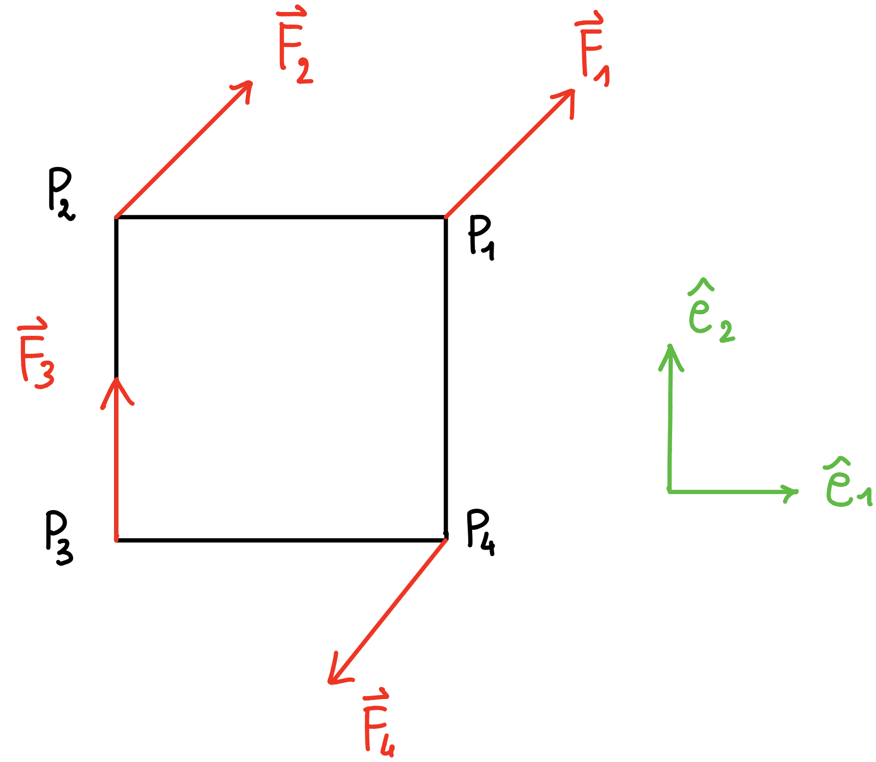
Esercizio (15 febbraio 2018)

Consideriamo su un piano orizzontale una lamina quadrata ai cui vertici sono applicate delle forze:



lato $2l$

$$\vec{F}_1 = F(\hat{e}_1 + \hat{e}_2), \quad \vec{F}_2 = \vec{F}_1,$$

$$\vec{F}_3 = F\hat{e}_2, \quad \vec{F}_4 = -\vec{F}_1 \qquad (F > 0)$$

i) Determinare l'asse centrale e dire se interseca la lamina

($\vec{N}_Q \times \vec{R} = \vec{0}$ se $Q \in a$ (asse centrale))

Sol. i)

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 =$$

$$\cancel{\vec{F}_1} + \vec{F}_1 + \vec{F}_3 \cancel{- \vec{F}_1} =$$

$$F(\hat{e}_1 + \hat{e}_2) + F\hat{e}_2 =$$

$$F(\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2) \neq 0$$

$$Q - P_3 = \frac{\vec{R} \times \vec{N}_{P_3}}{|\vec{R}|^2}$$

$$\vec{N}_{P_3} = (P_2 - P_3) \times \vec{F}_2 + (P_4 - P_3) \times \vec{F}_4$$

$$(P_3 - P_3) \times \vec{F}_3 = \vec{0}$$

$$(P_1 - P_3) \times \vec{F}_1 = \vec{0} \quad \text{perché } (P_1 - P_3) \parallel \vec{F}_1$$

$$\vec{N}_{P_3} = (P_2 - P_3) \times \vec{F}_2 + (P_4 - P_3) \times \vec{F}_4 \qquad (\vec{F}_4 = -\vec{F}_2)$$

$$= (P_2 - P_3 - P_4 + P_3) \times \vec{F}_2 =$$

$$(P_2 - P_4) \times \vec{F}_2$$

$$P_2 - P_4 = -2\ell\,\hat{e}_1 + 2\ell\,\hat{e}_2$$

$$\vec{N}_{P_3} = (-2\ell\,\hat{e}_1 + 2\ell\,\hat{e}_2) \times F(\hat{e}_1 + \hat{e}_2)$$

$$= -2\ell F\,\hat{e}_3 - 2\ell F\,\hat{e}_3$$

$$= -4\ell F\,\hat{e}_3$$

$$Q - P_3 = \frac{\cancel{F}(\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2) \times (-4\ell \cancel{F}\,\hat{e}_3)}{5\cancel{F^2}}$$

$$|\vec{R}|^2 = (1 + 2^2)F^2 = 5F^2$$

$$Q - P_3 = \frac{4\ell\,\hat{e}_2 - 8\ell\,\hat{e}_1}{5} = -\frac{8}{5}\ell\,\hat{e}_1 + \frac{4}{5}\ell\,\hat{e}_2$$

ricordiamo che $\vec{R} = F(\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2)$

Scriviamo l'equazione di una retta passante per Q e diretta come $\vec{R}$. Introducendo il sistema di riferimento $P_3\,x\,y$ si ha

$$y - y_Q = \alpha\,(x - x_Q)$$

Allora

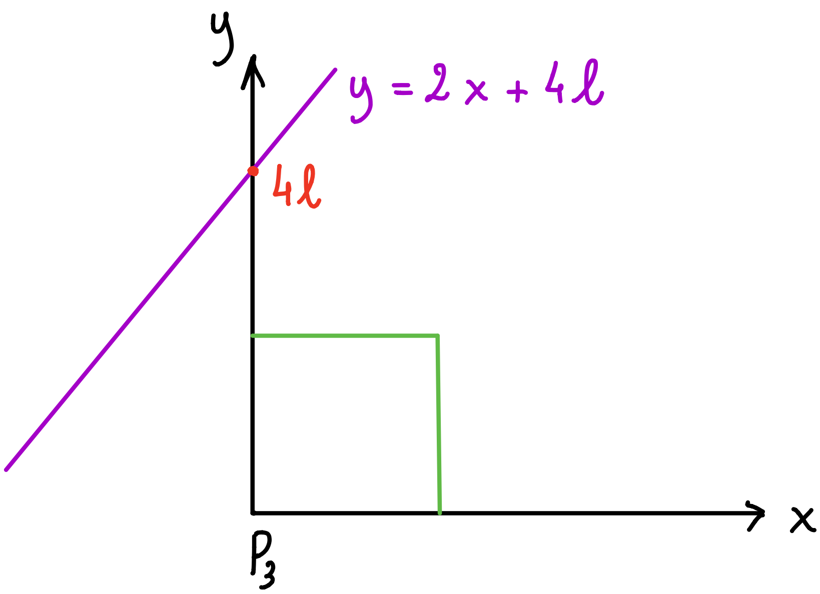
$$x_Q = -\frac{8}{5}\ell\,, \qquad y_Q = \frac{4}{5}\ell$$

$$\alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{2F}{F} = 2$$

$$y - \frac{4}{5}\ell = 2\left(x + \frac{8}{5}\ell\right)$$

$$y = \frac{4}{5}\ell + \frac{16}{5}\ell + 2x = 2x + 4\ell$$

$y = 2x + 4\ell$ è l'eq. della retta dell'asse centrale



per $x = 0$ si ha $y = 4\ell$

vediamo che l'asse centrale non interseca la lamina

ii) È possibile applicare una forza $\vec{F}_5$ applicata in un punto P_5 della lamina in modo che il sistema

$$\tilde{F} = \{(\vec{F}_j, P_j)\}_{j=1,\dots,5}$$

sia equilibrato ?

Sol. ii)

Deve necessariamente essere

$$\vec{F}_5 = -\vec{R} = -F(\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2)$$

in modo che la nuova risultante sia nulla, cioè

$$\vec{F}_5 + \vec{R} = \vec{0}$$

Ora vogliamo che il momento rispetto a qualsiasi polo sia nullo.

Consideriamo il sistema iniziale di forze applicate

$$S = \{(\vec{F}_j, P_j)\}_{j=1,\dots,4}$$

e notiamo che $\forall P \in \mathbb{E}^3$ si ha

1 $\quad \vec{N}_P \cdot \vec{R} = 0 \quad$ perché S è un sistema piano

inoltre, se $P \in a$ (asse centrale) vale

2 $\quad \vec{N}_P \times \vec{R} = \vec{0} \quad$ per definizione di asse centrale $(\vec{R} \neq \vec{0})$

Da 1 e 2 segue che

$\vec{N}_P = \vec{0}$ se $P \in a$ (asse centrale di S)

Torniamo al nuovo sistema $\tilde{F}$.

Si è visto che $\vec{F}_5 = -\vec{R}$ (con $\vec{R}$ risultante del sistema S).

Dove va applicata questa forza affinché il sistema $\tilde{F}$ sia equilibrato?

Se la applichiamo in un punto dell'asse centrale di S, il momento delle 5 forze sarà nullo se calcolato rispetto ad un punto qualsiasi dell'asse centrale di S, infatti detto Q tale punto, si ha

$$\vec{N}_Q^{(\tilde{F})} = \underbrace{\vec{N}_Q^{(S)}}_{\substack{= \\ \vec{0}}} + \underbrace{(Q-Q) \times \vec{F}_5}_{\substack{= \\ \vec{0}}} = \vec{0}$$

per il discorso fatto sopra

Poiché la risultante del nuovo sistema $\tilde{F}$ è nulla, allora il momento delle 5 forze è nullo rispetto a qualunque altro polo.

(questa affermazione segue dalla formula

$$\vec{N}_{P_1} = \vec{N}_{P_2} + (P_2 - P_1) \times \vec{R},$$

e se $\vec{R} = \vec{0}$ si ha

$$\vec{N}_{P_1} = \vec{N}_{P_2})$$

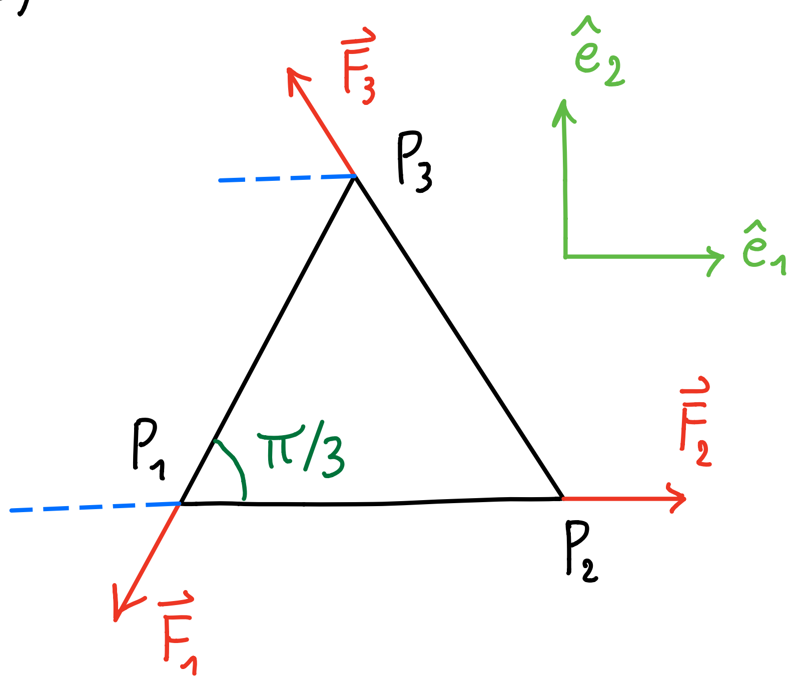
La risposta alla domanda è:

$\vec{F}_5 = -\vec{R}$ va applicata ad un punto dell'asse centrale del sistema S (di 4 forze) in modo che il nuovo sistema $\tilde{F}$ sia equilibrato.

L'asse centrale di S non interseca la lamina e quindi non è possibile aggiungere ad S una forza applicata alla lamina in modo che il nuovo sistema sia in equilibrio.

Esercizio (11 aprile 2018)

Lamina omogenea: triangolo equilatero di lato l



le forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ hanno uguale intensità $F > 0$,

inoltre $\vec{F}_1 \parallel (P_1 - P_3)$, $\vec{F}_2 \parallel (P_1 - P_2)$, $\vec{F}_3 \parallel (P_2 - P_3)$

i) Mostrare che il sistema non è equilibrato

Sol. i)

$$\left(\cos \pi/3 = \frac{1}{2} \, , \, \operatorname{sen} \pi/3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\vec{F}_1 = -\frac{1}{2} F \hat{e}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} F \hat{e}_2$$

$$\vec{F}_2 = F \hat{e}_1$$

$$\vec{F}_3 = -\frac{1}{2} F \hat{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} F \hat{e}_2$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

poi, scegliamo un polo $P \equiv P_1$

$\vec{0}$ perché $(P_2 - P_1) \parallel \vec{F}_2$

$$\vec{N}_{P_1} = \underbrace{\cancel{(P_1 - P_1)} \times \vec{F}_1}_{= \vec{0}} + \underbrace{\cancel{(P_2 - P_1)} \times \vec{F}_2}_{= \vec{0}} + (P_3 - P_1) \times \vec{F}_3$$

$$P_3 - P_1 = \frac{1}{2} \ell \, \hat{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \ell \, \hat{e}_2$$

$$\vec{N}_{P_1} = \left(\frac{1}{2}\ell\,\hat{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\ell\,\hat{e}_2\right) \times \left(-\frac{1}{2}F\,\hat{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}F\,\hat{e}_2\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}F\ell\,\hat{e}_3 + \frac{\sqrt{3}}{4}F\ell\,\hat{e}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}F\ell\,\hat{e}_3 \neq \vec{0}$$

Segue che il sistema non è equilibrato.

ii) Qual è il numero minimo di forze da aggiungere per ottenere un sistema equilibrato?

Sol. ii)

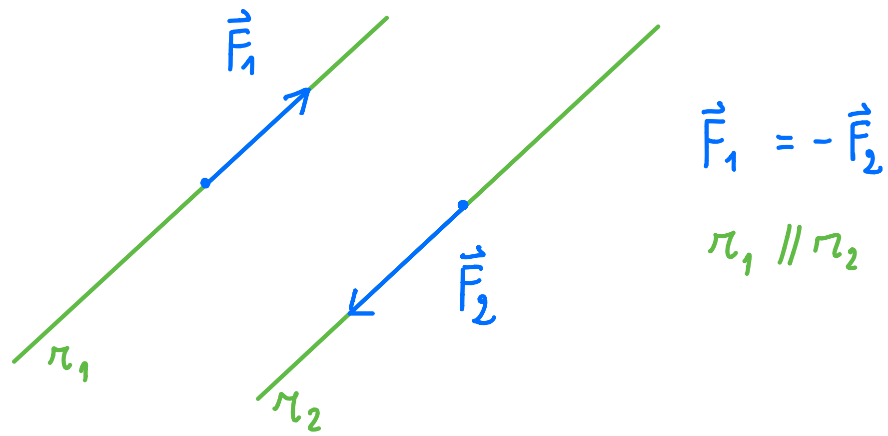
Abbiamo visto che $\vec{R} = \vec{0}$, $\vec{N}_{P_1} \neq \vec{0}$.

Notiamo che $\vec{N}_P = \vec{N}_{P_1}$, per qualsiasi $P \in \mathbb{E}^3$, dato che $\vec{R} = \vec{0}$.

Una sola forza non può rendere il nuovo sistema equilibrato.

Il numero minimo di forze è 2, tali che la loro risultante sia nulla e il loro momento rispetto a P_1 (e quindi rispetto a qualsiasi altro polo dato che la loro risultante è nulla) sia uguale a $-\vec{N}_{P_1}$.

Si parla in questo caso di una coppia di forze.



iii) Trovare l'asse centrale relativo al sistema di forze costituito da

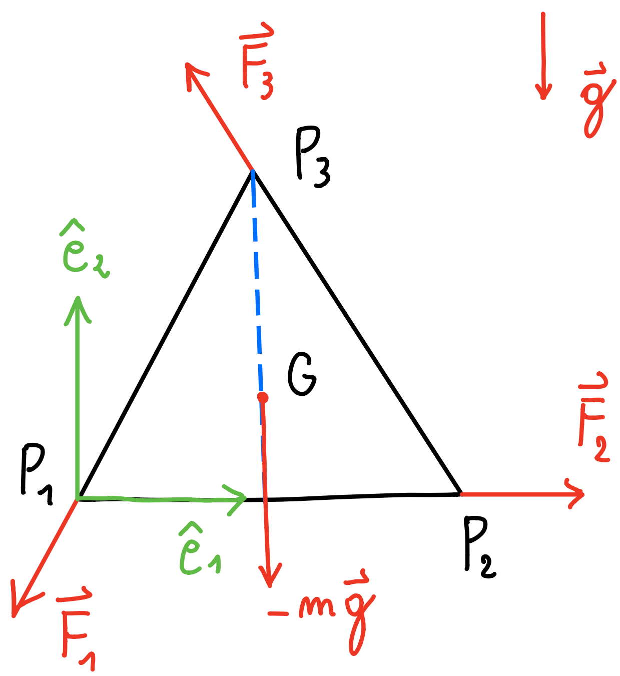
$$\mathcal{F} = \{(P_j, \vec{F}_j)\}_{j=1,2,3}$$

e dalla forza di gravità (la cui direzione è $\perp$ a $P_1 P_2$)

Sol. iii)

La forza di gravità agisce su tutti i punti della lamina, quindi essa dà luogo ad un sistema continuo di forze.

Tuttavia è possibile mostrare che un



sistema di forze ad esso equivalente è costituito dalla forza $-mg\,\hat{e}_3$ (con m massa della lamina) applicata nel suo baricentro.

Essendo la lamina omogenea il baricentro G è individuato come segue

$$G - P_1 = \frac{\ell}{2}\hat{e}_1 + \frac{1}{3}h\,\hat{e}_2 \,,$$ con h altezza del triangolo

$$= \frac{\ell}{2}\hat{e}_1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\right)\hat{e}_2 = \frac{\ell}{2}\hat{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\hat{e}_2 .$$

Usiamo la formula

$$Q - P_1 = \frac{\vec{R} \times \vec{N}_{P_1}}{|\vec{R}|^2} \,,$$ con Q punto dell'asse centrale

$$\vec{R} = \underbrace{\vec{0}}_{\substack{\uparrow \\ \text{risultante di } \{(\vec{F}_1, P_1), (\vec{F}_2, P_2), (\vec{F}_3, P_3)\}}} + (-mg\,\hat{e}_2) = -mg\,\hat{e}_2$$

$$\vec{N}_{P_1} = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}F\ell\,\hat{e}_3}_{\substack{\uparrow \\ \text{momento risultante rispetto a } P_1 \text{ di} \\ \{(\vec{F}_1, P_1), (\vec{F}_2, P_2), (\vec{F}_3, P_3)\}}} + (G - P_1) \times (-mg\,\hat{e}_2)$$

$$|\vec{R}|^2 = m^2 g^2$$

$$G - P_1 = \frac{l}{2}\hat{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{6} l \hat{e}_2$$

$$\vec{N}_{P_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} F l \hat{e}_3 + \left(\frac{l}{2}\hat{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{6} l \hat{e}_2\right) \times (-mg\hat{e}_2)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} F l \hat{e}_3 - \frac{mgl}{2}\hat{e}_3$$

$$\vec{R} \times \vec{N}_{P_1} = (-mg\hat{e}_2) \times \frac{l}{2}(\sqrt{3}F - mg)\hat{e}_3$$

$$= -\frac{mgl}{2}(\sqrt{3}F - mg)\hat{e}_1$$

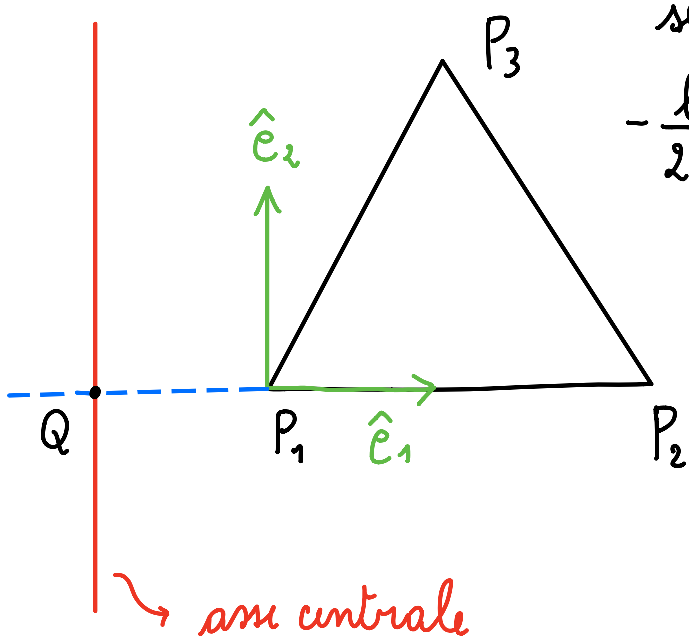
$$Q - P_1 = -\frac{\cancel{mg}l}{2}\frac{(\sqrt{3}F - mg)}{m^{\cancel{2}}g^{\cancel{2}}}\hat{e}_1$$

$$= -\frac{l}{2mg}(\sqrt{3}F - mg)\hat{e}_1$$

$\Rightarrow$ il punto Q si troverà lungo la retta passante per P_1 e P_2, potrà essere a sinistra o a destra rispetto a P_1 in base al segno di $-\frac{l}{2mg}(\sqrt{3}F - mg)$;

l'asse centrale passa per Q ed è diretto come $\hat{e}_2$, ed è la retta

$$Q + \lambda \hat{e}_2 \, , \quad \lambda \in \mathbb{R} .$$



se

$$-\frac{\ell}{2mg}\left(\sqrt{3}F - mg\right) < 0$$

Esercizio (è presente nelle note del prof. alla fine del capitolo 5)

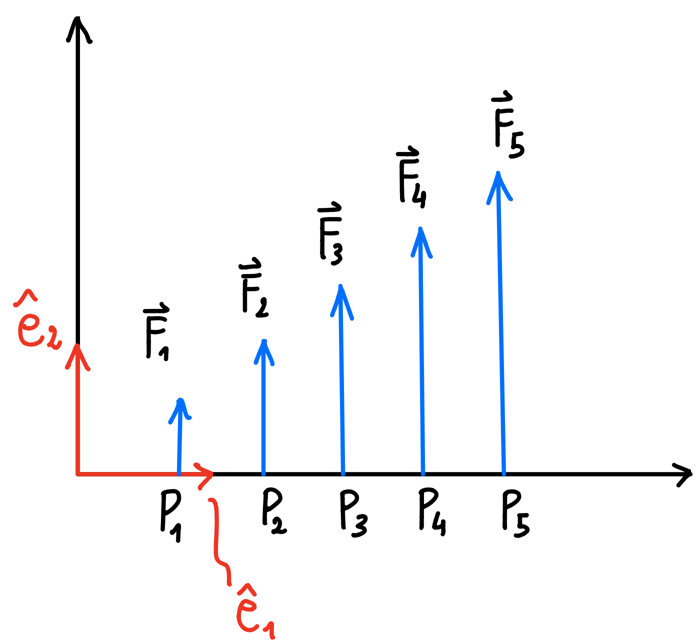
In un piano si fissi un sistema di riferimento $O\hat{e}_1\hat{e}_2$ e si consideri il sistema di vettori applicati

$$F = \{(\vec{F}_1, P_1), \dots, (\vec{F}_5, P_5)\}$$

con
$$\vec{F}_j = j\,\hat{e}_2 \quad , \quad P_j = O + j\,\hat{e}_1$$
$$j = 1, \dots, 5$$

i) Trovare l'asse centrale di F

Sol.



$$P_1 = O + \hat{e}_1 \qquad \vec{F}_1 = \hat{e}_2$$

$$P_2 = O + 2\hat{e}_1 \qquad \vec{F}_2 = 2\hat{e}_2$$

$$P_3 = 0 + 3\hat{e}_1 \qquad \vec{F}_3 = 3\hat{e}_2$$

$$P_4 = 0 + 4\hat{e}_1 \qquad \vec{F}_4 = 4\hat{e}_2$$

$$P_5 = 0 + 5\hat{e}_1 \qquad \vec{F}_5 = 5\hat{e}_2$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5 =$$

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5)\,\hat{e}_2 = 15\,\hat{e}_2$$

$$Q - 0 = \frac{\vec{R} \times \vec{N}_0}{|\vec{R}|^2}$$

$$\vec{N}_0 = \sum_{j=1}^{5} (P_j - 0) \times \vec{F}_j =$$

$$(\hat{e}_1 \times \hat{e}_2)(1\cdot1 + 2\cdot2 + 3\cdot3 + 4\cdot4 + 5\cdot5) =$$

$$(\hat{e}_1 \times \hat{e}_2)(1 + 4 + 9 + 16 + 25) =$$

$$55\,\hat{e}_3 \qquad (\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2)$$

$$|\vec{R}|^2 = 15^2$$

$$Q - 0 = \frac{\cancel{15}\,\hat{e}_2 \times 55\,\hat{e}_3}{15^{\cancel{2}}} = \frac{11}{3}\,\hat{e}_3$$

$$Q = O + \frac{11}{3}\hat{e}_1$$

$$P = Q + \lambda \hat{e}_2 \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$\longrightarrow$ l'asse centrale è definito da questi punti

$\longrightarrow$ provare a trovare il centro dei vettori paralleli

$$C - O = \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} v_j} \sum_{j=1}^{N} (P_j - O)$$

$$\vec{v}_j = v_j \hat{e}$$

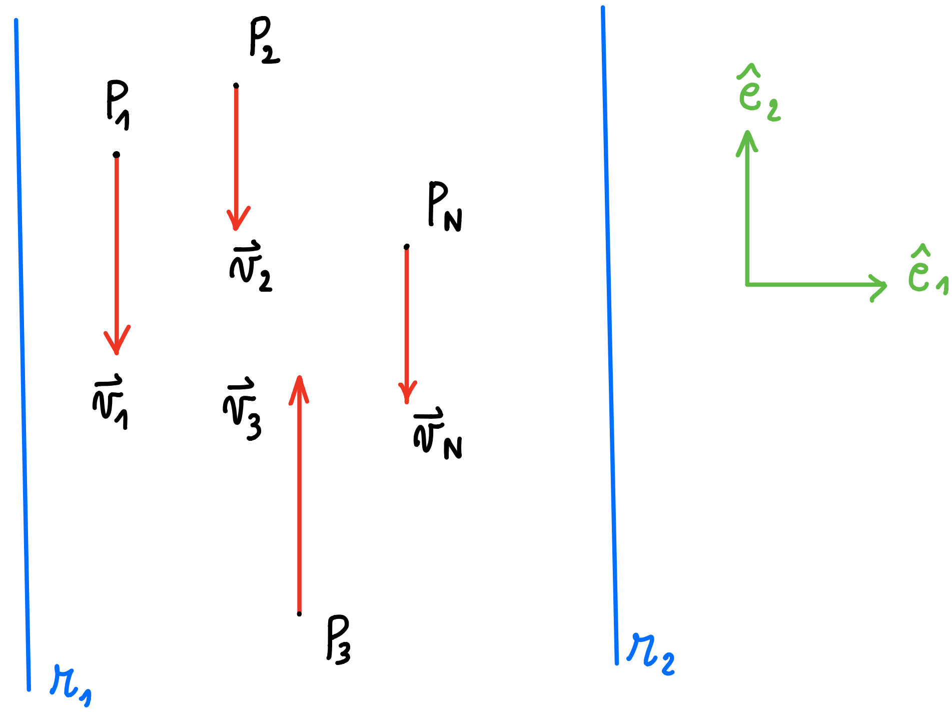
ii) In un piano si consideri un sistema di N vettori applicati paralleli

$$S = \{(\vec{v}_1, P_1), \dots, (\vec{v}_N, P_N)\}, \quad N > 1$$

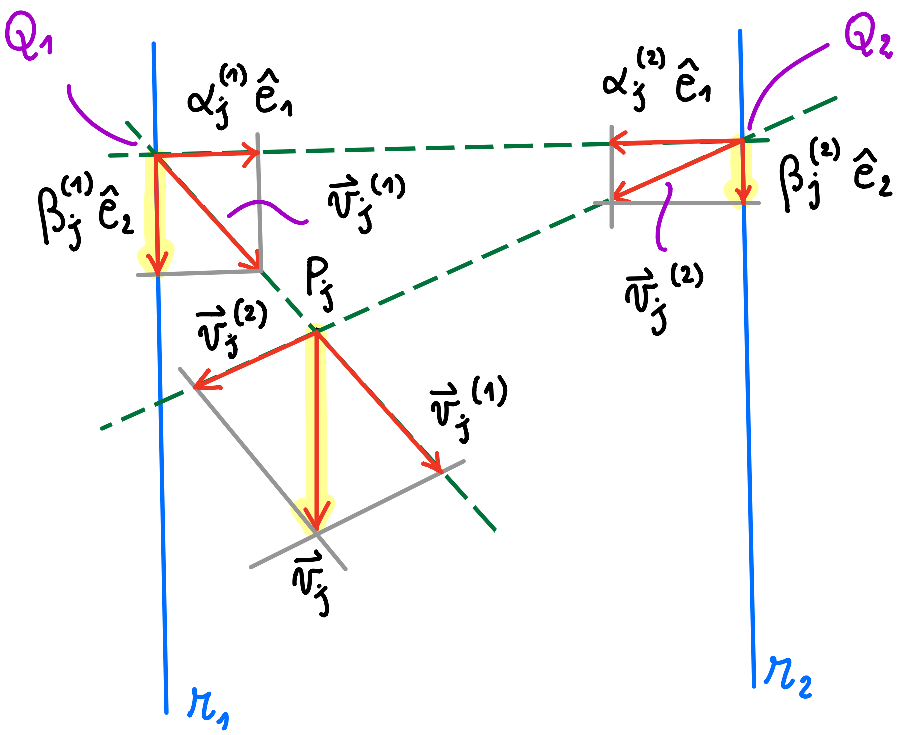
Si prendono 2 rette r_1, r_2 parallele e distinte e aventi la stessa direzione dei vettori $\vec{v}_j$.

Mostrare che si può trovare un sistema equivalente ad S costituito da 2 vettori (eventualmente nulli) paralleli a r_1, r_2 e applicati uno in un punto di r_1 e l'altro in un punto di r_2.

Sol.



Mostreremo come si procede per un singolo vettore applicato. Applicando il procedimento a tutti i vettori sarà possibile ottenere il risultato desiderato.



Se $P_j \in r_1$ allora $\{(\vec{v}_j, P_j)\}$ è equivalente a

$\{(\vec{v}_j, P_j), (\vec{0}, Q)\}$ con $Q \in r_2$.

Se $P_j \in r_2$ allora $\{(\vec{v}_j, P_j)\}$ è equivalente a

$\{(\vec{0}, Q), (\vec{v}_j, P_j)\}$ con $Q \in r_1$.

Supponiamo ora che P_j non appartenga né ad r_1 né ad r_2.

Prendiamo due punti $Q_1 \in r_1$, $Q_2 \in r_2$ tali che

$$(Q_1 - P_j) \cdot \hat{e}_2 = (Q_2 - P_j) \cdot \hat{e}_2 \neq 0$$

e scomponiamo $\vec{v}_j$ lungo la retta passante per P_j e Q_1 e lungo la retta passante per P_j e Q_2:

$$\vec{v}_j = \vec{v}_j^{(1)} + \vec{v}_j^{(2)}$$

con $\vec{v}_j^{(1)} \parallel P_j - Q_1$, $\vec{v}_j^{(2)} \parallel P_j - Q_2$, cioè

$$\vec{v}_j^{(1)} = \lambda_j^{(1)} (Q_1 - P_j)$$

$$\vec{v}_j^{(2)} = \lambda_j^{(2)} (Q_2 - P_j)$$

con $\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(2)}$ due numeri reali opportuni

Tramite un'operazione elementare è possibile traslare il vettore $\vec{v}_j^{(1)}$ applicato in P_j nel punto Q_1 e il vettore $\vec{v}_j^{(2)}$ applicato in P_j nel punto Q_2.

Scomponiamo $\vec{v}_j^{(1)}$ e $\vec{v}_j^{(2)}$ lungo $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ (si veda la figura):

$$\begin{cases} \vec{v}_j^{(1)} = \alpha_j^{(1)}\,\hat{e}_1 + \beta_j^{(1)}\,\hat{e}_2 \\ \vec{v}_j^{(2)} = \alpha_j^{(2)}\,\hat{e}_1 + \beta_j^{(2)}\,\hat{e}_2 \end{cases}$$

Notiamo che

$$\vec{v}_j = v_j\,\hat{e}_2 = \vec{v}_j^{(1)} + \vec{v}_j^{(2)}$$

$$= \left(\alpha_j^{(1)} + \alpha_j^{(2)}\right)\hat{e}_1 + \left(\beta_j^{(1)} + \beta_j^{(2)}\right)\hat{e}_2$$

allora deve necessariamente essere

$$\alpha_j^{(1)} + \alpha_j^{(2)} = 0$$

cioè

$$\alpha_j^{(1)}\,\hat{e}_1 = -\alpha_j^{(2)}\,\hat{e}_1$$

Dunque i due vettori $\alpha_j^{(1)}\hat{e}_1$, $\alpha_j^{(2)}\hat{e}_1$ sono direttamente opposti e li possiamo eliminare

Si è trovato che

$\{(\vec{v}_j, P_j)\}$ è equivalente a

$$\{(\beta_j^{(1)} \hat{e}_2, Q_1), (\beta_j^{(2)} \hat{e}_2, Q_2)\}$$

Dopo aver ripetuto questo procedimento per ogni vettore del sistema S si avrà che S è equivalente a

$$\{(\vec{v}^{(1)}, A_1), (\vec{v}^{(2)}, A_2)\}$$

con

$$\vec{v}^{(1)} = \sum_{j=1}^{N} \beta_j^{(1)} \hat{e}_2 , \quad \vec{v}^{(2)} = \sum_{j=1}^{N} \beta_j^{(2)} \hat{e}_2 ,$$

e A_1, A_2 sono due punti arbitrari di r_1, r_2, rispettivamente.