 :

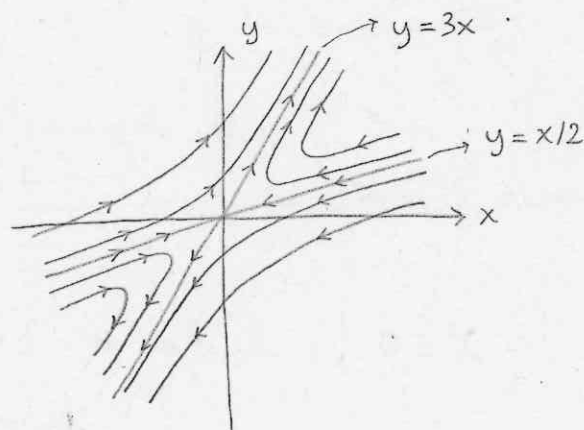
$$-8u + 6v = 10u \rightarrow v = 3u$$

$$E^u(0) = \{3x - y = 0\}$$

Cerca V_2 :

$$-8u + 6v = -5u \rightarrow v = \frac{1}{2}u$$

$$E^s(0) = \{x - 2y = 0\}$$



3) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$ ($\lambda_2 > 0$)

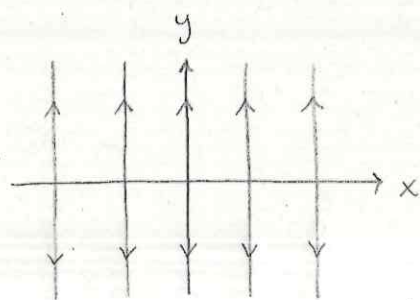
le traiettorie sono le rette $x = \text{cost}$ e le orbite tendono all'infinito per $t \rightarrow -\infty$, salvo la linea dei punti di equilibrio per $y = 0$
(+∞)

Esercizio sul caso 3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 3\lambda &= 0 \\ \lambda(\lambda - 3) &= 0 \end{aligned} \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$$



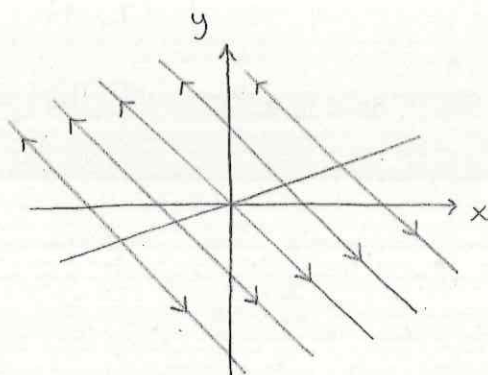
$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X$$

passando a $\dot{X} = AX$, con V_1 :

$$\mu - 2\nu = 0 \rightarrow \mu = 2\nu \rightarrow E^c(0) = \{x - 2y = 0\}$$

con V_2 :

$$\mu - 2\nu = 3\mu \rightarrow \mu = -\nu \rightarrow E^s(0) = \{x + y = 0\}$$



la matrice non è diagonalizzabile

Esercizio (autovalore con m.a. 2 e m.g. 1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 = 0, \text{ si ha } \mu - 2\nu = 0 \quad \mu = 2\nu$$

la m.g. di $\lambda = 0$ è $1 < 2$

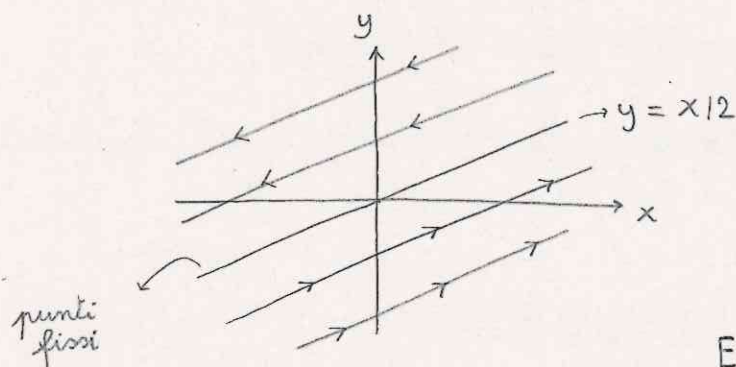
Avendo tutti gli autovalori nulli la matrice A è nilpotente, in particolare $A^2 = 0$. 6

Allora

$$\exp(At) = I + At = \begin{pmatrix} 1+2t & -4t \\ t & 1-2t \end{pmatrix}$$

e il flusso integrale risulta

$$\begin{cases} x(t) = (1+2t)x_0 - 4ty_0 \\ y(t) = tx_0 + (1-2t)y_0 \end{cases} \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \left(y_0 - \frac{x_0}{2}\right)$$



$$x(t) = 2t(x_0 - 2y_0) + x_0$$

$$\text{se } x_0 > 2y_0$$

$$x \rightarrow +\infty \text{ per } t \rightarrow +\infty$$

$$E^c(0) = \mathbb{R}^2$$

AUTOVALORI COMPLESSI

Se la matrice di un sistema dinamico lineare ha autovalori complessi può essere diagonalizzabile in campo complesso.

Consideriamo le matrici della forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = aI + bJ$$

Il sottospazio di queste matrici è generato da I, J (si noti che $J^2 = -I$). La forma $aI + bJ$ dà la rappresentazione algebrica del numero complesso $a + ib$.

L'insieme C è chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione di matrici.

Il prodotto gode della proprietà commutativa.

Se $z = aI + bJ$, allora $a = \operatorname{Re}(z)$, $b = \operatorname{Im}(z)$. Poiché per ogni matrice di C

$$\det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 \geq 0$$

definiamo per ogni $z \in C$, il modulo di z come $|z| = (\det z)^{1/2}$ ed esso ha le stesse proprietà della lunghezza di un vettore.

Poiché il modulo di un numero complesso è il raggio delle coordinate polari

vogliamo definire la variabile angolo. Se $r > 0$ esiste un'unica matrice di rotazione tale che

$$Z = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli

$$|ZW| = \sqrt{\det(ZW)} = |Z||W|$$

Se poi $Z = r(\cos \theta I + \sin \theta J)$, $W = s(\cos \phi I + \sin \phi J)$, $r, s \in \mathbb{R}$ allora

$$ZW = rs [\cos(\theta + \phi)I + \sin(\theta + \phi)J]$$

Definiamo complesso coniugato di Z e lo indichiamo con $\bar{Z}$, la matrice trasposta di Z (che è in $\mathbb{C}$)

$$\bar{Z} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^T = aI - bJ \simeq (a, -b)$$

Valgono le proprietà $\overline{ZW} = (ZW)^T = W^T Z^T = \bar{W} \bar{Z} = \bar{Z} \bar{W}$

$$\overline{Z+W} = \bar{Z} + \bar{W}$$

L'inverso di $Z \in \mathbb{C}$ si può calcolare come $Z^{-1} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2}$.

La potenza n -esima si ottiene per induzione $Z^0 = I$, $Z^{n+1} = Z^n Z$, dove n può essere negativo purché si intenda $Z^{-n} = (Z^{-1})^n$.

Sistemi dinamici lineari complessi

Consideriamo il sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Poniamo $Z = xI + yJ$, $W = aI + bJ$, si ha

$$\dot{Z} = WZ$$

La soluzione si ottiene mediante la funzione esponenziale di argomento complesso definita dalla serie

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{W^i t^i}{i!} = \exp(Wt)$$

la convergenza è garantita dal teorema di convergenza in norma, usando il modulo del numero complesso come norma

Se la condizione iniziale è $z(0) = z_0 = x_0 I + y_0 J$:

$$z(t) = x(t)I + y(t)J = \exp(\omega t) z_0$$

da cui

$$x(t) = \operatorname{Re}(z(t)) \quad e \quad y(t) = \operatorname{Im}(z(t))$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = bJ \quad (\text{corrisponde ad un numero immaginario puro})$$

per le potenze pari si ha $A^2 = -b^2 I$, $A^{2k} = (A^2)^k = (-1)^k b^{2k} I$ matrici diagonali $\Rightarrow$ numeri reali

mentre per le potenze dispari $A^3 = A^2 A = -b^3 J$, $A^{2k+1} = A^{2k} A = (-1)^k b^{2k+1} J$ matrici antisimmetriche $\Rightarrow$ numeri immaginari

le ridotte della serie esponenziale si possono scrivere come

$$\sum_{k=0}^{2s+1} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{m=0}^s \left[\frac{b^{2m+1} t^{2m+1} (-1)^m}{(2m+1)!} J + \frac{b^{2m} t^{2m} (-1)^m}{(2m)!} I \right]$$

è lecito separare la parte di grado pari da quella di grado dispari perché la serie converge assolutamente, infatti

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{b^{2m} t^{2m} (-1)^m}{(2m)!} I = \cos(bt) I$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{b^{2m+1} t^{2m+1} (-1)^m}{(2m+1)!} J = \sin(bt) J$$

da cui si ottiene $\exp(At) = \cos(bt) I + \sin(bt) J$ che è la formula di Eulero

la soluzione del sistema dinamico risulta

$$\begin{aligned} x(t)I + y(t)J &= \exp(bJt)(x_0 I + y_0 J) \\ &= [\cos(bt)I + \sin(bt)J](x_0 I + y_0 J) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x(t) = \cos(bt)x_0 - \sin(bt)y_0 \\ y(t) = \sin(bt)x_0 + \cos(bt)y_0 \end{cases}$$

che è la soluzione dell'oscillatore armonico

$$\dot{X} = AX \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -by \\ \dot{y} = bx \end{cases} \rightarrow \ddot{x} = -b^2 x$$

Esempio $A = aI$

$$\exp(At) = e^{at} I, \quad \text{soluzioni } x(t) = e^{at} x_0, \quad y(t) = e^{at} y_0$$

CENTRI e FUOCHI

Poniamo $A = aI + bJ$, allora per il teorema della somma degli esponenti (I, J commutano)

$$\exp(At) = \exp(atI) \exp(btJ)$$

e quindi

$$\exp(At) = e^{at} [\cos(bt)I + \sin(bt)J]$$

Le soluzioni di $\dot{X} = AX$ (o di $\dot{z} = w z$, con $z = xI + yJ$, $w \in \mathbb{C}$, con $A \in \mathbb{C}$) sono

$$\begin{cases} x(t) = e^{at} [\cos(bt)x_0 - \sin(bt)y_0] \\ y(t) = e^{at} [\sin(bt)x_0 + \cos(bt)y_0] \end{cases}$$

$$(o \ x(t)I + y(t)J = e^{at} [\cos(bt)I + \sin(bt)J] (x_0I + y_0J))$$

Il flusso integrale al tempo t si può descrivere come una rotazione di un angolo bt seguita da un'omotetia di un fattore $\exp(at)$.

Vogliamo generalizzare questa soluzione al caso di una matrice arbitraria 2×2 con autovalori complessi coniugati $a+ib, a-ib$.

Consideriamo A come operatore lineare su $\mathbb{C}^2$, allora in $\mathbb{C}^2$ esistono due autovettori

$$AW = (a+ib)W, \quad AZ = (a-ib)Z$$

Si può scegliere $Z = \overline{W}$. È una facile verifica

Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ i due vettori

$$Y = \operatorname{Re}(W), \quad X = \operatorname{Im}(W)$$

Segue che

$$AW = A(Y+iX) = AY+iAX \stackrel{\text{infatti } AW=(a+ib)(Y+iX)}{=} (a+ib)(Y+iX)$$

e separando parte reale e immaginaria

$$\begin{cases} AX = aX + bY \\ AY = -bX + aY \end{cases}$$

Supponiamo di usare un sistema di riferimento definito dalla base $\{X, Y\}$.

Nella nuova base l'applicazione associata ad A è associata a

$$Q = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = aI + bJ$$

Si arriva al risultato

$$\exp(At) = \exp(B^{-1}QBt) = B^{-1}\exp(Qt)B$$

con $B^{-1} = [X, Y]$.

In conclusione, se una matrice 2×2 ha autovalori complessi coniugati è sempre possibile riportarla con un cambiamento di riferimento ad una matrice che appartiene a $\mathbb{C}$ e che corrisponde a uno degli autovalori

Studiamo il comportamento qualitativo con la forma canonica

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - by \\ \dot{y} = bx + ay \end{cases}$$

- 1) $a < 0$ ($a > 0$) tutte le orbite (diverse dall'equilibrio) vanno all'infinito per $t \rightarrow -\infty$ ($+\infty$) e tendono al punto di equilibrio nell'origine per $t \rightarrow +\infty$ ($-\infty$); le traiettorie sono delle spirali che si avvolgono attorno al punto di equilibrio con frequenza pari alla parte immaginaria b ; il punto di equilibrio si dice fuoco
- 2) $a = 0$ tutte le orbite (diverse dall'equilibrio) girano attorno al punto di equilibrio, ripassando sempre per gli stessi punti: ogni orbita è periodica; il punto di equilibrio si dice di tipo centro; per $b > 0$ la rotazione attorno al punto di equilibrio è in senso antiorario; il sistema dinamico ammette un integrale primo: $E(x, y) = x^2 + y^2$

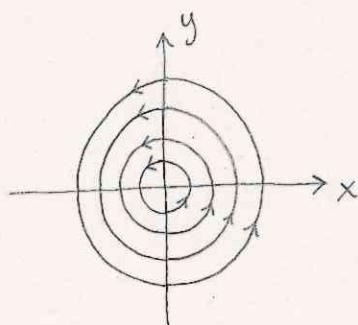
Esercizio sul caso 2

la traccia è nulla e
il determinante è > 0

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda = \pm i$$

$$E^c(0) = \mathbb{R}^2$$



$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$$

passando a $\dot{X} = AX$, calcoliamo un autovettore associato a $+i$:

$$3u_1 - 10u_2 = iu_1$$

$$\mu_1 = 1, \quad 3 - 10\mu_2 = i \rightarrow \mu_2 = \frac{1}{10}(3-i)$$

$$Y = (1, 3/10)^T, \quad X = (0, -1/10)^T$$

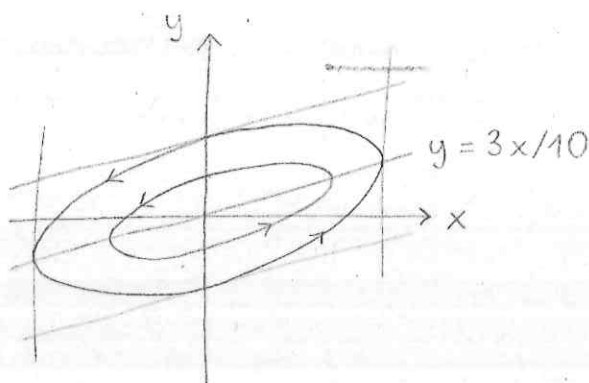
$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/10 & 3/10 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\exp(At) = B^{-1} \exp(Qt) B =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/10 & 3/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sin t + \cos t & -10\sin t \\ \sin t & \cos t - 3\sin t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = (3\sin t + \cos t)x_0 - (10\sin t)y_0 \\ y(t) = (\sin t)x_0 + (\cos t - 3\sin t)y_0 \end{cases}$$

Notiamo che $AX = Y$ e $AY = -X$, quindi nei punti che appartengono alla retta $x = 0$ le velocità sono parallele a Y , nei punti che appartengono alla retta $y = \frac{3}{10}x$ le velocità sono parallele a X .



$$\text{se } x_0 = 0, y_0 = 1$$

allora

$$x(t) = -10\sin t$$

$$y(t) = \cos t - 3\sin t$$

per $\tilde{t} = \pi/2$ si ha

$$x(\tilde{t}) = -10$$

$$y(\tilde{t}) = -3$$

Esercizio sul caso 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}i$$

$$E^u(0) = \mathbb{R}^2$$

notiamo che le direzioni della velocità dei punti sull'asse x sono tutte

parallela alla retta $y = -2x$ e quelle delle velocità dei punti dell'asse y sono parallele alla retta $y = x$ (infatti $\dot{x} = x + y$, $\dot{y} = -2x + y$)

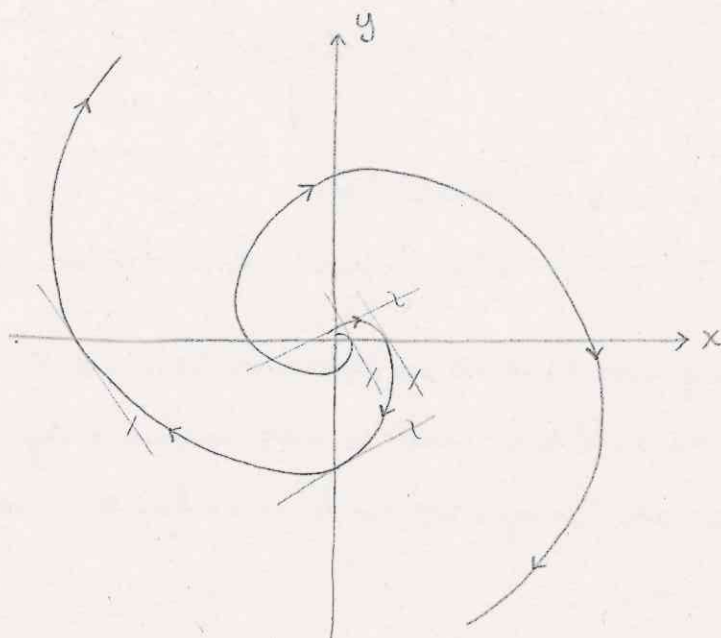
9

questa proprietà vale per ogni sistema lineare

La forma canonica è definita dalla matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

rotazione oraria



la direzione delle rette tangenti alla traiettoria nei punti $x = 0$ è quella della retta $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x$; la

direzione delle rette tangenti alla traiettoria nei punti $y = 0$ è quella della retta $y = -\sqrt{2}x$; le due direzioni sono tra loro perpendicolari (in quanto sono ortogonali i vettori che rappresentano le colonne di Q)

Passiamo allo studio di $\dot{X} = AX$:

questa volta le rette da considerare sono $y = -2x$ ($y = 0$) e $y = x$ ($x = 0$)

SISTEMA SEMISEMPLICE

Una matrice quadrata A $n \times n$ a coefficienti reali si dice matrice semisemplice se è diagonalizzabile in senso complesso, cioè se esiste una base di $\mathbb{C}^n$ formata da autovettori $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ cioè tale che

$$AV_k = \lambda_k V_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{C}, \quad k = 1, \dots, n \quad \text{nel senso di m.a.}$$

Una matrice con tutti gli autovalori, reali o complessi, semplici è semisemplice (per il teorema fondamentale dell'algebra). Una matrice può essere semisemplice anche con degli autovalori multipli.

Teorema del sistema semisemplice

Se la matrice A è semisemplice, allora tutte le orbite del sistema dinamico

$$\dot{X} = AX, \quad X \in \mathbb{R}^n$$

si possono esprimere come combinazioni lineari di funzioni esponenziali $\exp(a_k t)$ (dove gli a_k sono le parti reali degli autovalori di A) moltiplicate per funzioni trigonometriche $\cos(b_k t)$, $\sin(b_k t)$ (dove i b_k sono le parti immaginarie degli autovalori di A)

Costruiamo una base di $\mathbb{R}^n$ costituita come segue

$$B^{-1} = [V_1, \dots, V_s, \operatorname{Im}(W_1), \operatorname{Re}(W_1), \dots, \operatorname{Im}(W_r), \operatorname{Re}(W_r)]$$

dove

$$AV_k = c_k V_k, \quad 1 \leq k \leq s, \quad c_k \text{ autovalori reali}$$

$$AW_k = (a_k + ib_k)W_k, \quad 1 \leq k \leq r, \quad a_k \pm ib_k \text{ autovalori complessi coniugati}$$

Scriviamo la matrice Q che esprime la stessa applicazione lineare di A nella base così definita. Le prime s colonne di Q sono quelle di una matrice diagonale, con gli autovalori reali sulla diagonale. Per ogni coppia di autovalori complessi coniugati $a \pm ib$ appare in Q il blocco 2×2

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

La matrice A può essere trasformata per coniugio nella matrice $Q = BAB^{-1}$; la matrice Q ha sulla diagonale gli autovalori reali e in blocchi 2×2 vicino alla diagonale gli autovalori complessi:

$$Q = \operatorname{diag}(c_1, \dots, c_s, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$$

$$\text{con } \lambda_k = a_k I + b_k J$$

Allora

$$\exp(Qt) = \operatorname{diag}(\exp(c_1 t), \dots, \exp(c_s t), \exp(\lambda_1 t), \dots, \exp(\lambda_r t))$$

con

$$\exp(\lambda_k t) = e^{a_k t} \begin{pmatrix} \cos(b_k t) & -\sin(b_k t) \\ \sin(b_k t) & \cos(b_k t) \end{pmatrix}$$

Il flusso integrale di $\dot{X} = AX$ si può esprimere come

$$X(t) = B^{-1} \exp(Qt) B X_0$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

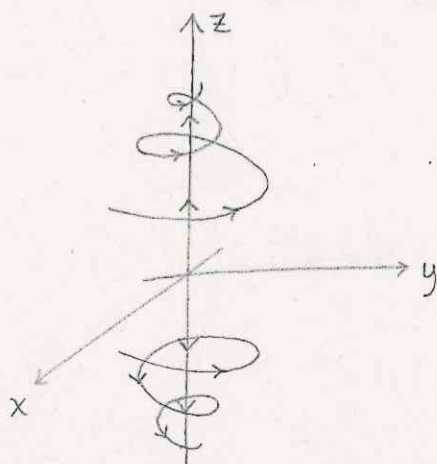
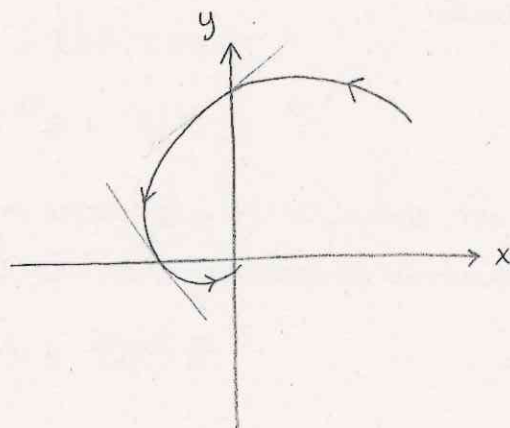
gli autovalori sono $\{2, -1 \pm i\}$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm i$$

$$E^s(0) = \text{Span} \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$$

$$E^u(0) = \text{Span} \{(0, 0, 1)\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ e^{2t} z \end{pmatrix}$$



NILPOTENTI

Se una matrice non è diagonalizzabile (e neppure semisemplice), essa differisce da una diagonalizzabile (o semisemplice) per una matrice nilpotente.

Un solo autovalore reale

Possiamo scrivere

$$A = \lambda I + N \quad \text{con } N \text{ matrice nilpotente } (N \neq 0)$$

e

$$\exp(At) = \exp(\lambda It + Nt) = \exp(\lambda It) \exp(Nt) = e^{\lambda t} \exp(Nt)$$

ma $N^s = 0$ con s pari all'ordine del nilpotente

$$\exp(Nt) = I + Nt + \frac{t^2}{2} N^2 + \dots + \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} N^{s-1}$$

Le soluzioni del sistema dinamico $\dot{X} = AX$, con A che ha un solo autovalore, si possono esprimere come prodotti di $e^{\lambda t}$ con polinomi in t ; il grado dei polinomi è minore della dimensione dello spazio ($s \leq n$).

Nodi impropri

$n=2$ A con un solo autovalore reale λ di m.o. 2

$$A = \lambda I + N, \quad N^2 = 0$$

supponiamo che A non sia diagonalizzabile (cioè che $N \neq 0$), si ha

$$\exp(Nt) = I + Nt$$

e quindi

$$\exp(At) = \exp(\lambda I t + Nt) = e^{\lambda t} [I + Nt]$$

$$X(t) = e^{\lambda t} (X_0 + t N X_0)$$

Con un coniugio N può essere messo nella forma canonica con un solo coefficiente diverso da zero sotto la diagonale. Si ha

$$B N B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$Q = \lambda I + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B A B^{-1}$$

L'esponenziale è

$$\exp(Qt) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

e la soluzione di $\dot{X} = AX$ può essere espressa come

$$X(t) = e^{\lambda t} B^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} B X_0$$

questa formula è più complicata di quella precedente: per calcolare B occorre scegliere un vettore V_1 , calcolare $V_2 = N V_1$ ($\neq 0$), formare $B^{-1} = [V_1, V_2]$, invertire questa matrice

Il comportamento qualitativo delle orbite si può studiare nel caso del sistema in forma canonica

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = x + \lambda y \end{cases}$$

Il flusso integrale è

$$\begin{cases} x(t) = e^{\lambda t} x_0 \\ y(t) = e^{\lambda t} (y_0 + x_0 t) \end{cases}$$

$$\lambda < 0 \quad (\lambda > 0)$$

tutte le orbite per $t \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow +\infty$) tendono all'infinito e hanno limite per $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) l'origine; per $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) tendono all'origine con tangente che tende a $x=0$, infatti

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ (t \rightarrow -\infty)}} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y_0 + x_0 t}{x_0} = +\infty \quad (-\infty)$$

Per $x_0 = 0$ si ha $x(t) = 0$. Il punto di equilibrio si chiama modo improprio.

Esercizio

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 + 12\lambda + 36 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -6 \quad m.a. = 2$$

$$E^s(0) = \mathbb{R}^2$$

$$A = \lambda I + N \rightarrow N = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

pongo $V_1 = (1, 0)^T$ da cui $NV_1 = (-2, -1)^T = V_2 (\neq 0)$;

ottingo $B^{-1} = [V_1, V_2]$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = -\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

verifico che

$$BAB^{-1} = Q = 6I + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

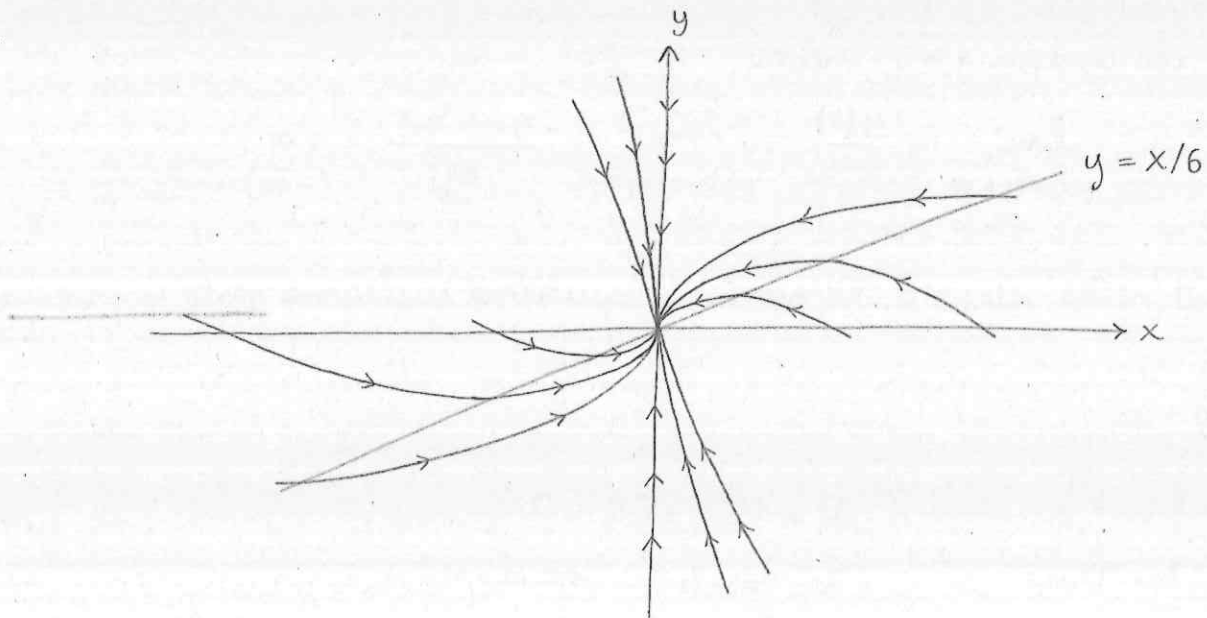
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 12 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Studiamo le traiettorie del sistema $\dot{X} = QX$

$$\begin{cases} \dot{x} = -6x \\ \dot{y} = x - 6y \end{cases}$$

vediamo che se $x_0 = 0$ allora $x(t) = 0$ e $\dot{y} = 0$ se $x - 6y = 0$, cioè

$$y = \frac{x}{6}$$



Ritorniamo al sistema $\dot{X} = AX$

$$\begin{cases} \dot{x} = -8x + 4y \\ \dot{y} = -x - 4y \end{cases}$$

$$-8u + 4v = -6u \rightarrow 2u = 4v \rightarrow \vec{v} = (2, 1)^T$$

autovettore associato a $\lambda = -6$

Notiamo che $\dot{x} = 0$ per $y = 2x$ e $\dot{y} = 0$ per

$$y = -\frac{x}{4}$$

