Compito di Meccanica Razionale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

9 Gennaio 2023

Primo Esercizio

Si consideri il moto unidimensionale di un punto di massa unitaria definito dall'equazione differenziale

$$\ddot{x} = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

con

$$f(x) = -4x^3 + 2\sqrt{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

i) Scrivere l'espressione dell'energia potenziale $V(x)$ assumendo $V(0) = 0$.

ii) Scrivere l'espressione dell'energia totale $E(x, \dot{x})$ e calcolare i valori dell'energia che corrispondono agli equilibri.

iii) Mostrare che per $E = 0$ ci sono solo due punti di inversione $x_{\min}$, $x_{\max}$, entrambi maggiori di -1.

iv) Tracciare il ritratto di fase.

Esercizio 1

i) $V(x) = -\int f(x)\,dx$

$$V(x) = x^4 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x$$

ii) $E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$

equilibri

$V'(x) = 0$

$$f(x) = 0 \longrightarrow -4x^3 + 2\sqrt{3}\,x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0$$

$$\frac{2}{3}(2x - \sqrt{3}) - 2x^2(2x - \sqrt{3}) = 0$$

$$(2x - \sqrt{3})\left(\frac{2}{3} - 2x^2\right) = 0$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad x_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

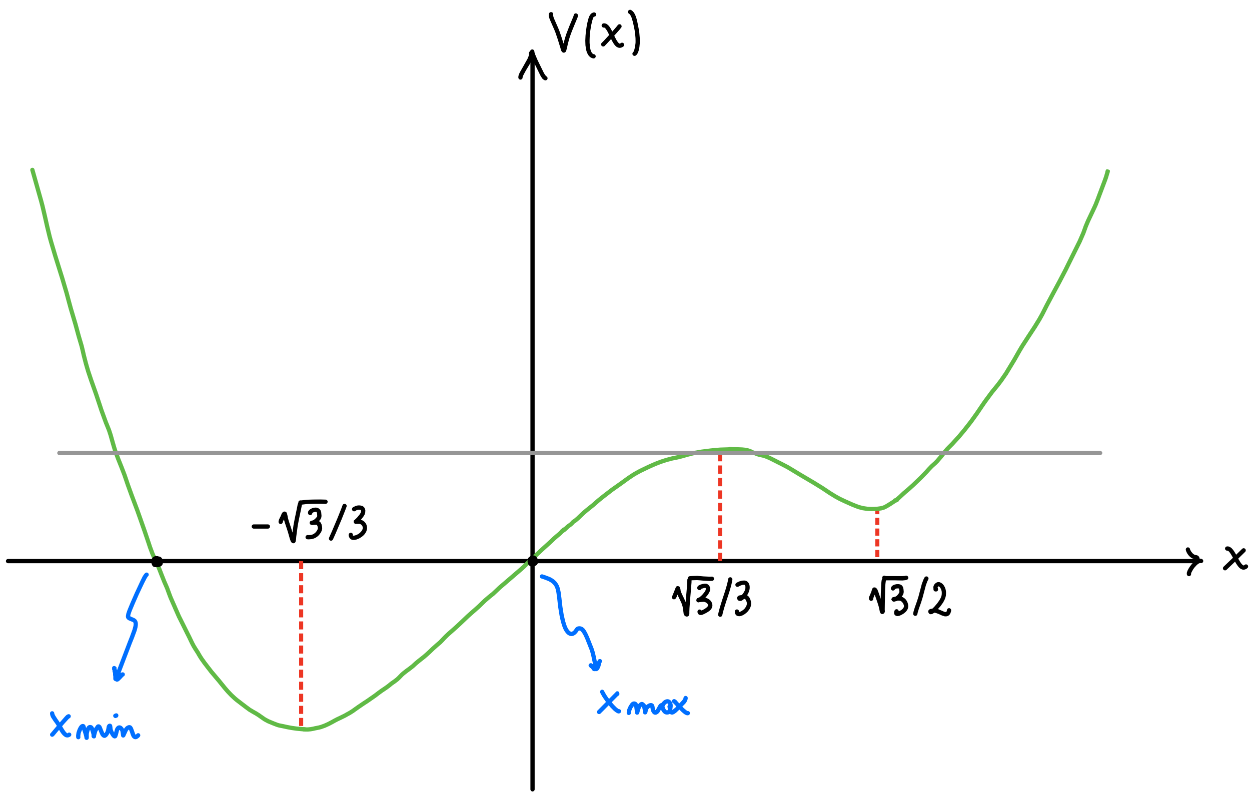
$$E(x_1, 0) = \frac{9}{16} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{16}$$

$$E(x_2, 0) = \frac{1}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$E(x_3, 0) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{9}$$

iii) $V(x) = 0$

$$\lim_{x \to \pm\infty} V(x) = +\infty$$

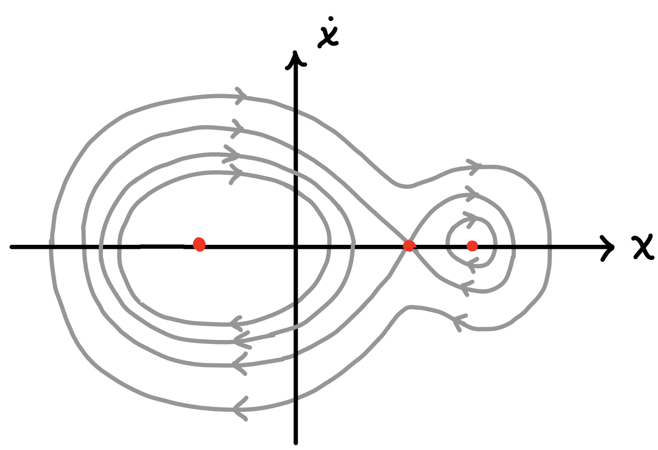


Noto che $V(x) > 0$ per $x > 0$ e $x < x_{min}$;

$V(-1) = \frac{1}{3} > 0$

Segue che $x_{min} > -1$, inoltre $x_{max} = 0 > -1$

iv) Ritratto di fase



Compito di Meccanica Razionale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

24 aprile 2023

Primo Esercizio

Un punto materiale di massa unitaria si muove in un campo di forze centrali

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\mathbf{e}_\rho, \qquad f(\rho) = 4\rho^3 - \alpha,$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\rho \in \mathbb{R}^+$ è la distanza del punto dal centro di forza. Assumendo che la posizione e la velocità iniziali non siano parallele,

i) disegnare i ritratti di fase qualitativamente diversi che si presentano al variare del parametro reale α;

ii) determinare al variare di α il numero di orbite circolari, trovandone anche il raggio ed il periodo.

Soluzione primo esercizio

i)
L'energia potenziale porge

$$V(\rho) = -\int f(\rho)\, d\rho = -\rho^4 + \alpha\rho.$$

Quindi possiamo ottenere l'energia potenziale efficace

$$V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho) = -\rho^4 + \alpha\rho + \frac{c^2}{2\rho^2}.$$

Abbiamo

$$\lim_{\rho\to 0^+} V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho) = +\infty, \qquad \lim_{\rho\to +\infty} V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho) = -\infty$$

e

$$\frac{dV_{\text{eff}}^{(c)}}{d\rho} = -4\rho^3 + \alpha - \frac{c^2}{\rho^3} = 0,$$

da cui

$$4\rho^6 - \alpha\rho^3 + c^2 = 0.$$

L'equazione appena scritta ammette soluzioni reali solo se

$$\alpha^2 - 16c^2 \geq 0.$$

Inoltre, ci possono essere soluzioni reali positive solo se $\alpha \geq 4|c|$. Se $\alpha = 4|c|$ la funzione $V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho)$ ha un punto di flesso a tangente orizzontale, se $\alpha > 4|c|$ la funzione $V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho)$ ha un punto di minimo e un punto di massimo.

In definitiva si presentano i suguenti tre casi:

a) $\alpha < 4|c|$ (vedi figura 1);

b) $\alpha = 4|c|$ (vedi figura 2);

c) $\alpha > 4|c|$ (vedi figura 3).

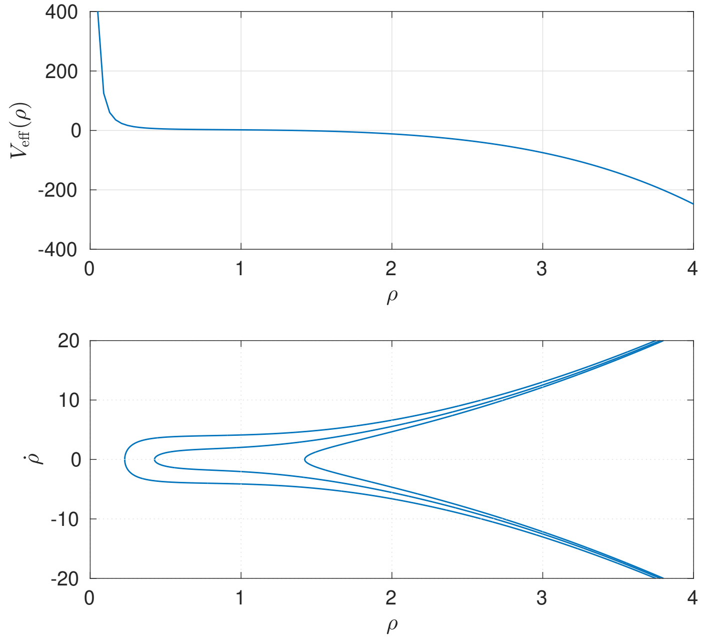


Figura 1: Caso $\alpha < 4|c|$. Non ci sono valori critici dell'energia.

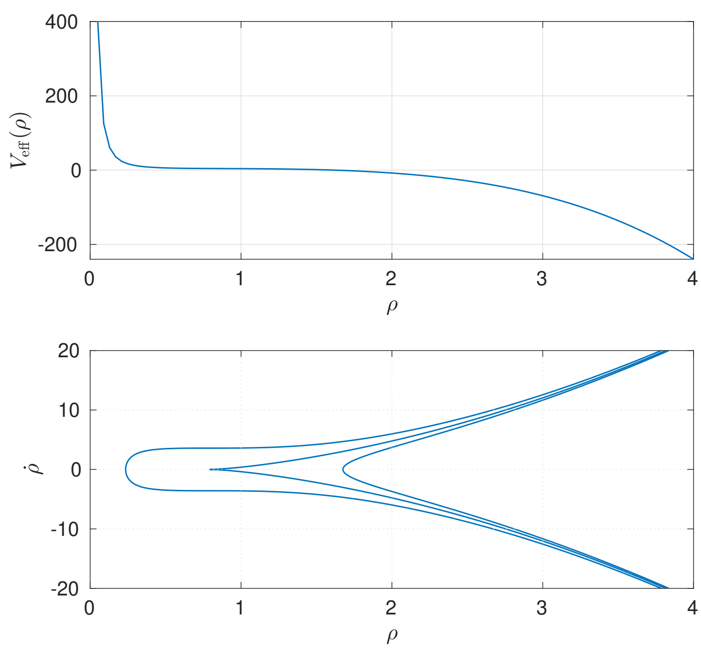


Figura 2: Caso $\alpha = 4|c|$. La curva di livello corrispodente al valore critico dell'energia presenta una cuspide.

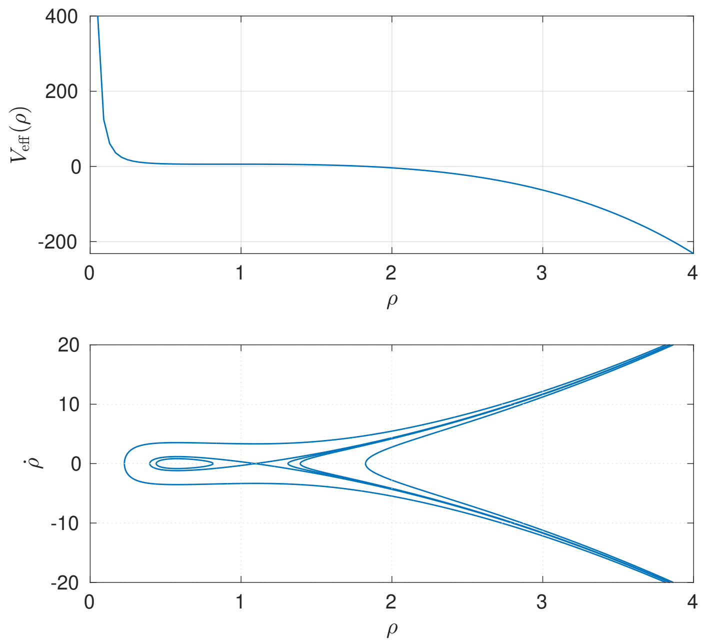


Figura 3: Caso $\alpha > 4|c|$. Ci sono due valori critici dell'energia.

ii)

a) $\alpha < 4|c|$: non ci sono orbite circolari;

b) $\alpha = 4|c|$: c'è una orbita circolare di raggio e periodo dati da

$$\bar\rho = \left(\frac{|c|}{2}\right)^{1/3}, \qquad T = \frac{2\pi\bar\rho^2}{|c|};$$

c) $\alpha > 4|c|$: ci sono due orbite circolari di raggio

$$\bar\rho_1 = \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 16c^2}}{8}\right)^{1/3}, \qquad \bar\rho_2 = \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 16c^2}}{8}\right)^{1/3}$$

e periodo

$$T_1 = \frac{2\pi\bar\rho_1^2}{|c|}, \qquad T_2 = \frac{2\pi\bar\rho_2^2}{|c|}.$$

Compito di Meccanica Razionale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

8 Gennaio 2019

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Secondo Esercizio

Si consideri un punto materiale P di massa m libero di muoversi in un campo di forze centrali con energia potenziale

$$\mathcal{V}(\rho) = k \arctan \rho,$$

dove $k > 0$ è una costante e ρ è la distanza di P dal centro di forze.

1. Detto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ il vettore delle coordinate del punto P, scrivere esplicitamente l'espressione della forza centrale $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$.

2. Dimostrare che per ogni valore c della componente del momento angolare ortogonale al piano del moto esiste un'unica traiettoria circolare.[1]

3. Disegnare il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto con coordinate $\rho, \dot{\rho}$;

4. Trovare il valore h dell'energia totale E tale che le traiettorie sono illimitate se e solo se $E \geq h$.

[1] *suggerimento:* si può usare la regola dei segni di Cartesio: dato un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, con coefficienti reali a_j, il numero di radici positive è al massimo uguale al numero di cambiamenti di segno nella successione dei coefficienti $a_n, \ldots, a_0$.

Secondo Esercizio

1. La forza centrale si scrive

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = f(\rho)\frac{\boldsymbol{x}}{\rho},$$

con

$$f(\rho) = -\mathcal{V}'(\rho) = -\frac{k}{1+\rho^2}.$$

2. L'energia potenziale efficace si scrive

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = \mathcal{V}(\rho) + \frac{c^2}{2m\rho^2}.$$

Consideriamo un valore qualunque di c (con $c \neq 0$ perché sia definito univocamente un piano del moto). Dobbiamo mostrare che questa funzione ha un unico punto stazionario positivo $\bar{\rho}$. Si ha

$$\mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho) = \frac{k}{1+\rho^2} - \frac{c^2}{m\rho^3},$$

per cui, dall'equazione $\mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho) = 0$ si trova l'equazione polinomiale

$$p(\rho) = km\rho^3 - c^2\rho^2 - c^2 = 0.$$

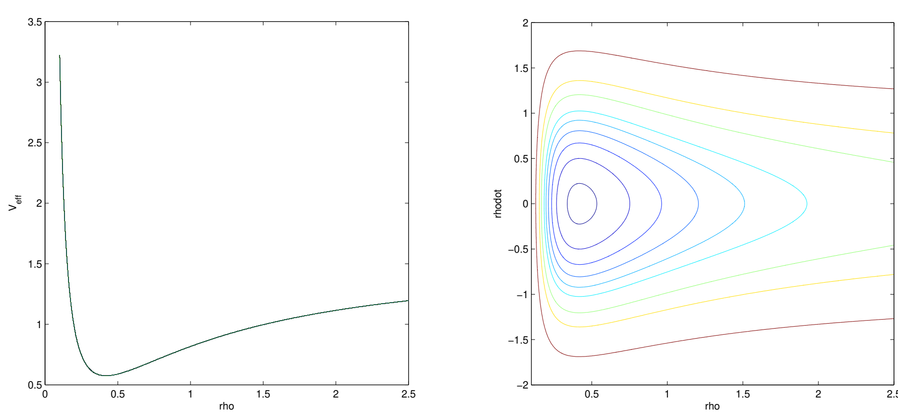
Per la regola dei segni di Cartesio questa equazione ha al massimo una soluzione positiva. Quest'ultima esiste perché

$$p(0) = -c^2, \qquad \lim_{\rho\to+\infty} p(\rho) = +\infty.$$

3. Tenendo conto dei limiti

$$\lim_{\rho\to 0^+} \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = +\infty, \qquad \lim_{\rho\to+\infty} \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = k\frac{\pi}{2}$$

e di quanto dimostrato al punto precedente, possiamo tracciare qualitativamente il grafico di $\mathcal{V}_{\text{eff}}$ (a sinistra) ed il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto (a destra):



4. Dallo studio fatto al punto 3. si vede che il valore cercato dell'energia totale è

$$h = k\frac{\pi}{2}.$$