Esercizio (11 settembre 2018)

Un corpo di massa m è soggetto ad una forza centrale

$$F(\rho) = f(\rho)\frac{x}{\rho}, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

dove $\rho = |x|$ e

$$f(\rho) = -\rho e^{-\rho^2}$$

Assumendo che $c \neq 0$

1) Scrivere l'equazione implicita che definisce il raggio delle orbite circolari

Sol. 1)

$$V(\rho) = -\int f(\rho)\, d\rho = \int \rho e^{-\rho^2} d\rho$$

poniamo $\rho^2 = t \longrightarrow 2\rho\, d\rho = dt$

$$V(\rho) = \int \frac{1}{2} e^{-t} dt = -\frac{1}{2} e^{-t} + \underbrace{d}_{\text{costante}}$$

$d = 0$

$$V(\rho) = -\frac{1}{2} e^{-\rho^2}$$

$$V_{eff}^{(c)}(\rho) = V(\rho) + \frac{c^2}{2m\rho^2}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-\rho^2} + \frac{c^2}{2m\rho^2}$$

$$\frac{dV_{eff}^{(c)}}{d\rho}(\rho) = \frac{1}{2}\left(2\rho e^{-\rho^2}\right) - \frac{c^2}{m\rho^3}$$

$$= \underbrace{\rho e^{-\rho^2}}_{= -f(\rho)} - \frac{c^2}{m\rho^3}$$

$$\frac{dV_{eff}^{(c)}(\rho)}{d\rho} = 0$$

$$\longrightarrow \quad \rho e^{-\rho^2} - \frac{c^2}{m\rho^3} = 0$$

$$\frac{m\rho^4 e^{-\rho^2} - c^2}{m\rho^3} = 0$$

l'equazione cercata è

$$m \rho^4 e^{-\rho^2} - c^2 = 0$$

2) Discutere il numero di orbite circolari al variare di c. Qual è il valore massimo di c per cui ne è garantita l'esistenza?

Sol. 2)

Partiamo da

$$\rho^4 e^{-\rho^2} = \frac{c^2}{m}$$

Sia

$$g(\rho) = \rho^4 e^{-\rho^2}$$

disegniamo il grafico di questa funzione

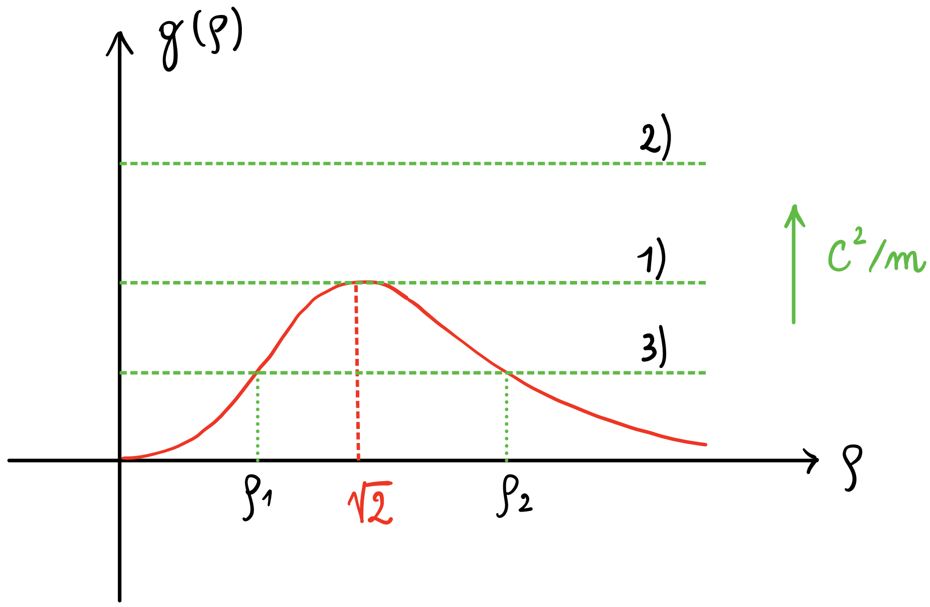
$$g(\rho) > 0$$

$$\lim_{\rho \to +\infty} g(\rho) = 0 \qquad \lim_{\rho \to 0^+} g(\rho) = 0$$

$$\dot{g}(\rho) = 4\rho^3 e^{-\rho^2} - 2\rho \cdot \rho^4 e^{-\rho^2}$$

$$= 2\rho^3 e^{-\rho^2}(2-\rho^2) = 0$$

$\rho = 0 \qquad \rho = \sqrt{2}$



introduciamo

$$h(\rho) = \frac{c^2}{m}$$

calcoliamo $g(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 e^{-(\sqrt{2})^2} = \dfrac{4}{e^2}$

ci sono tre casi

1) $\dfrac{c^2}{m} = \dfrac{4}{e^2} \longrightarrow c^2 = \dfrac{4m}{e^2}$

$$|c| = \frac{2\sqrt{m}}{e}$$

esiste una traiettoria circolare di raggio $\rho = \sqrt{2}$

2) $\frac{c^2}{m} > \frac{4}{e^2} \longrightarrow |c| > \frac{2\sqrt{m}}{e}$

non ci sono traiettorie circolari

3) $\frac{c^2}{m} < \frac{4}{e^2} \longrightarrow |c| < \frac{2\sqrt{m}}{e}$

ci sono due traiettorie circolari di raggi $\rho_1 < \sqrt{2}$, $\rho_2 > \sqrt{2}$

Quindi $|c| = \frac{2\sqrt{m}}{e}$ è il valore massimo di $|c|$ per cui è garantita l'esistenza di traiettorie circolari

Esercizio (29 gennaio 2019)

Consideriamo un punto materiale P di massa m libero di muoversi in un campo di forze centrali con energia potenziale

$$V(\rho) = k \log\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right)$$

$$k, r > 0$$

1) Calcolare $F(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$

Sol. 1)

$$F(x) = f(\rho)\, \frac{x}{\rho}$$

$$f(\rho) = -\frac{dV(\rho)}{d\rho} = -k \frac{1}{1 + \rho^2/r^2} \frac{2\rho}{r^2}$$

$$= -\frac{2k\rho}{r^2 + \rho^2}$$

$$F(x) = -\frac{2k}{r^2 + \rho^2}\, x$$

2) Consideriamo cond. iniziali per cui

$c = 2r\sqrt{Km}$

Mostrare che esiste un'unica traiettoria circolare e trovarne il raggio in funzione di r

Sol. 2)

$$V_{eff}^{(c)}(\rho) = V(\rho) + \frac{c^2}{2m\rho^2}$$

$$= K \log\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) + \frac{c^2}{2m\rho^2}$$

$$\frac{dV_{eff}^{(c)}}{d\rho} = \frac{2K\rho}{r^2+\rho^2} - \frac{c^2}{2m\rho^2}$$

$$= \frac{2Km\rho^4 - c^2(r^2+\rho^2)}{m\rho^3(r^2+\rho^2)} = 0$$

$$(2Km)\rho^4 - c^2\rho^2 - c^2r^2 = 0$$

$$\rho^2 = t$$

$$(2Km)t^2 - c^2 t - c^2 r^2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{c^2 \pm \sqrt{c^4 + 8Kmr^2c^2}}{4Km}$$

ora usiamo $c = 2r\sqrt{Km}$, da cui

$$c^2 = 4r^2 Km$$

$$t_{1,2} = \frac{4Kmr^2 \pm \sqrt{16K^2m^2r^4 + (8Kmr^2)(4Kmr^2)}}{4Km}$$

$$= r^2 \pm \frac{\sqrt{48K^2m^2r^4}}{4Km} = r^2(1 \pm \sqrt{3})$$

$$\longrightarrow t = r^2(1+\sqrt{3})$$

$$\rho^* = r\sqrt{1+\sqrt{3}}$$

3) Disegnare il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot\rho)$

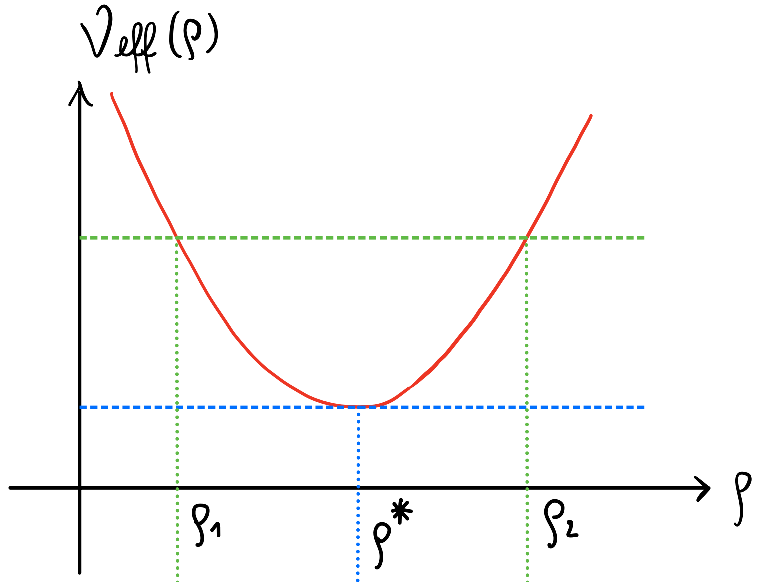
Sol. 3)

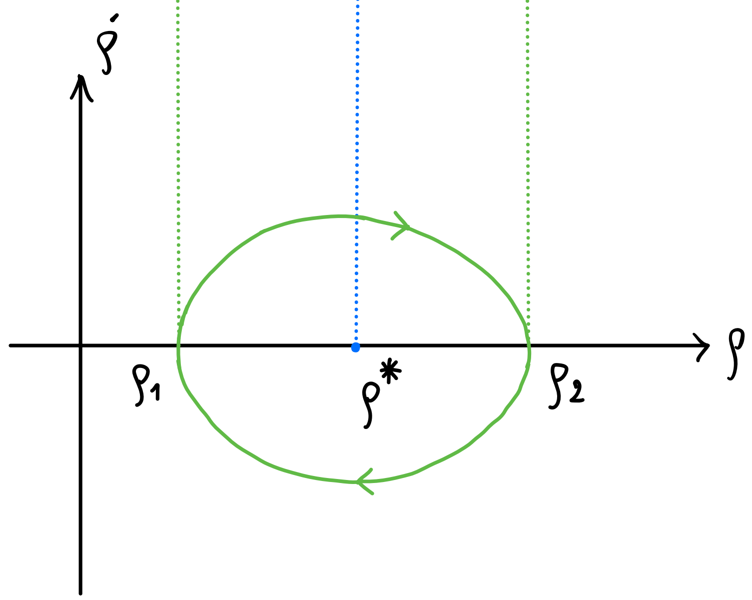
$$V_{eff}(\rho) = K\log\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) + \frac{4r^2Km}{2m\rho^2}$$

$$= K\log\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) + \frac{2r^2K}{\rho^2}$$

$$\lim_{\rho \to 0^+} V_{eff}(\rho) = +\infty$$

$$\lim_{\rho \to +\infty} V_{eff}(\rho) = +\infty$$





4) Trovare il valore minimo E_{min} dell'energia totale

Sol. 4)

$$E_{min} = V_{eff}(\rho^*)$$

$$= k\left[\log(2+\sqrt{3}) + \sqrt{3} - 1\right]$$

Regola dei segni di Cartesio

Dato un polinomio a coefficienti reali

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

con coeff. non tutti nulli, la regola di Cartesio dice che

il massimo numero di radici reali positive di $p(x)$ è dato dal numero di cambiamenti di segno fra coefficienti consecutivi, trascurando eventuali coefficienti nulli

Esercizio (26 giugno 2018)

Consideriamo un punto materiale di massa m in un campo di forze centrali

$$F(\rho) = f(\rho)\frac{x}{\rho}, \qquad x \in \mathbb{R}^3$$

$$f(\rho) = A\rho - B, \quad \rho = |x|, \quad A > 0, \quad B > 0$$

Assumiamo che esista un valore $\bar{\rho}$ di ρ tale che

$$c^2 < m(-A\bar{\rho}^4 + B\bar{\rho}^3)$$

1) Mostrare che esistono due valori ρ_1, ρ_2 che corrispondono a due traiettorie circolari

(suggerimento: usare la regola dei segni di Cartesio)

Sol. 1)

$$V(\rho) = -\int f(\rho)\,d\rho = \int (B - A\rho)\,d\rho$$

$$= B\rho - \frac{1}{2}A\rho^2 + \text{costante}$$

$$V(\rho) = -\frac{1}{2}A\rho^2 + B\rho$$

$$V_{eff}^{(c)}(\rho) = -\frac{1}{2}A\rho^2 + B\rho + \frac{c^2}{2m\rho^2}$$

$$\frac{dV_{eff}^{(c)}(\rho)}{d\rho} = -A\rho + B - \frac{c^2}{m\rho^3}$$

$$= \frac{-Am\rho^4 + Bm\rho^3 - c^2}{m\rho^3} = 0$$

Consideriamo il polinomio

$$-Am\rho^4 + Bm\rho^3 - c^2$$

e notiamo che essendo $A > 0$, $B > 0$, ci sono due cambi di segno dei coefficienti

$$(-Am) \qquad (Bm) \qquad (-c^2)$$

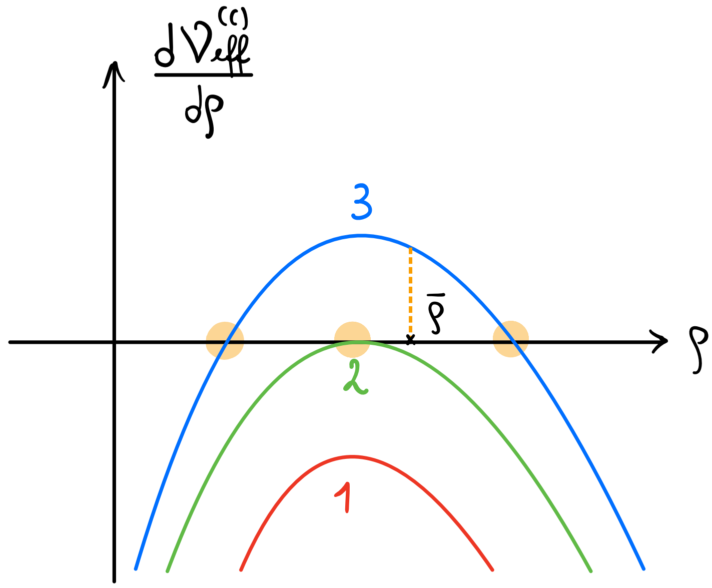
Questo significa che il polinomio ha al più due radici reali positive

Per dimostrare che sono esattamente due calcoliamo i limiti

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{dV_{eff}^{(c)}}{d\rho} = -\infty$$

$$\lim_{\rho \to +\infty} \frac{dV_{eff}^{(c)}}{d\rho} = -\infty$$

Dalle informazioni che abbiamo possiamo trovarci in uno dei tre casi in figura



Vogliamo mostrare che siamo nel caso 3

Non abbiamo ancora usato l'ipotesi

$$c^2 < m(B\bar{\rho}^3 - A\bar{\rho}^4)$$

Torniamo all'espressione di $\frac{dV_{eff}^{(c)}}{d\rho}$:

$$\frac{-Am\rho^4 + Bm\rho^3 - c^2}{m\rho^3}$$

Se trovassimo un valore di $\bar{\rho}$ di ρ tale che

$\frac{dV_{eff}^{(c)}}{d\rho}(\bar{\rho}) > 0$ allora potremmo concludere che

siamo nel caso 3.

Dovremmo avere

$$-Am\bar{\rho}^4 + mB\bar{\rho}^3 - c^2 > 0$$

cioè

$$c^2 < m(B\bar{\rho}^3 - A\bar{\rho}^4)$$

che è la nostra ipotesi

Segue che esistono ρ_1, ρ_2, con $\rho_2 > \rho_1$ tali che

$$\frac{dV_{eff}^{(c)}}{d\rho}(\rho_1) = 0, \quad \frac{dV_{eff}^{(c)}}{d\rho}(\rho_2) = 0,$$

quindi esistono due traiettorie circolari di raggi ρ_1, ρ_2

2) Disegnare il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$

Sol 2)

Partiamo da

$$V_{eff}^{(c)}(\rho) = -\frac{A}{2}\rho^2 + B\rho + \frac{c^2}{2m\rho^2}$$

dal punto precedente sappiamo che questa funzione ha due punti critici ρ_1, ρ_2, inoltre

$$\lim_{\rho \to 0^+} V_{eff}^{(c)}(\rho) = +\infty$$

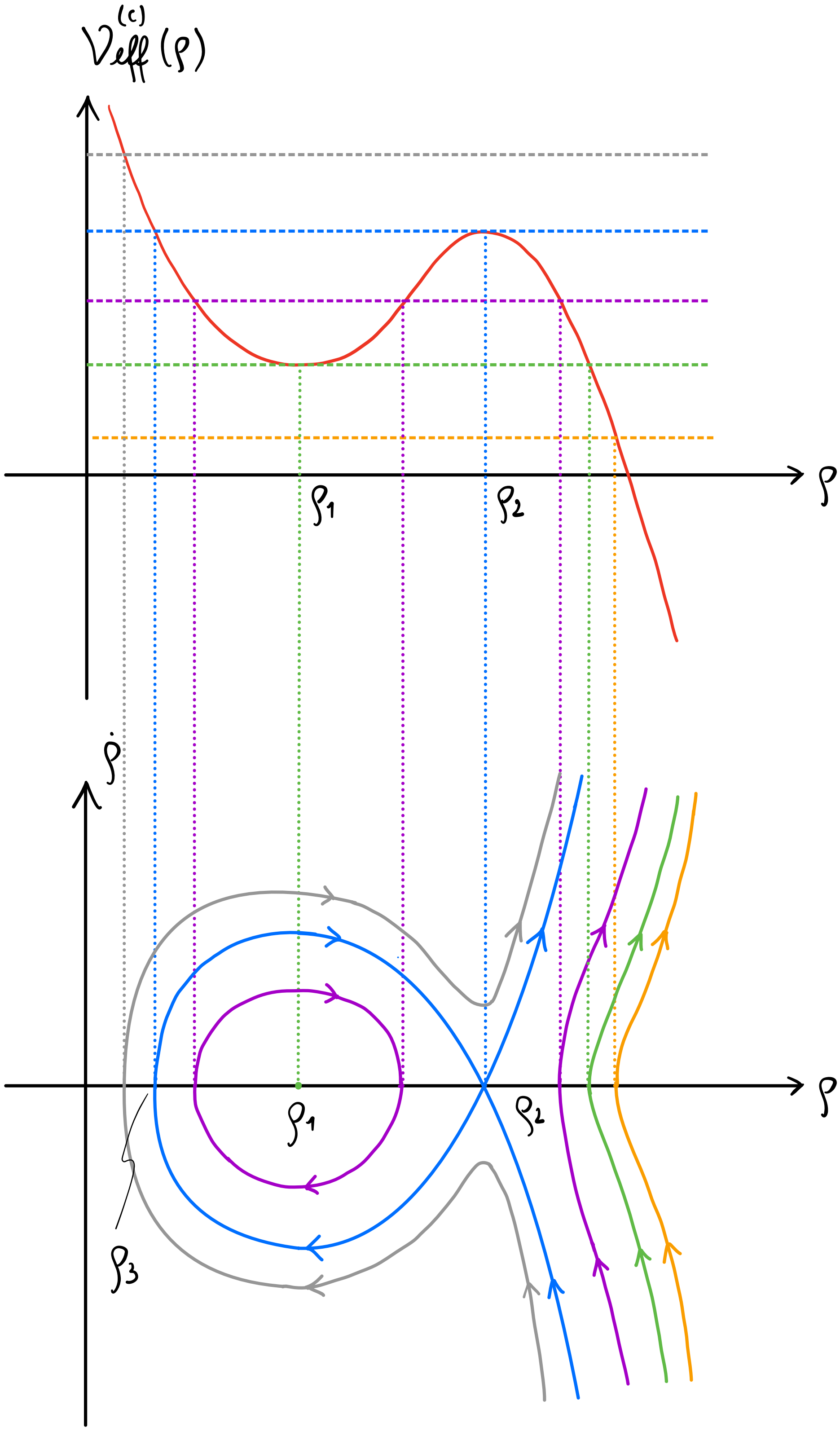
$$\lim_{\rho \to +\infty} V_{eff}^{(c)}(\rho) = -\infty$$

$$V_{eff}^{(c)}(\rho) = 0 \longrightarrow \frac{-Am\rho^4 + 2mB\rho^3 + c^2}{2m\rho^2} = 0$$

$$-Am\rho^4 + 2mB\rho^3 + c^2 = 0$$

c'è un cambio di segno, quindi il polinomio si annulla in al più un valore di $\rho > 0$

tenendo conto dei limiti calcolati sopra possiamo affermare che $V_{eff}^{(c)}(\rho)$ si annulla per un valore di ρ



$V_{eff}^{(c)}(\rho)$
ρ
ρ_1
ρ_2
$\dot{\rho}$
ρ
ρ_1
ρ_2
ρ_3

3) Trovare i periodi delle orbite circolari

Sol. 3)

$$m\rho^2\dot{\theta} = c$$

$$m\rho_1^2\dot{\theta} = c \longrightarrow \dot{\theta} = \frac{c}{m\rho_1^2}$$

con ρ_1 costante

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{m\rho_1^2} \longrightarrow dt = \frac{m\rho_1^2}{|c|}\,d\theta$$

$$\int_0^{T_1} dt = \int_0^{2\pi} \frac{m\rho_1^2}{|c|}\,d\theta = \frac{m\rho_1^2}{|c|}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$T_1 = \frac{2\pi m\rho_1^2}{|c|}$$, analogamente troviamo

$$T_2 = \frac{2\pi m\rho_2^2}{|c|}$$

4) Consideriamo il moto $\rho(t)$ con condizioni iniziali

$$\rho_0 = \left(\frac{3c^2}{mA}\right)^{1/4}, \qquad \dot{\rho}_0 = 0$$

Mostrare che la traiettoria $(\rho, \dot{\rho})$ è limitata

(suggerimento: calcolare la derivata seconda di $V_{eff}(\rho)$)

Sol. 4)

$$\frac{dV_{eff}^{(c)}}{d\rho} = -A\rho + B - \frac{c^2}{m\rho^3}$$

$$\frac{d^2V_{eff}^{(c)}}{d\rho^2} = -A + \frac{3c^2}{m\rho^4}$$

$$-Am\rho^4 + 3c^2 = 0$$

$$\rho^4 = \frac{3c^2}{Am}$$

$$\rho_0 = \left(\frac{3c^2}{Am}\right)^{1/4}$$ che è la cond. iniziale data per ρ

ρ_0 è un punto di flesso di $V_{eff}^{(c)}(\rho)$ e quindi necessariamente

$$\rho_3 < \rho_0 < \rho_2$$

dove ρ_3 è stato introdotto nella figura del ritratto di fase, ed è un punto di inversione per il livello di energia $\bar{E} = V_{eff}^{(c)}(\rho_2)$