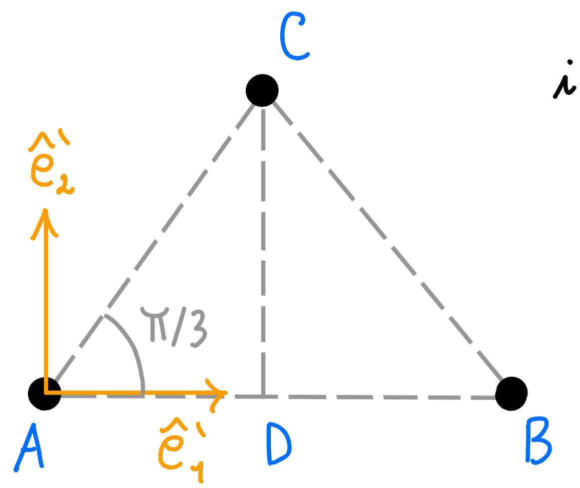
MOMENTI D'INERZIA

Consideriamo un corpo costituito da tre punti materiali vincolati rigidamente ai vertici di un triangolo equilatero di lato l



i punti hanno ugual massa m

$\hat{e}_3' = \hat{e}_1' \times \hat{e}_2'$

D è il punto medio di AB

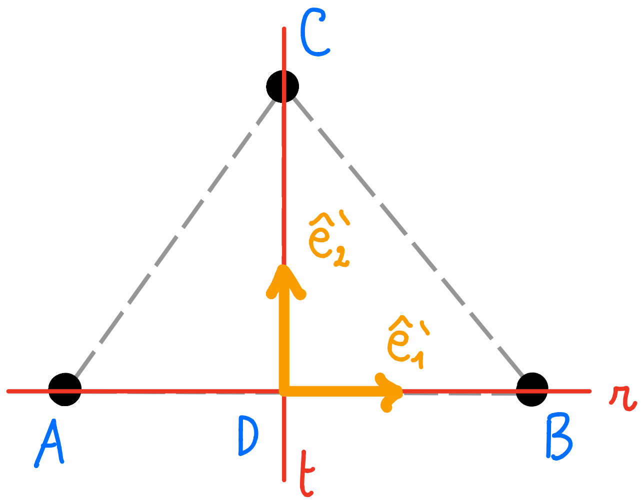
$$I_A = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} = ?$$

Mostriamo che $I_{13} = I_{23} = 0$

$$I_{13} = -\sum_{i=1}^{3} m x_i' z_i' = 0 \quad , \quad z_i' = 0, \quad i = 1,2,3$$

$$I_{23} = -\sum_{i=1}^{3} m y_i' z_i' = 0 \quad , \quad z_i' = 0, \quad i = 1,2,3$$

Ora, lasciamo il punto A che riprenderemo in seguito, e determiniamo una base principale di inerzia per il polo D



chiamiamo Π il piano su cui giace il corpo rigido

1) il piano passante per C, D e perpendicolare a Π è un piano di simmetria per riflessione (l'intersezione tra questo piano e Π è la retta t in figura)

2) segue che la retta r passante per A, B individua una direzione principale di inerzia

3) l'asse passante per D e $\perp$ Π è un asse principale di inerzia

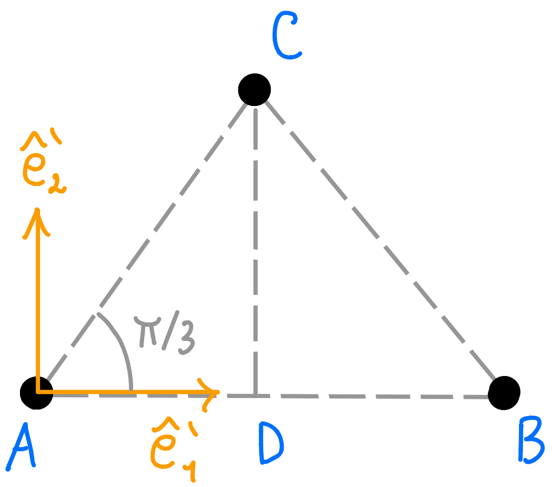
4) dunque da 2) e 3) si ha che la retta t passante per D e C individua una direzione principale di inerzia

introdotti $\hat{e}_1'$, $\hat{e}_2'$ come in figura, la base $\{\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3'\}$ è principale d'inerzia e rispetto a questa base si ha

$$I_D = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}$$

per esercizio calcolare I_{11}, I_{22}, I_{33}

Torniamo a considerare il polo A



$$I_A = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}$$

verifichiamo che $\{\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3'\}$ non è principale, per farlo ci basta mostrare che $I_{12} \neq 0$

$$I_{12} = -\sum_{i=1}^{3} m\, x_i'\, y_i' = -m\, 0 \cdot 0 - m\, \ell \cdot 0$$

$$- m \left(\frac{\ell}{2}\right)\left(\ell \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} m \ell^2$$

$$I_{12} \neq 0$$

proponiamoci di determinare una base principale di inerzia per A calcoliamo intanto i momenti I_{11}, I_{22}, I_{33}

$$I_{11} = \sum_{i=1}^{3} m(y'_i)^2 = m\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\right)^2 = \frac{3}{4}m\ell^2$$

$$I_{22} = \sum_{i=1}^{3} m(x'_i)^2 = m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m\ell^2 = \frac{5}{4}m\ell^2$$

notiamo che $I_{33} = I_{11} + I_{22}$, infatti

$$I_{33} = \sum_{i=1}^{3} m\left[(x'_i)^2 + (y'_i)^2\right] =$$

$$\sum_{i=1}^{3} m(x'_i)^2 + \sum_{i=1}^{3} m(y'_i)^2 = I_{11} + I_{22}$$

nota: questa relazione vale solo se

1) il corpo rigido è piano

2) l'asse Pz', con P polo considerato, è $\perp$ al piano su cui giace il corpo

si noti che in generale valgono le relazioni

$$I_{11} = \sum_{i=1}^{3} m\left[(y_i)^2 + (z'_i)^2\right]$$

$$I_{22} = \sum_{i=1}^{3} m\left[(x_i)^2 + (z'_i)^2\right]$$

allora

$$I_{33} = m\ell^2\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{4}\right) = 2m\ell^2$$

$$I_A = m\ell^2 \begin{pmatrix} 3/4 & -\sqrt{3}/4 & 0 \\ -\sqrt{3}/4 & 5/4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- siamo pronti per il calcolo esplicito di una base principale per A e dei momenti d'inerzia principali
- procediamo calcolando gli autovalori e i relativi autospazi di I_A : i primi ci danno i momenti principali di inerzia, i secondi le rispettive direzioni principali
- prima di cominciare notiamo che $A\overline{z}$ individua già una direzione principale dato che $I_{13} = I_{23} = 0$, inoltre

$$I_{33} = 2m\ell^2$$

è un momento principale d'inerzia

- allora ci basta considerare la matrice

$$\tilde{I}_A = m\ell^2 \begin{pmatrix} 3/4 & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 5/4 \end{pmatrix}$$

introduciamo $\tilde{\tilde{I}}_A = \begin{pmatrix} 3/4 & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 5/4 \end{pmatrix}$

e calcoliamone gli autovalori

$$\det\left(\tilde{\tilde{I}}_A - \lambda \underbrace{I_d}_{\text{matrice identità } 2\times 2}\right) = \left(\frac{3}{4}-\lambda\right)\left(\frac{5}{4}-\lambda\right) - \frac{3}{16} = 0$$

$$\frac{15}{16} - \frac{3}{4}\lambda - \frac{5}{4}\lambda + \lambda^2 - \frac{3}{16} = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + \frac{12}{16} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-3/4} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ \lambda_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

gli autovalori di $\tilde{I}_A$ sono

$$m\ell^2\lambda_1 = \frac{3}{2}m\ell^2, \quad m\ell^2\lambda_2 = \frac{1}{2}m\ell^2$$

dunque i momenti principali di inerzia sono

$$I_1 = \frac{3}{2}m\ell^2, \; I_2 = \frac{1}{2}m\ell^2, \; I_3 = 2m\ell^2$$

Occupiamoci ora delle direzioni principali di inerzia: calcoliamo gli autovettori relativi a I_1 e I_2

imponiamo $\quad \tilde{I}_A\, u = I_1 u$

con $u = (u_{x'}, u_{y'})^T$ da determinare

$$\rightarrow \cancel{m\ell^2}\,\tilde{\tilde{I}}_A\, u = \frac{3}{2}\cancel{m\ell^2}\, u$$

$$\tilde{\tilde{I}}_A u = \frac{3}{2} u$$

$$\begin{pmatrix} 3/4 & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x'} \\ u_{y'} \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} u_{x'} \\ u_{y'} \end{pmatrix}$$

$$\frac{3}{4} u_{x'} - \frac{\sqrt{3}}{4} u_{y'} = \frac{3}{2} u_{x'}$$

$$3 u_{x'} - \sqrt{3}\, u_{y'} = 6 u_{x'}$$

$$3 u_{x'} = -\sqrt{3}\, u_{y'}$$

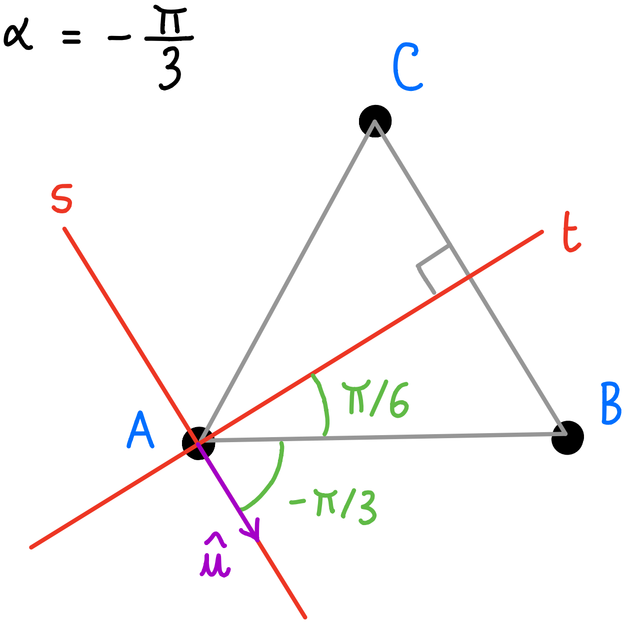
$$u_{x'} = 1 \,, \quad u_{y'} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

$$u = (1, -\sqrt{3})^T$$

lo normalizziamo $\hat{u} = \dfrac{(1, -\sqrt{3})^T}{\sqrt{1+3}} = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^T$

$$\hat{u} = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)^T = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^T$$

$$\rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{3}$$



la retta s individua una direzione principale di inerzia; poichè $A\hat{z}$ è pure una dir. princ. d'inerzia possiamo dire che la retta $t \perp s$ sul piano del corpo individua una dir. principale

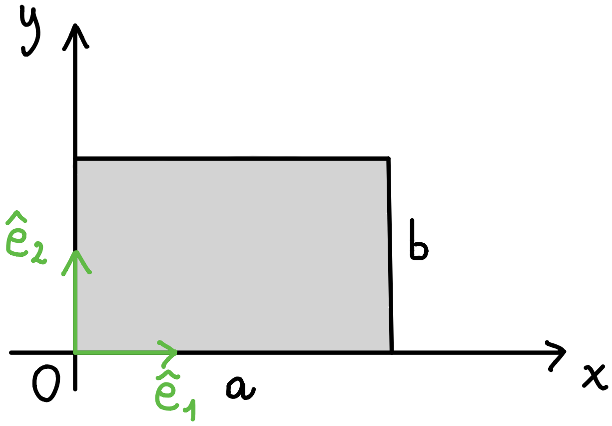
In effetti si potevano individuare fin da subito le dir. principali di inerzia prendendo come polo A: consideriamo un piano ⊥ al piano Π passante per A e il punto medio del segmento BC, questo è un piano di simmetria per riflessione; allora s che è perpendicolare a tale piano è un asse principale d'inerzia e di conseguenza anche t;
si noti che t è la bisettrice dell'angolo $C\hat{A}B$

---

corpi rigidi continui

Consideriamo una lamina rettangolare omogenea di lati a, b

$\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2$



preso come polo O, e come base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$

calcoliamo i momenti di inerzia I_{11}, I_{22}, I_{33};

dovremo scrivere degli integrali di superficie e per

capire come impostarli, calcoliamo l'area del rettangolo;

definiamo prima la regione R di cui vogliamo calcolare

l'area

$$R = \{(x,y) : 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b\}$$

$$A_R = \int_R \underbrace{dx\,dy}_{\text{elementino infinitesimo d'area}}$$

$$A_R = \int_0^b \int_0^a dx\,dy = \int_0^b \left(\int_0^a dx \right) dy =$$

$$\int_0^b x\Big|_0^a dy = \int_0^b a\,dy = a\,y\Big|_0^b = ab$$

siano σ, m la densità e la massa della lamina

$$I_{11} = I_{O,\hat{e}_1} = \int_R \sigma y^2\,dx\,dy \qquad \text{con}$$

$$\sigma = \frac{m}{A_R} = \frac{m}{ab}$$

$$I_{11} = \frac{m}{ab} \int_0^b \int_0^a y^2 \, dx \, dy = \frac{m}{ab} \int_0^b y^2 \left(\int_0^a dx \right) dy =$$

$$\frac{m}{\cancel{a}b} \int_0^b \cancel{a} y^2 \, dy = \frac{m}{b} \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^b = \frac{m b^3}{3b} = \frac{m b^2}{3}$$

$$I_{22} = I_{0,\hat{e}_2} = \int_R \sigma x^2 \, dx \, dy$$

$$I_{22} = \frac{m}{ab} \int_0^b \int_0^a x^2 \, dx \, dy = \frac{m}{ab} \int_0^b \left(\int_0^a x^2 \, dx \right) dy =$$

$$\frac{m}{ab} \int_0^b \left(\frac{1}{3} x^3 \Big|_0^a \right) dy = \frac{m}{\cancel{a}b} \int_0^b \frac{1}{3} a^{\cancel{3}\,2} \, dy =$$

$$= \frac{m a^2}{3b} y \Big|_0^b = \frac{m a^2 \cancel{b}}{3\cancel{b}} = \frac{m a^2}{3}$$

$$I_{33} = I_{0,\hat{e}_3} = \int_R \sigma (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} = \frac{mb^2}{3} + \frac{ma^2}{3} = \frac{m}{3}(a^2+b^2)$$

calcoliamo ora il momento d'inerzia centrifugo

$$I_{12} = -\int_R \sigma\, x y \, dx dy$$

$$-I_{12} = \frac{m}{ab}\int_0^b \int_0^a x y \, dx dy = \frac{m}{ab}\int_0^b y \left(\int_0^a x\, dx\right) dy =$$

$$\frac{m}{ab}\int_0^b y \left(\frac{1}{2}x^2\Big|_0^a\right) dy = \frac{m}{\cancel{a}b}\int_0^b \frac{1}{2}a^{\cancel{2}} y \, dy =$$

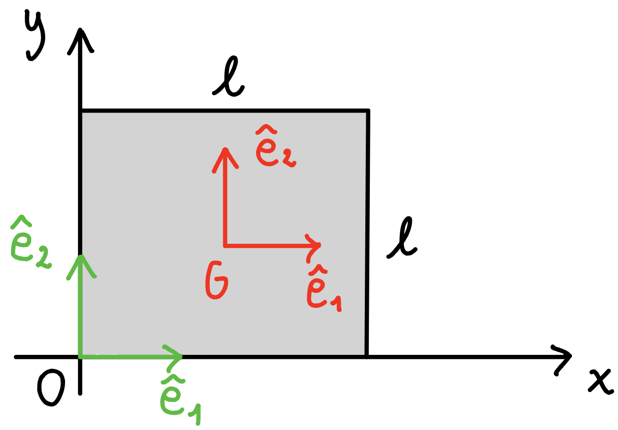
$$\frac{ma}{2b}\,\frac{1}{2}y^2\Big|_0^b = \frac{ma}{4b}b^2 = \frac{mab}{4}\,, \quad I_{12} = -\frac{mab}{4}$$

$$I_0 = m\begin{pmatrix} b^2/3 & -ab/4 & 0 \\ -ab/4 & a^2/3 & 0 \\ 0 & 0 & (a^2+b^2)/3 \end{pmatrix}$$

Lamina quadrata omogenea di lato ℓ

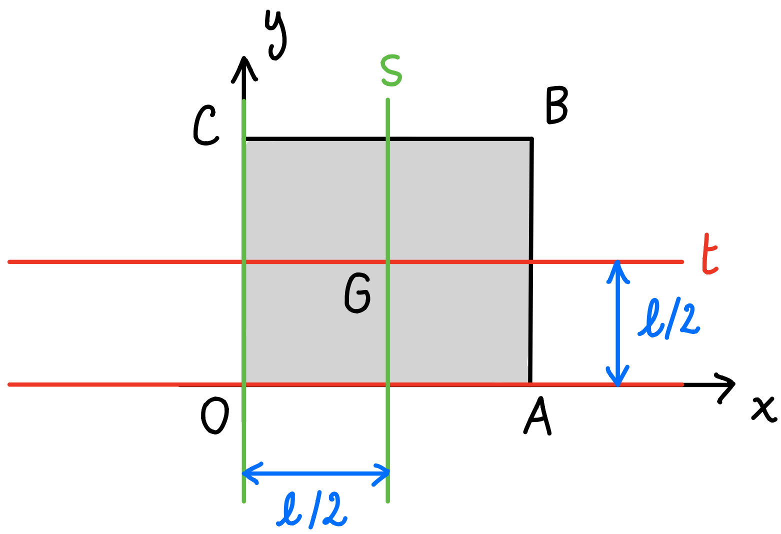
dai risultati trovati per la lamina rettangolare, ponendo $a = b = \ell$, si vede che prendendo come polo il punto O

$$I_{O,\hat{e}_1} = \frac{m\ell^2}{3} = I_{O,\hat{e}_2} \quad , \quad I_{O,\hat{e}_3} = \frac{2}{3}m\ell^2$$



consideriamo come polo il baricentro G e di nuovo la base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$; calcoliamo intanto I_{11}, I_{22}, I_{33}

per I_{11}, I_{22} usiamo il teorema di Huygens-Steiner



$$I_{11} = I_{G,\hat{e}_1} = I_{O,\hat{e}_1} - m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{m\ell^2}{3} - \frac{m\ell^2}{4}$$

$$m\ell^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{m\ell^2}{12}$$

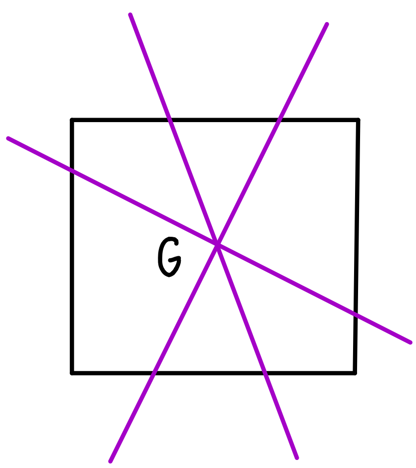
$$I_{22} = I_{G,\hat{e}_2} = I_{O,\hat{e}_2} - m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{m\ell^2}{3} - \frac{m\ell^2}{4}$$

$$m\ell^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{m\ell^2}{12}$$

$$I_{33} = I_{G,\hat{e}_3} = \frac{m\ell^2}{6}$$

Notiamo che il piano perpendicolare al piano della lamina e passante per i punti medi dei lati OA e CB (e quindi per G) è un piano di simmetria per riflessione, segue che la retta t (vedi figura) passante per i punti medi dei lati OC e AB è un asse principale d'inerzia e allora per G la base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ è principale di inerzia

poichè i momenti d'inerzia rispetto a due direzioni principali (nello specifico s e t) sono uguali allora qualunque asse passante per G scelto nel piano del corpo rigido è principale



le rette viola sono direzioni principali di inerzia mostriamo questo fatto:

chiamiamo $\vec{u}_s, \vec{u}_t$ due vettori aventi la stessa direzione di s e t, allora si ha

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{J}_G \vec{u}_s &= \lambda \vec{u}_s \\ \mathcal{J}_G \vec{u}_t &= \lambda \vec{u}_t \end{aligned}\right\} \vec{u}_s, \vec{u}_t \text{ sono autovettori di } \mathcal{J}_G$$

con $\mathcal{J}_G$ operatore di inerzia relativo a G;

introduciamo un vettore generico diverso da $\vec{u}_s, \vec{u}_t$ e generato da $\vec{u}_s, \vec{u}_t$

$$\vec{v} = \alpha_s \vec{u}_s + \alpha_t \vec{u}_t, \quad \alpha_s \alpha_t \neq 0$$

vale

$$\mathcal{J}_G \vec{v} = \mathcal{J}_G (\alpha_s \vec{u}_s + \alpha_t \vec{u}_t) =$$

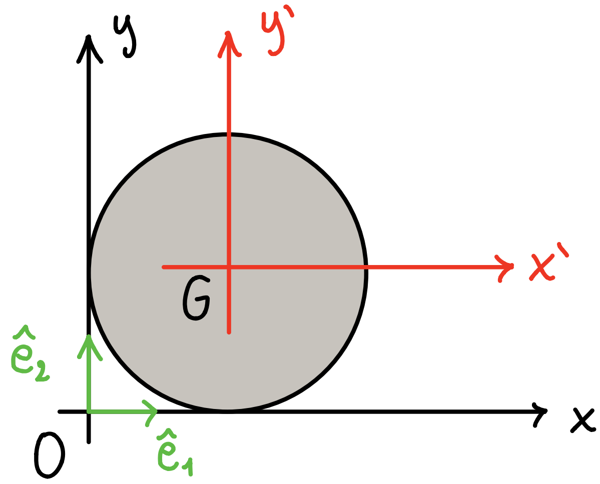
$$\alpha_s \mathcal{J}_G \vec{u}_s + \alpha_t \mathcal{J}_G \vec{u}_t = \lambda (\alpha_s \vec{u}_s + \alpha_t \vec{u}_t)$$

$$\longrightarrow \mathcal{J}_G \vec{v} = \lambda \vec{v}$$

e quindi $\vec{v}$ è autovettore di $\mathcal{J}_G$, segue che la direzione di questo vettore individua una direzione principale

Passiamo ad un altro caso importante che è quello del disco omogeneo di raggio R

dato il disco in figura calcoliamone il momento di inerzia rispetto all'asse Ox



introduciamo il riferimento $G\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ (l'asse Gx' è parallelo all'asse Ox, l'asse Gy' è parallelo ad Oy)

$$I_{O,\hat{e}_1} = I_{G,\hat{e}_1} + mR^2 \quad \text{(teorema di H.-S.)}$$

notiamo che

$$I_{G,\hat{e}_1} + I_{G,\hat{e}_2} = I_{G,\hat{e}_3}$$

e

$$I_{G,\hat{e}_1} = I_{G,\hat{e}_2}$$

allora $2I_{G,\hat{e}_1} = I_{G,\hat{e}_3} \longrightarrow I_{G,\hat{e}_1} = \dfrac{I_{G,\hat{e}_3}}{2}$

quindi

$$I_{O,\hat{e}_1} = \frac{I_{G,\hat{e}_3}}{2} + mR^2$$

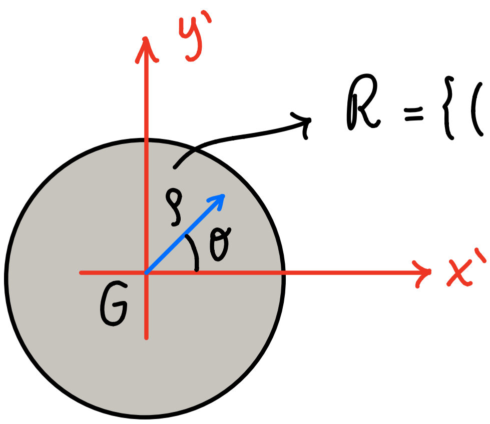
Calcoliamo $I_{G,\hat{e}_3}$

$$I_{G,\hat{e}_3} = \int_{\mathcal{R}} \sigma \left(x'^2 + y'^2\right) dx'\,dy'$$

per risolvere in maniera più agevole questo integrale introduciamo coordinate polari

$$\begin{cases} x' = \rho\cos\theta \\ y' = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

e descriviamo l'insieme $\mathcal{R}$ di punti che costituisce il disco come



$$\mathcal{R} = \{(\rho,\theta) : 0 \leqslant \rho \leqslant R,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi\}$$

l'elementino d'area $dx'\,dy'$ diventa

$$\rho\, d\rho\, d\theta$$

mentre $(x'^2 + y'^2)$ diventa

$$\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta = \rho^2$$

$$I_{G,\hat{e}_3} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma\,\rho^2\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma\,\rho^3\,d\rho\,d\theta$$

dove $\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$

$$= \frac{m}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^3 \, d\rho \, d\theta = \frac{m}{\pi R^2} \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \rho^3 \, d\rho$$

$$= \frac{m}{\cancel{\pi} R^2} 2\cancel{\pi} \int_0^R \rho^3 \, d\rho = \frac{\cancel{2} m}{R^2} \frac{1}{\cancel{4}_{2}} \rho^4 \Big|_0^R = \frac{m R^2}{2}$$

$$I_{G,\hat{e}_1} = I_{G,\hat{e}_2} = \frac{m R^2}{4}$$

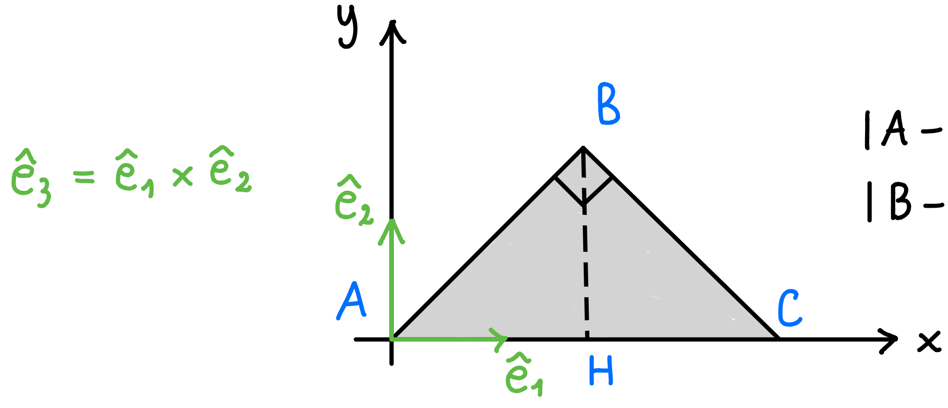
$$I_{0,\hat{e}_1} = \frac{I_{G,\hat{e}_3}}{2} + m R^2 = \frac{m R^2}{4} + m R^2 = \frac{5}{4} m R^2$$

NOTA : qualsiasi asse passante per G e nel piano del disco è principale di inerzia

---

Esercizio (28 gennaio 2020)

lamina triangolare omogenea di densità μ



$|A - B| = \ell$

$|B - C| = \ell$

H punto medio del lato AC

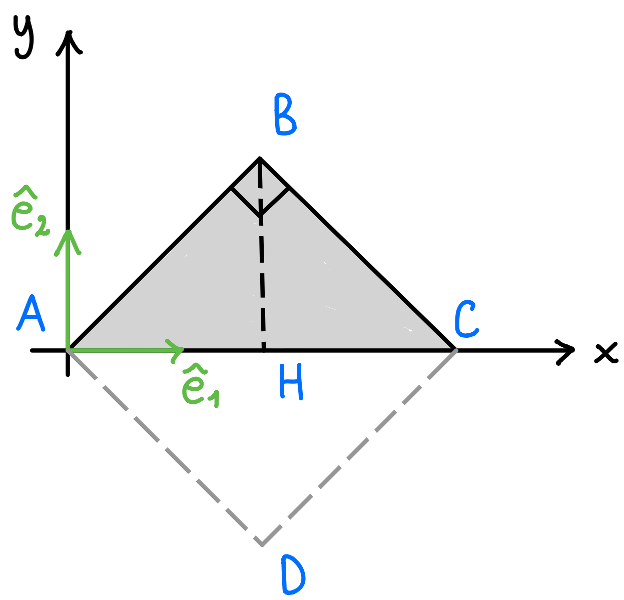
i) Calcolare $I_{A,\hat{e}_1}$, $I_{A,\hat{e}_2}$, $I_{A,\hat{e}_3}$

Sol.

C'è una via molto furba per rispondere, che parte da una semplice idea: il triangolo rettangolo ABC può essere visto come metà di un quadrato

introduciamo il punto D

$$D - A = \ell \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{e}_1 - \ell \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{e}_2$$



ABCD è un quadrato di lato ℓ; assumiamo che questo quadrato abbia densità μ e massa $2m$, dove m è la massa della lamina triangolare

Il momento di inerzia $I^{(q)}_{A,\hat{e}_1}$ per il quadrato è

$$\frac{(2m)\ell^2}{12}$$ (infatti l'asse Ax passa per il bari=

centro del quadrato e prima abbiamo visto qual è la sua espressione)

Inoltre i contributi al momento $I^{(q)}_{A,\hat{e}_1}$ delle due lamine triangolari che lo costituiscono sono uguali, cioè

$$I^{(q)}_{A,\hat{e}_1} = 2\, I_{A,\hat{e}_1}$$

segue che

$$I_{A,\hat{e}_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{(2m)\ell^2}{12}\right) = \frac{m\ell^2}{12}$$

Per quanto riguarda $I_{A,\hat{e}_2}$, possiamo usare il teorema di Huygens - Steiner

$$I_{A,\hat{e}_2} = I_{H,\hat{e}_2} + m\left(\ell\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

il baricentro della lamina appartiene ad una retta passante per H e paral= lela a Ay

e per calcolare $I_{H,\hat{e}_2}$ notiamo che se $I^{(q)}_{H,\hat{e}_2}$ è il momento d'inerzia della lamina quadrata ABCD vale

$$I_{H,\hat{e}_2} = \frac{1}{2}\, I^{(q)}_{H,\hat{e}_2}$$

ma

$$I^{(q)}_{H,\hat{e}_2} = I^{(q)}_{A,\hat{e}_1} = \frac{(2m)\ell^2}{12}$$

Quindi

$$I_{A,\hat{e}_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{(2m)\ell^2}{12}\right) + \frac{m\ell^2}{2} = \frac{7}{12}m\ell^2$$

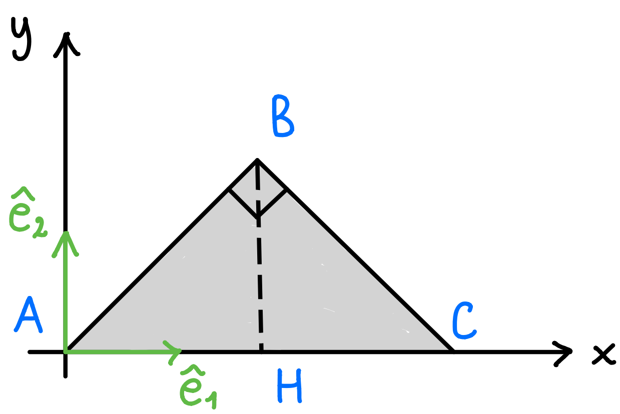
Infine

$$I_{A,\hat{e}_3} = I_{A,\hat{e}_1} + I_{A,\hat{e}_2} = m\ell^2\left(\frac{1}{12} + \frac{7}{12}\right)$$

$$= \frac{2}{3}m\ell^2$$

ii) Mostrare che qualunque asse sul piano Axy passante per H è principale di inerzia

Sol.



poiché il piano perpendicolare al piano della lamina e passante per H, B è un piano di simmetria per riflessione, allora la retta Ax e la retta passante per H, B individuano due direzioni principali, e i momenti principali corrispondenti sono

$$I_{A,\hat{e}_1} = \frac{m\ell^2}{12} = I_{H,\hat{e}_1}$$

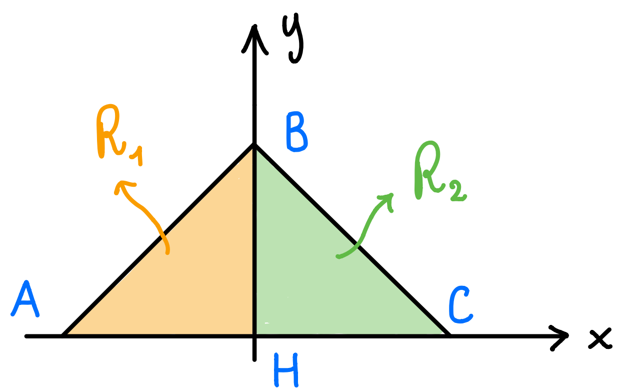
$$I_{H,\hat{e}_2} = \frac{m\ell^2}{12}$$

Dal fatto che i momenti rispetto a due assi principali passanti per H sono uguali posso concludere che qualunque asse sul piano Axy passante per H è principale di inerzia

Torniamo al punto i)

proviamo a calcolare $I_{A,\hat{e}_1}$ usando la sua definizione

dato che $I_{A,\hat{e}_1} = I_{H,\hat{e}_1}$, spostiamo l'origine degli assi in H



$$I_{H,\hat{e}_1} = \int_R \mu\, y^2\, dx\, dy$$

dove $R = R_1 + R_2$ (vedi figura)

scriviamo l'equazione della retta passante per A, B :

$$y = x + \ell\frac{\sqrt{2}}{2}$$

scriviamo l'equazione della retta passante per B, C:

$$y = -x + \ell\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Allora

$$R_1 = \left\{(x,y) : -\ell\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant x + \ell\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

$$R_2 = \left\{(x,y) : 0 < x \leqslant \ell\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant -x + \ell\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

$$I_{H,\hat{e}_1} = \int_{R_1} \mu y^2 \, dx\, dy + \int_{R_2} \mu y^2 \, dx\, dy$$

inoltre

infatti $\forall\ (x_1, y_1) \in R_1$ si ha $(-x_1, y_1) \in R_2$

$$\int_{R_1} \mu y^2 \, dx\, dy = \int_{R_2} \mu y^2 \, dx\, dy$$

$$I_{H,\hat{e}_1} = 2\int_{R_1} \mu y^2 \, dx\, dy$$

$$I_{H,\hat{e}_1} = 2\mu \int_{-\ell\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} \int_{0}^{x+\ell\frac{\sqrt{2}}{2}} y^2 \, dx\, dy \qquad \text{con } \mu = \frac{m}{A}$$

$$A = \frac{\ell^2}{2}$$

$$I_{H,\hat{e}_1} = 2\mu \int_{-\ell\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} \left(\int_{0}^{x+\ell\frac{\sqrt{2}}{2}} y^2 \, dy \right) dx =$$

$$2\mu \int_{-\ell\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} \frac{1}{3} y^3 \Big|_{0}^{x+\ell\frac{\sqrt{2}}{2}} dx = \frac{2}{3}\mu \int_{-\ell\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} \left(x+\ell\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 dx =$$

$$\frac{2}{3}\mu \int_{-\ell\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} \left(x^3 + \ell^3\frac{2\sqrt{2}}{8} + \frac{3}{2}\sqrt{2}\,\ell x^2 + \frac{3}{2}\ell^2 x\right) dx =$$

$$\frac{2}{3}\mu \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{\ell^3\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}\,\ell}{2}x^3 + \frac{3\ell^2}{4}x^2\right)\Big|_{-\ell\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} =$$

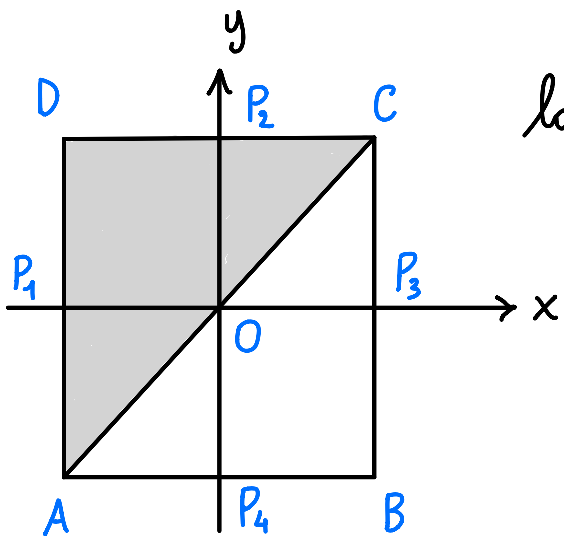
$$-\frac{2}{3}\mu \left(\frac{1}{4}\frac{\ell^4}{4} - \frac{\ell^4}{4} - \frac{\ell^4 4}{16} + \frac{3\ell^2}{4}\frac{\ell^2}{2}\right) =$$

$$-\frac{2}{3}\mu\frac{\ell^4}{4}\left(\frac{1}{4} - 1 - 1 + \frac{3}{2}\right) = -\frac{\mu\ell^4}{6}\left(-\frac{1}{4}\right) =$$

$$\frac{\mu\ell^4}{24} = \frac{m\ell^2}{12}$$

quindi $I_{A,\hat{e}_1} = \frac{m\ell^2}{12}$, che è il risultato che avevamo trovato prima

Esercizio (4 giugno 2019)



lamina quadrata non omogenea di lato l

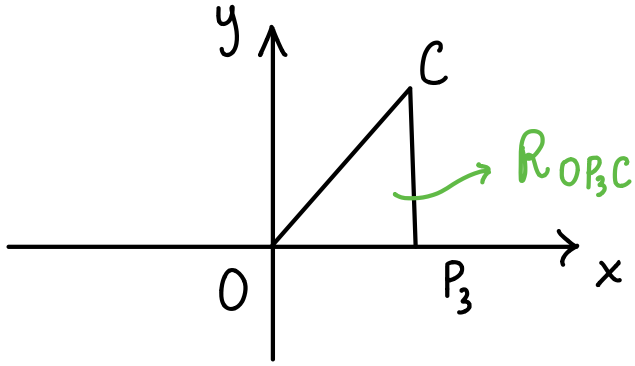
il triangolo ACD ha densità 2μ, il triangolo ABC ha densità μ

il centro del quadrato coincide con O e i lati AB, BC sono paralleli agli assi Ox, Oy

i) Calcolare la matrice d'inerzia I_O

Sol.

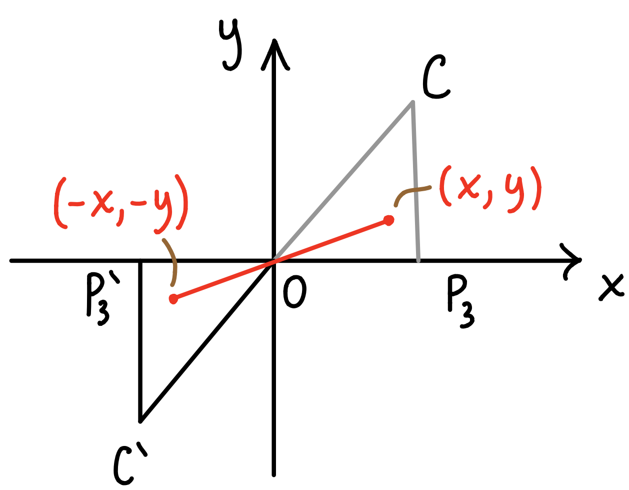
Calcoliamo I_{11}. Consideriamo la porzione del corpo rigido che occupa il triangolo OP_3C



il suo contributo ad I_{11} sarà

$$\int_{R_{OP_3C}} \mu\, y^2\, dx\, dy$$

Consideriamo un altro triangolo ottenuto mappando ogni punto di R_{OP_3C} di coordinate (x, y) nel punto di coordinate $(-x, -y)$, cioè otteniamo il triangolo $OP_3'C'$

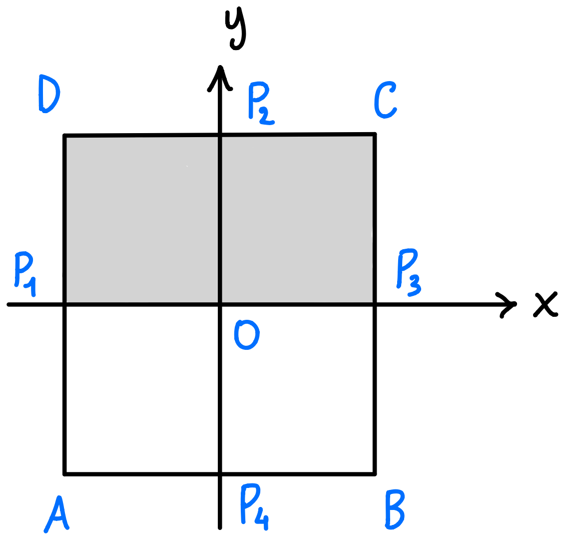


Allora considerando la lamina triangolare $OP_3'C'$ di densità μ si ha

$$\int_{R_{OP_3'C'}} \mu\, y^2\, dx\, dy = \int_{R_{OP_3C}} \mu\, y^2\, dx\, dy$$

Un discorso analogo si può fare per la porzione del corpo rigido che occupa il triangolo OP_1A

Alla luce di queste considerazioni il momento di inerzia I_{11} non cambia se scambio i due triangoli OP_3C e OP_1A, ottenendo



si nota poi che il contributo del rettangolo P_1P_3CD è doppio rispetto a quello del rettangolo P_1ABP_3, e quest'ultimo è dato da

$$\mu \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \int_{-\ell/2}^{0} y^2 \, dx \, dy = \mu \ell \int_{-\ell/2}^{0} y^2 \, dy$$

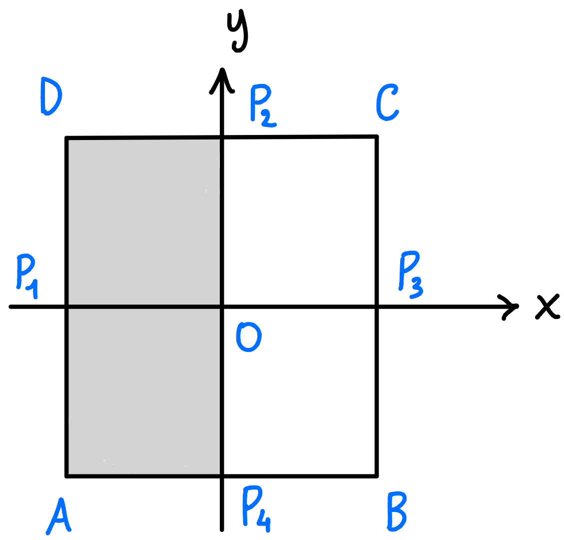
$$= \mu \ell \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-\ell/2}^{0} = \frac{\mu \ell^4}{24}$$

$$I_{11} = \frac{\mu \ell^4}{24} + \frac{2\mu \ell^4}{24} = \frac{\mu \ell^4}{8} = \frac{2m}{3\ell^2} \frac{\ell^4}{8} = \frac{m\ell^2}{12}$$

massa di tutto il corpo rigido $\leftarrow \; m = \mu \frac{\ell^2}{2} + 2\mu \frac{\ell^2}{2} = \frac{3\mu}{2} \ell^2 \longrightarrow \mu = \frac{2m}{3\ell^2}$

Per trovare il momento di inerzia della lamina quadrata rispetto all'asse Oy si procede in modo analogo (cioè I_{22})

Questa volta l'espressione di I_{22} non cambia se scambiamo la porzione della lamina quadrata che occupa il triangolo OCP_2 con quella che occupa il triangolo OAP_4, ottenendo



si nota poi che il contributo del rettangolo AP_4P_2D è doppio rispetto a quello del rettangolo P_4BCP_2, e quest'ultimo è dato da

$$\mu \int_0^{\ell/2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 \, dx\, dy = \mu \ell \int_0^{\ell/2} x^2 \, dx$$

$$= \mu \ell \, \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^{\ell/2} = \frac{\mu \ell}{3} \frac{\ell^3}{8} = \frac{\mu \ell^4}{24}$$

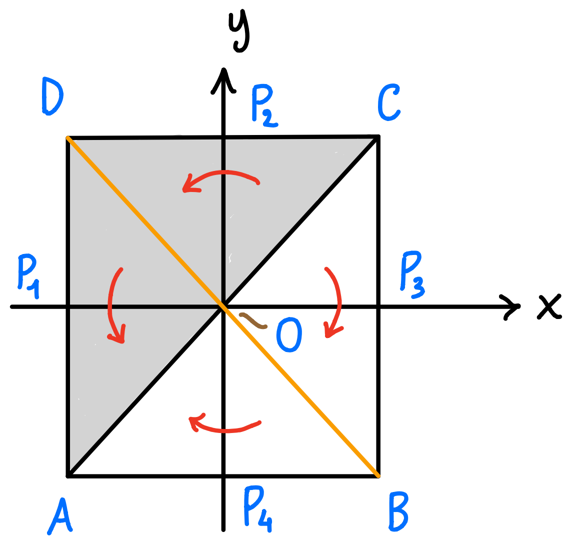
risulta

$$I_{22} = \frac{m\ell^2}{12}$$ (era già evidente che doveva essere $I_{22} = I_{11}$)

Si ha poi

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} = \frac{m\ell^2}{6}$$

Calcoliamo infine I_{12}



tracciamo la diagonale DB

consideriamo la porzione del corpo rigido che occupa il triangolo OP_3C, il suo contributo a I_{12} sarà

$$-\int_{R_{OP_3C}} \mu\, x\, y\, dx\, dy$$

notiamo che i punti contenuti nel triangolo OBP_3 si possono ottenere mappando ciascun punto di R_{OP_3C}

di coordinate (x, y) nel punto $(x, -y)$. Allora si vede che il contributo della porzione di lamina che occupa il triangolo OBC è nullo

Un ragionamento del tutto analogo porta a dire che anche il contributo della porzione della lamina delimitata dal triangolo AOD è nullo

Infine, usando la stessa idea si mostra che i contributi delle porzioni triangolari OCD, OAB sono nulli

In definitiva

$$I_{12} = 0$$

e la matrice di inerzia I_0 (nel riferimento $Oxyz$) è

$$I_0 = \frac{m\ell^2}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

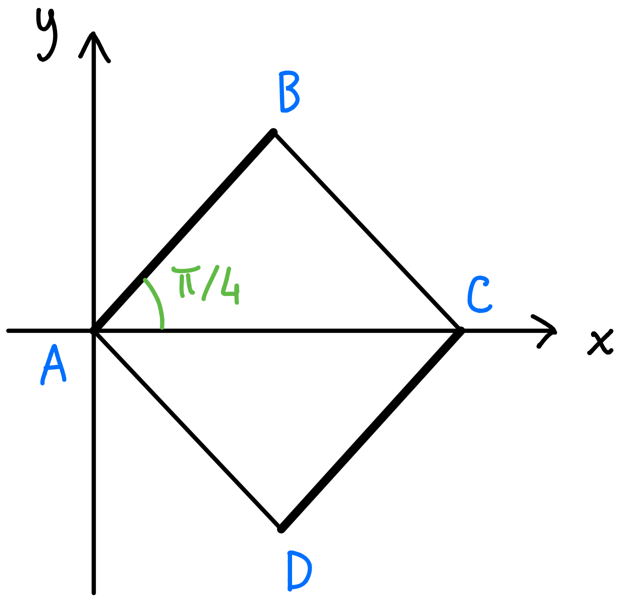
Si vede che ogni asse passante per O nel piano della lamina è principale di inerzia

Provate a calcolare le coordinate del baricentro della lamina

---

Esercizio (18 febbraio 2020)

i) Calcolare la matrice di inerzia del corpo rigido descritto nella facciata seguente rispetto al sistema di riferimento $Axyz$



corpo rigido quadrato
di massa m
costituito da 4 aste omogenee
di uguale lunghezza l

AB, DC hanno densità 2μ
AD, BC hanno densità μ

Sol.

Cominciamo da I_{11}

$$I_{11} = I_{11}^{(AB)} + I_{11}^{(DC)} + I_{11}^{(AD)} + I_{11}^{(BC)}$$

con ragionamenti simili a quelli fatti nell'esercizio precedente si vede che

$$I_{11}^{(AB)} = I_{11}^{(DC)}$$

$$I_{11}^{(AD)} = I_{11}^{(BC)}$$

inoltre

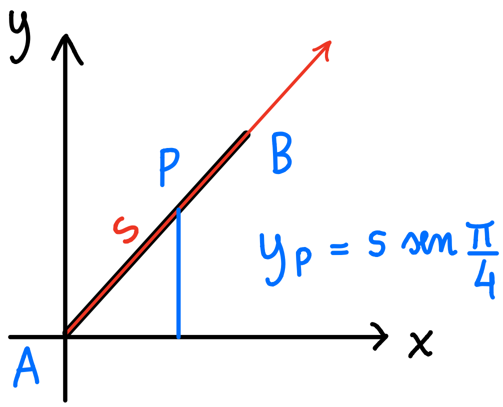
$$I_{11}^{(AD)} = \frac{1}{2} I_{11}^{(AB)}$$

Allora

$$I_{11} = I_{11}^{(AB)} + I_{11}^{(AB)} + \frac{1}{2} I_{11}^{(AB)} + \frac{1}{2} I_{11}^{(AB)}$$

$$= 3\, I_{11}^{(AB)}$$

calcoliamo $I_{11}^{(AB)}$



per individuare le posizioni dei punti dell'asta introduciamo s e l'insieme

$$R = \{ 0 \leq s \leq \ell \}$$

$$I_{11}^{(AB)} = 2\mu \int_0^\ell \left(s \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 ds =$$

$$2\mu \, \frac{1}{2} \int_0^\ell s^2 ds = \frac{\mu \ell^3}{3}$$

la massa dell'asta AB è $\frac{m}{3}$, quindi $2\mu = \frac{m/3}{\ell}$

e $\mu = \frac{m}{6\ell}$

$$I_{11}^{(AB)} = \frac{m\ell^2}{18}, \quad I_{11} = \frac{m\ell^2}{6}$$

Calcoliamo I_{33}

$$I_{33} = I_{33}^{(AB)} + I_{33}^{(DC)} + I_{33}^{(AD)} + I_{33}^{(BC)}$$

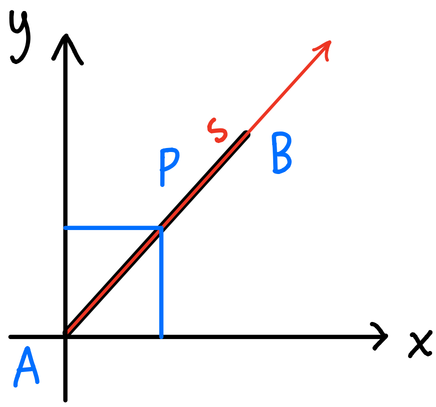
si vede che

$$I_{33}^{(AD)} = \frac{1}{2} I_{33}^{(AB)}, \quad I_{33}^{(BC)} = \frac{1}{2} I_{33}^{(DC)}$$

quindi

$$I_{33} = \frac{3}{2} I_{33}^{(AB)} + \frac{3}{2} I_{33}^{(DC)}$$

Calcoliamo $I_{33}^{(AB)}$



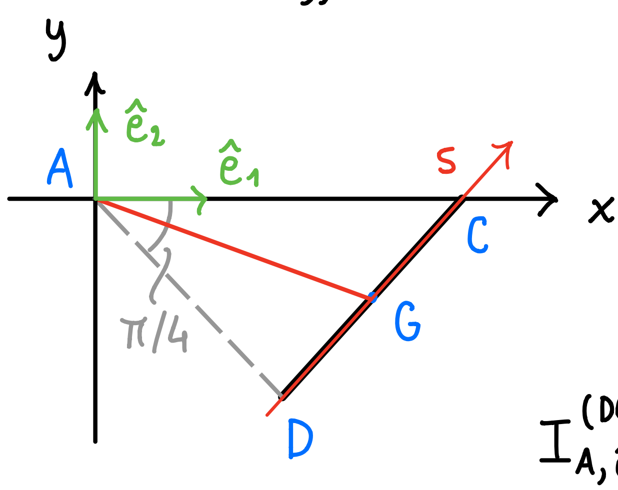
$x_P = s \cos \frac{\pi}{4}$

$y_P = s \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$

$$I_{33}^{(AB)} = 2\mu \int_0^{\ell} \left[\left(s \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(s \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right] ds =$$

$$2\mu \int_0^{\ell} s^2 ds = 2\mu \frac{1}{3} \ell^3 = \frac{2}{3} \left(\frac{m}{6\ell} \right) \ell^3 = \frac{m\ell^2}{9}$$

Calcoliamo $I_{33}^{(DC)}$



Usiamo il teorema di Huigens - Steiner

$$I_{A,\hat{e}_3}^{(DC)} = I_{G,\hat{e}_3}^{(DC)} + \frac{m}{3} |A - G|^2$$

dove $I_{33}^{(DC)} \equiv I_{A,\hat{e}_3}^{(DC)}$, $\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2$

e $I^{(DC)}_{G,\hat{e}_3}$ è il momento di inerzia dell'asta rispetto ad un asse parallelo ad $\hat{e}_3$ e passante per G

$$I^{(DC)}_{G,\hat{e}_{33}} = 2\mu \int_{R} s^2\, ds = 2\mu \int_{-\ell/2}^{\ell/2} s^2\, ds =$$

$$R = \{-\ell/2 \leq s \leq \ell/2\}$$

$$= 2\mu \,\frac{1}{3}\frac{\ell^3}{4} = \frac{\mu \ell^3}{6} = \frac{m\ell^2}{36}$$

poi $$|A-G|^2 = \left(\ell\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\ell}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\ell}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{3}{2}\,\ell\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\ell\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{18\ell^2}{16} + \frac{2\ell^2}{16}$$

$$= \frac{5}{4}\ell^2$$

$$I^{(DC)}_{33} = \frac{m\ell^2}{36} + \frac{m}{3}\frac{5}{4}\ell^2 = m\ell^2\left(\frac{1}{36} + \frac{5}{12}\right) =$$

$$\frac{16}{36} m\ell^2 = \frac{4}{9} m\ell^2$$

In definitiva

$$I_{33} = \frac{3}{2} I^{(AB)}_{33} + \frac{3}{2} I^{(DC)}_{33} = \frac{3}{2}\frac{m\ell^2}{9} + \frac{3}{2}\frac{4}{9} m\ell^2$$

$$= \frac{15}{18} m\ell^2 = \frac{5}{6} m\ell^2$$

Si ha subito

$$I_{22} = I_{33} - I_{11} = \frac{5}{6} m\ell^2 - \frac{m\ell^2}{6} = \frac{2}{3} m\ell^2$$

Non ci resta che calcolare I_{12}

$$I_{12} = I_{12}^{(AB)} + I_{12}^{(DC)} + I_{12}^{(AD)} + I_{12}^{(BC)}$$

notiamo che

$$I_{12}^{(AD)} = -\frac{1}{2} I_{12}^{(AB)}$$

$$I_{12}^{(DC)} = -2 I_{12}^{(BC)}$$

Allora

$$I_{12} = \frac{1}{2} I_{12}^{(AB)} - I_{12}^{(BC)}$$

Calcoliamo $I_{12}^{(AB)}$

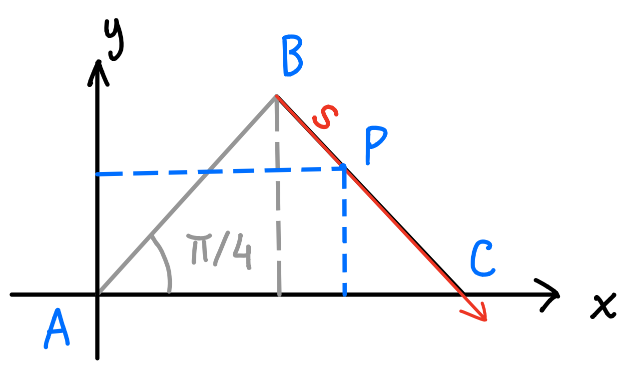
$$I_{12}^{(AB)} = -2\mu \int_0^\ell \left(s\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(s\frac{\sqrt{2}}{2}\right) ds$$

$$= -\mu \int_0^\ell s^2\, ds = -\frac{\mu}{3}\ell^3 = -\left(\frac{m}{6\ell}\right)\frac{\ell^3}{3} = -\frac{m\ell^2}{18}$$

Calcoliamo $I_{12}^{(BC)}$

$$x_P = \ell\frac{\sqrt{2}}{2} + s\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_P = \ell\frac{\sqrt{2}}{2} - s\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$I_{12}^{(BC)} = -\mu \int_0^{\ell} \left(\ell \frac{\sqrt{2}}{2} + s\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\ell\frac{\sqrt{2}}{2} - s\frac{\sqrt{2}}{2}\right) ds$$

$$= -\frac{\mu}{2}\int_0^{\ell} (\ell^2 - s^2)\, ds = -\frac{\mu}{2}\left(\ell^3 - \frac{1}{3}\ell^3\right)$$

$$= -\frac{\mu \ell^3}{3} = -\frac{m\ell^2}{18}$$

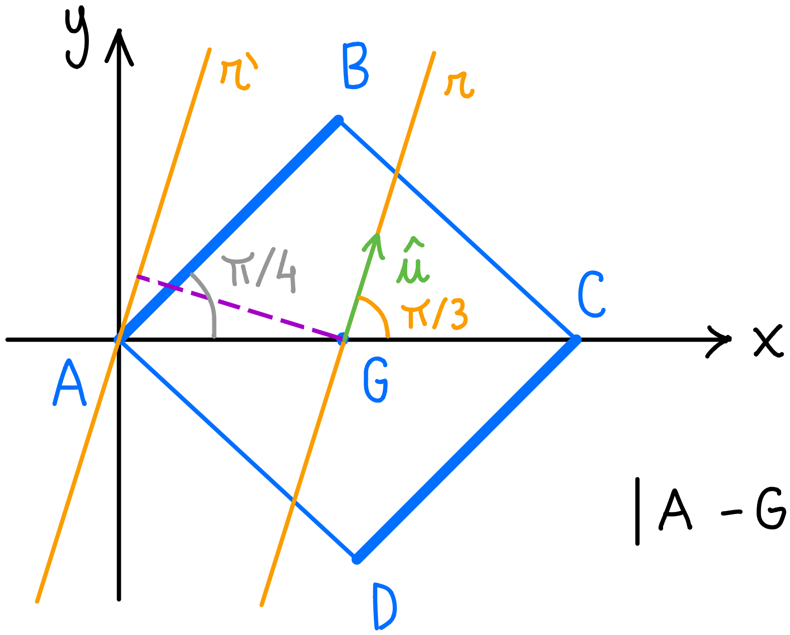
Risulta

$$I_{12} = \frac{1}{2} I_{12}^{(AB)} - I_{12}^{(BC)} = \frac{1}{2}\left(-\frac{m\ell^2}{18}\right) - \left(-\frac{m\ell^2}{18}\right) = \frac{m\ell^2}{36}$$

La matrice di inerzia richiesta è

$$I_A = \frac{m\ell^2}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Continuazione dell'ultimo esercizio



$$|A - G| = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$$

ii) Trovare il momento d'inerzia del corpo rispetto ad una retta passante per il suo baricentro e inclinata di $\pi/3$ rispetto all'asse Ax

Sol.

Avevamo calcolato al punto i) la matrice di inerzia I_A usando il sistema di riferimento $Axyz$

$$I_A = \frac{m\ell^2}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

con m massa del corpo rigido

Per rispondere alla domanda prima calcoliamo il momento di inerzia rispetto ad una retta parallela ad r e passante per A, indicata con r'

introduciamo un vettore unitario che ha la stessa direzione di r

$$\hat{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)^T$$

$$I_{A,\hat{u}} = \hat{u} \cdot I_A \, \hat{u} \, ,$$

$$I_{A,\hat{u}} = \frac{ml^2}{6} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{ml^2}{6} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 + \sqrt{3}/12 \\ 1/12 + 2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{ml^2}{6} \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{24} + \frac{\sqrt{3}}{24} + 3 \right)$$

$$= \frac{ml^2}{6} \left(\frac{13}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \right) = \frac{ml^2}{24} \left(13 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

Usiamo il teorema di Huygens-Steiner

$$I_{G,\hat{u}} = I_{A,\hat{u}} - md^2$$

dove d è la distanza tra r e r'

$$d = |A - G| \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = l \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = l \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$I_{G,\hat{u}} = \frac{m\ell^2}{24}\left(13 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - m\frac{\ell^2 6}{16}$$

$$= m\ell^2\left(\frac{13}{24} - \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{72}\right)$$

$$= \frac{m\ell^2}{6}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{12}\right)$$