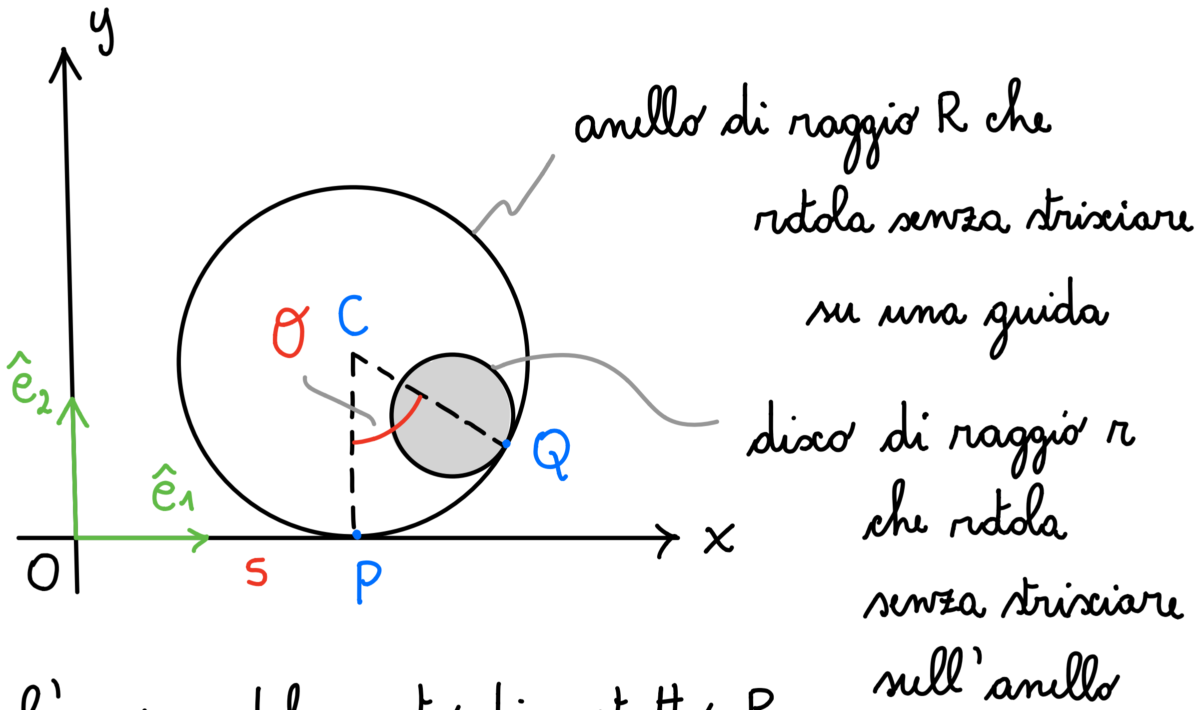
Esercizio (18 settembre 2017)



s è l'ascissa del punto di contatto P

a) Calcolare la velocità angolare dell'anello

Sol.

$$\vec{v}_C = \vec{v}_P^{(a)} + \vec{\omega}^{(a)} \times (C-P)$$

$\downarrow$ vel. di P come punto solidale all'anello

$$C - O = s\,\hat{e}_1 + R\,\hat{e}_2$$

$$\vec{v}_C = \frac{d(C-O)}{dt} = \dot{s}\,\hat{e}_1$$

$$C - P = R\,\hat{e}_2$$

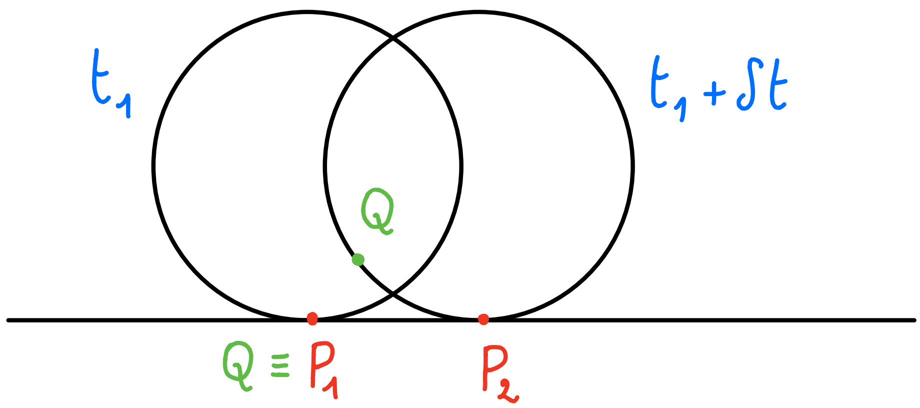
$$\vec{\omega}^{(a)} = \omega^{(a)}\,\hat{e}_3 \qquad \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2$$

$P - O = s\,\hat{e}_1$

Calcoliamo la velocità di P come punto di contatto

$$\vec{v}_P = \frac{d(P-O)}{dt} = \dot{s}\,\hat{e}_1,$$

avremo che $\vec{v}_P^{(a)} \neq \vec{v}_P$, infatti prendiamo due configurazioni dell'anello relative a due istanti t_1 e $t_1 + \delta t$



il punto Q solidale all'anello che all'istante t_1 occupa la posizione del punto di contatto P, occuperà un'altra posizione all'istante $t_1 + \delta t$

Per trovare $\vec{v}_P^{(a)}$ si deve imporre la condizione di puro rotolamento, cioè

$$\vec{v}_P^{(a)} = \vec{v}_P^{(g)}$$

dove $\vec{v}_P^{(g)}$ è la velocità del punto solidale alla guida che nell'istante considerato è a contatto con l'anello

Poiché la guida è ferma si ha

$$\vec{v}_P^{(g)} = \vec{0}$$

e dunque $\vec{v}_P^{(a)} = \vec{0}$.

ATTENZIONE! Se la guida era in movimento avremmo avuto $\vec{v}_P^{(g)} \neq \vec{0}$

Torniamo alla formula

$$\vec{v}_C = \vec{v}_P^{(a)} + \vec{\omega}^{(a)} \times (C - P)$$

$$\dot{s}\,\hat{e}_1 = \vec{0} + \omega^{(a)}\,\hat{e}_3 \times R\,\hat{e}_2$$

$$\dot{s}\,\hat{e}_1 = \omega^{(a)} R\,(-\hat{e}_1)$$

da cui

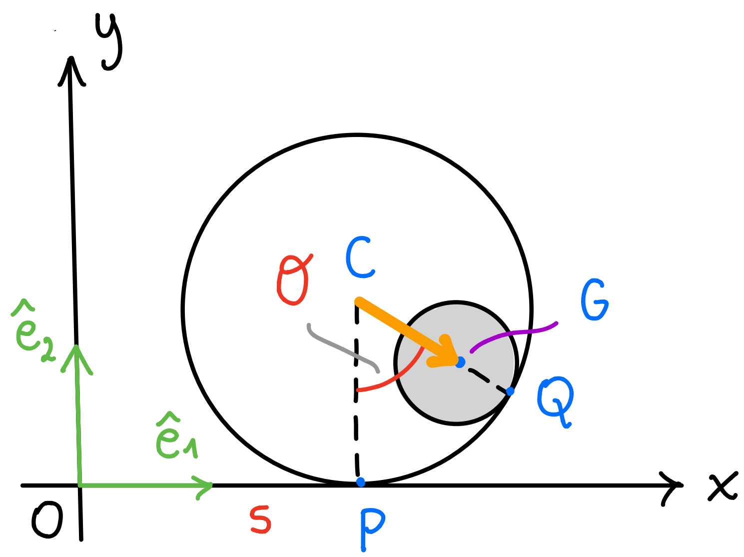
$$\dot{s} = -\omega^{(a)} R$$

$$\omega^{(a)} = -\frac{\dot{s}}{R}$$

$$\vec{\omega}^{(a)} = -\frac{\dot{s}}{R}\,\hat{e}_3$$

b) Calcolare la velocità angolare del disco

Sol.



Sia G il centro del cerchio che rappresenta il disco; usiamo la formula

$$\vec{v}_G = \vec{v}_Q^{(d)} + \vec{\omega}^{(d)} \times (G-Q)$$

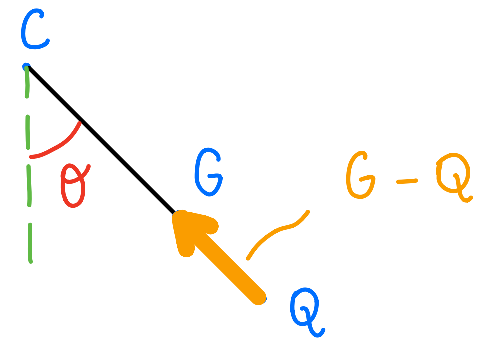
$$G-O = (s + (R-r)\operatorname{sen}\theta)\,\hat{e}_1 + (R-(R-r)\cos\theta)\,\hat{e}_2$$

$$\vec{v}_G = \frac{d(G-O)}{dt} = (\dot{s} + \dot{\theta}(R-r)\cos\theta)\,\hat{e}_1 + \dot{\theta}(R-r)\operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_2$$

$$Q-O = (s + R\operatorname{sen}\theta)\,\hat{e}_1 + (R - R\cos\theta)\,\hat{e}_2$$

$$G-Q = (G-O)-(Q-O) = -r\operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_1 + r\cos\theta\,\hat{e}_2$$

oppure basta notare che



$$\vec{\omega}^{(d)} = \omega^{(d)} \hat{e}_3$$

$\vec{v}_Q^{(d)}$ è la velocità del punto del disco che nell'istante considerato occupa la posizione del punto di contatto disco - anello

$$\vec{v}_Q^{(d)} \neq \frac{d(Q-O)}{dt}$$

Imponiamo la condizione di puro rotolamento

$$\vec{v}_Q^{(d)} = \vec{v}_Q^{(a)}$$

dove $\vec{v}_Q^{(a)}$ è la velocità del punto dell'anello che nell'istante considerato occupa la posizione del punto di contatto disco - anello

$$\vec{v}_Q^{(a)} = \vec{v}_C + \vec{\omega}^{(a)} \times (Q - C)$$

$$\vec{v}_Q^{(a)} = \dot{s}\,\hat{e}_1 - \frac{\dot{s}}{R}\,\hat{e}_3 \times \left(R \,\mathrm{sen}\,\theta\, \hat{e}_1 - R\cos\theta\, \hat{e}_2 \right)$$

$$= \dot{s}\,\hat{e}_1 - \dot{s}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{e}_2 - \dot{s}\cos\theta\,\hat{e}_1$$

$$= \dot{s}\,(1-\cos\theta)\,\hat{e}_1 - \dot{s}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{e}_2$$

$$\vec{v}_Q^{(d)} = \dot{s}\,(1-\cos\theta)\,\hat{e}_1 - \dot{s}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{e}_2$$

Torniamo all'equazione

$$\vec{v}_G = \vec{v}_Q^{(d)} + \vec{\omega}^{(d)} \times (G-Q)$$

sostituendo le espressioni trovate prima per $\vec{v}_G$, $\vec{v}_Q^{(d)}$, $G-Q$ si ha

$$\left(\dot{s} + (R-r)\dot{\theta}\cos\theta\right)\hat{e}_1 + (R-r)\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{e}_2$$

$$= \dot{s}\,(1-\cos\theta)\,\hat{e}_1 - \dot{s}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{e}_2 + \underbrace{\omega^{(d)}\,\hat{e}_3 \times \left(-r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{e}_1 + r\cos\theta\,\hat{e}_2\right)}_{= -r\,\omega^{(d)}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{e}_2 - r\,\omega^{(d)}\cos\theta\,\hat{e}_1}$$

proiettando lungo $\hat{e}_1$ si ha (si può proiettare anche lungo $\hat{e}_2$ e si ottiene lo stesso risultato)

$$\cancel{\dot{s}} + (R-r)\dot{\theta}\cancel{\cos\theta} = \dot{s}(\cancel{1} - \cancel{\cos\theta})$$

$$- r\omega^{(d)}\cancel{\cos\theta}$$

$$\dot{\theta}(R-r) = -\dot{s} - r\omega^{(d)}$$

$$\omega^{(d)} = -\frac{\dot{s}}{r} - \dot{\theta}\frac{(R-r)}{r}$$

$$\vec{\omega}^{(d)} = \left(-\frac{\dot{s}}{r} - \dot{\theta}\frac{(R-r)}{r}\right)\hat{e}_3$$

c) Calcolare la posizione del centro istantaneo di rotazione C_0 del disco

Sol.

$$C_0 - Q = \frac{\vec{\omega}^{(d)} \times \vec{v}_Q^{(d)}}{|\vec{\omega}^{(d)}|^2}$$

$$= -\left(\frac{\dot{s} + \dot{\theta}(R-r)}{r}\right)^{-1}\hat{e}_3 \times \left(\dot{s}(1-\cos\theta)\hat{e}_1 - \dot{s}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{e}_2\right)$$

$$= \frac{\vec{\omega}^{(d)}}{|\vec{\omega}^{(d)}|^2}$$

$$C_0 - O = Q - O - \left(\frac{\dot{s} + \dot{\theta}(R-r)}{r}\right)^{-1}\left(\dot{s}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{e}_1 + \dot{s}(1-\cos\theta)\hat{e}_2\right)$$

ricordando che

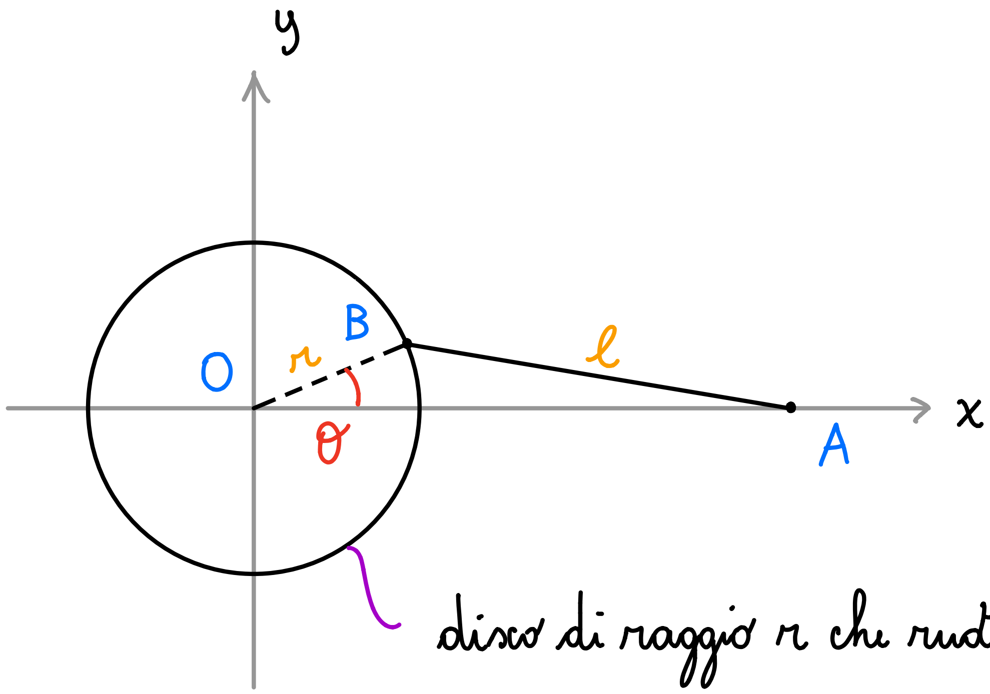
$$Q - O = (s + R \operatorname{sen}\theta)\,\hat{e}_1 + (R - R\cos\theta)\,\hat{e}_2$$

si ottiene infine

$$C_0 - O = \left(s + \operatorname{sen}\theta\left(R - \frac{r\dot{s}}{\dot{s} + \dot{\theta}(R-r)}\right)\right)\hat{e}_1$$

$$+ (1-\cos\theta)\left(R - \frac{r\dot{s}}{\dot{s} + \dot{\theta}(R-r)}\right)\hat{e}_2$$

Esercizio (30 gennaio 2017)



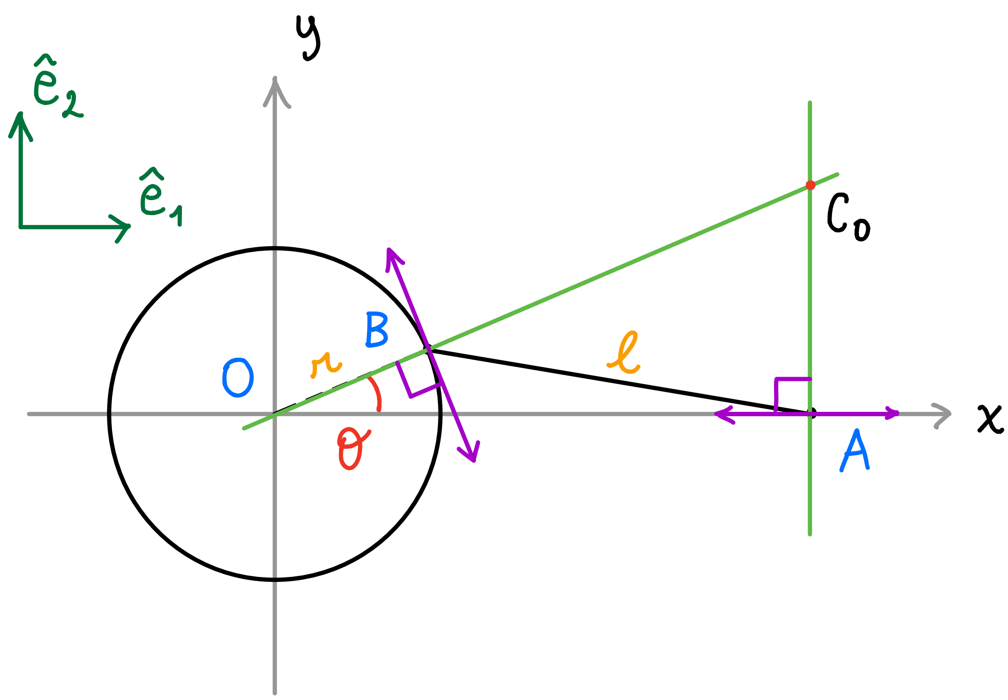
disco di raggio r che ruota intorno ad un asse perpendicolare al piano Oxy e passante per O

l'asta AB ha l'estremo A che scorre lungo l'asse Ox e l'altro estremo fissato ad un punto che sta sul bordo del disco ed è solidale al disco l'asta è lunga $l > r$

a) Trovare le coordinate di C_0 dell'asta in funzione di θ

Sol.

Usiamo il teorema di Chasles: C_0 è l'intersezione delle due rette passanti una per A e l'altra per B e ortogonali rispettivamente alle velocità di A e B

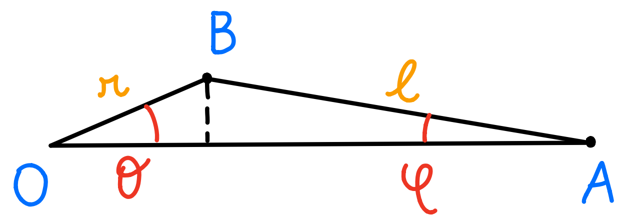


Allora si vede che

$$x_{C_0} = x_A$$

$$\frac{y_{C_0}}{x_{C_0}} = \tan\theta \longrightarrow y_{C_0} = x_{C_0} \tan\theta$$

Calcoliamo $x_{C_0} = x_A$



$$r \operatorname{sen}\theta = l \operatorname{sen}\varphi$$

$$|A - O| = x_A$$

$$x_{C_0} = r\cos\theta + l\cos\varphi$$

$$l^2\cos^2\varphi = l^2 - l^2\operatorname{sen}^2\varphi$$

$$l\cos\varphi = \sqrt{l^2 - l^2\operatorname{sen}^2\varphi}$$ (notiamo che essendo $l > r$ si ha $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, e quindi $\cos\varphi > 0$)

$$l\cos\varphi = \sqrt{l^2 - r^2\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$\begin{cases} x_{C_0} = r\cos\theta + \sqrt{l^2 - r^2\operatorname{sen}^2\theta} \\ y_{C_0} = r\operatorname{sen}\theta + \tan\theta\sqrt{l^2 - r^2\operatorname{sen}^2\theta} \end{cases}$$

Si provi a rispondere a questa domanda usando direttamente la formula

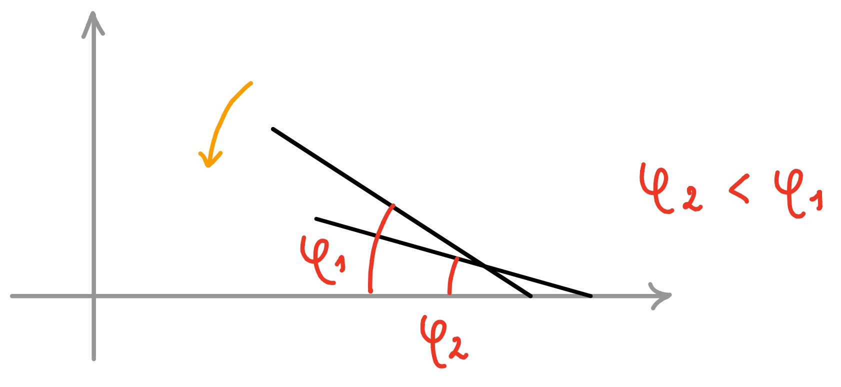
$$C_0 - Y = \frac{\vec{\omega}^{(a)} \times \vec{v}_Y}{|\vec{\omega}^{(a)}|^2}$$

dove Y è un punto che sceglete voi e $\vec{v}_Y$ è la velocità di Y come punto solidale all'asta (scelte furbe sono A e B)

Vi servirà la velocità angolare dell'asta $\vec{\omega}^{(a)}$, e si ha

$$\vec{\omega}^{(a)} = -\dot{\varphi}\,\hat{e}_3$$

(per ottenere subito questa espressione basta prendere un angolo formato da una direzione solidale all'asta e da una direzione fissa, ad esempio φ, e notare che ad una rotazione antioraria dell'asta corrisponde una diminuzione di φ



da cui $\vec{\omega}^{(a)} = -\dot{\varphi}\,\hat{e}_3$)

Ora vogliamo esprimere $\dot{\varphi}$ in termini di $\dot{\theta}$, θ come richiesto dal problema

da $r \operatorname{sen}\theta = l \operatorname{sen}\varphi$ si ha

$$r\dot{\theta}\cos\theta = l\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\dot{\varphi} = \dot{\theta}\,\frac{r\cos\theta}{l\cos\varphi} = \dot{\theta}\,\frac{r\cos\theta}{\sqrt{l^2 - r^2\operatorname{sen}^2\theta}}$$

$$\vec{\omega}^{(a)} = -\frac{\dot{\theta}\,r\cos\theta}{\sqrt{l^2 - r^2\operatorname{sen}^2\theta}}\,\hat{e}_3$$

(la velocità angolare del disco è $\dot{\theta}\,\hat{e}_3$; non è richiesta)

b) Trovare la base e la rulletta tracciate da C_0 nel caso in cui $l = r$ (si assume che quando $\theta = \pi/2$ l'estremo A coincida con O)

Sol.

Polare fissa:

Dal teorema di Chasles si ottiene

$$C_0 - O = x_{C_0}\,\hat{e}_1 + y_{C_0}\,\hat{e}_2$$

con

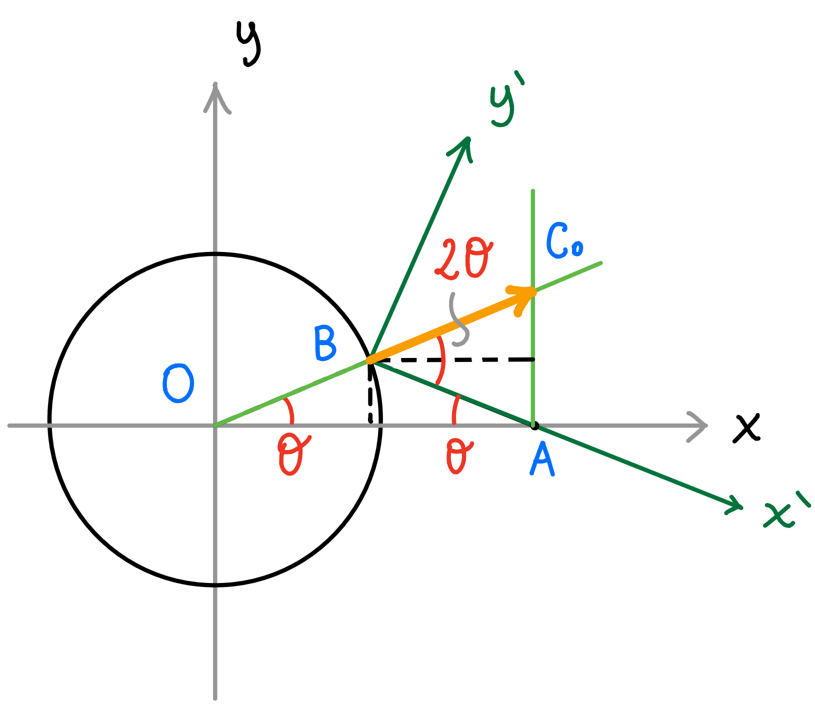
$$x_{C_0} = 2r\cos\theta \,, \quad y_{C_0} = 2r\,\text{sen}\,\theta$$

Vediamo che

$$x_{C_0}^2 + y_{C_0}^2 = (2r)^2$$

La polare fissa è una circonferenza con centro in O e raggio $2r$

Polare mobile: introduciamo il sistema di riferimento $Bx'y'$ solidale all'asta definito come si vede nella seguente figura



Scriviamo le coordinate di C_0 nel riferimento $Bx'y'$

$$C_0 - B = x'_{C_0}\,\hat{e}'_1 + y'_{C_0}\,\hat{e}'_2$$

dove $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2$ sono i vettori unitari associati agli assi Bx', By'

Dalla costruzione grafica ottenuta usando il teorema di Chasles si vede che

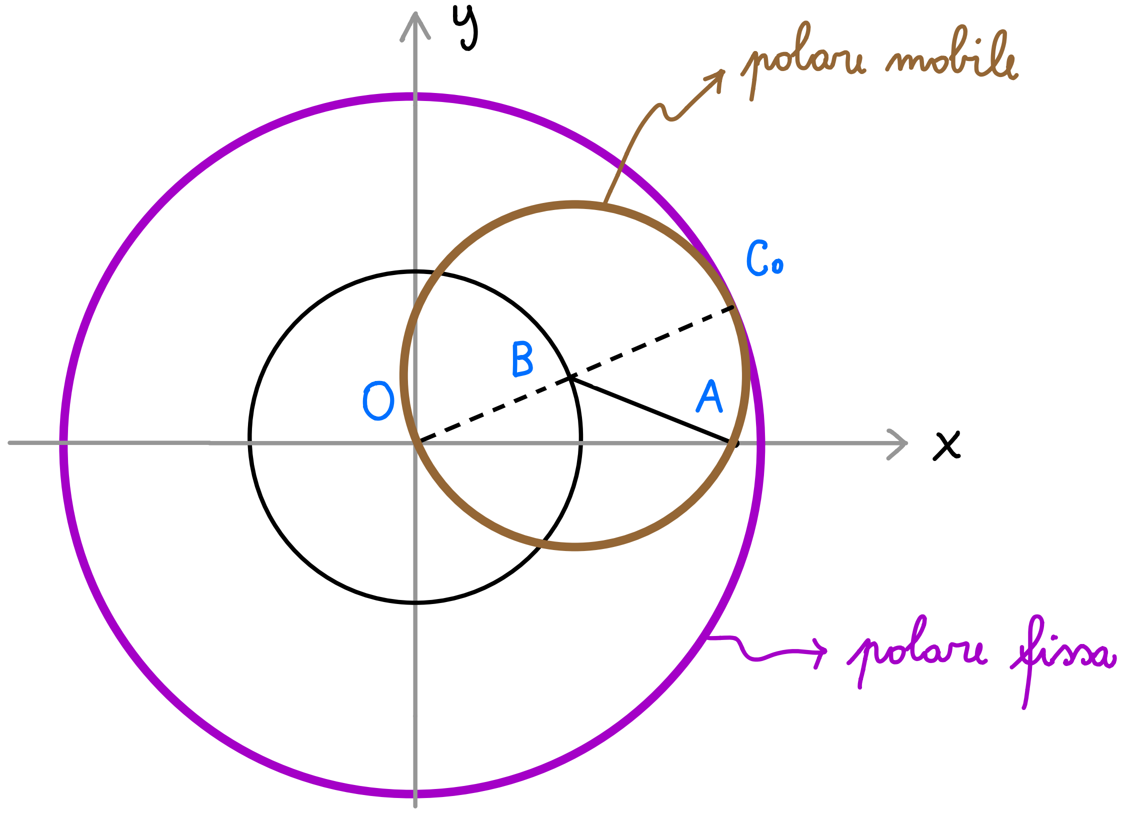
$$x'_{C_0} = r\cos 2\theta$$

$$y'_{C_0} = r\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

e che

$$(x'_{C_0})^2 + (y'_{C_0})^2 = r^2$$

La polare mobile è una circonferenza con centro in B e raggio r

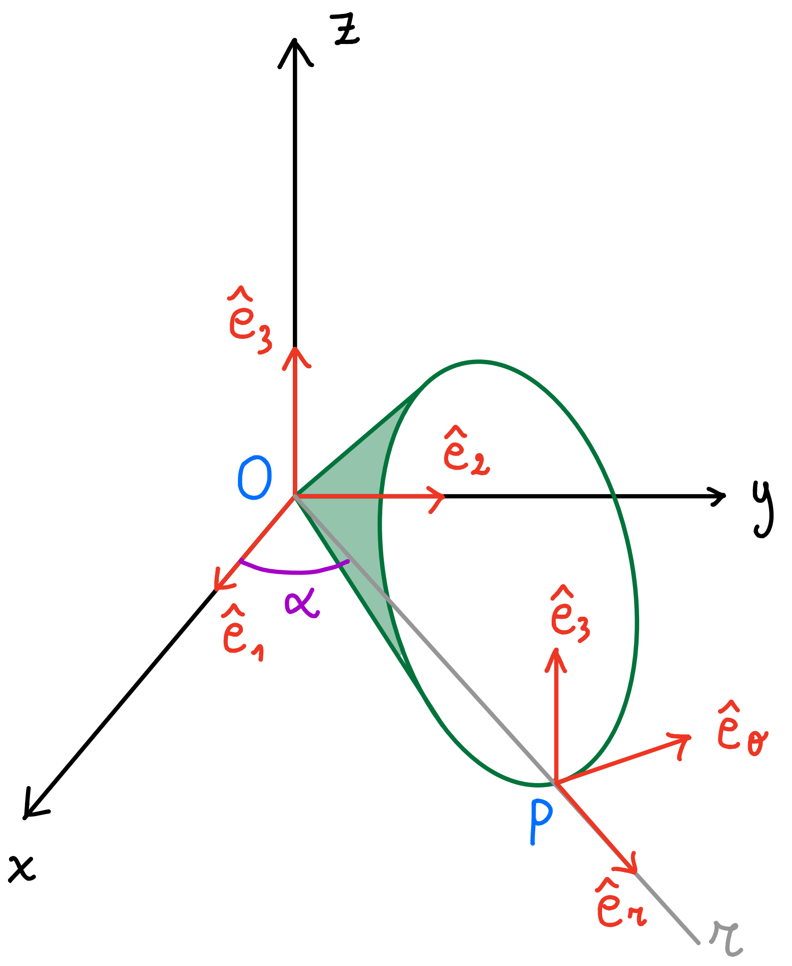


la polare mobile passa sempre per O ed A e rotola senza strisciare sulla polare fissa

---

Esercizio

Calcoliamo la velocità angolare di un cono che rotola senza strisciare su un piano Oxy mantenendo il proprio vertice fisso in O



il segmento OP è costituito dai punti di contatto cono - piano xy (il cono è appoggiato lungo una sua generatrice)

Sol. Introduciamo i sistemi di riferimento (si veda la figura precedente)

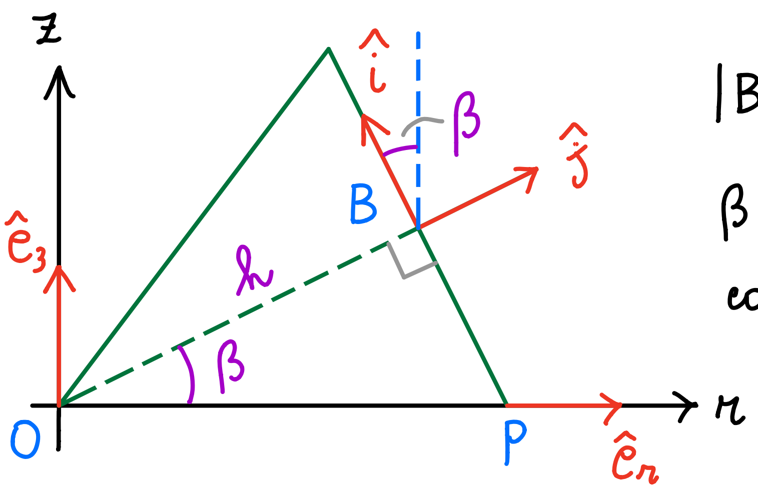
$$\Sigma = O\,\hat{e}_1\,\hat{e}_2\,\hat{e}_3$$

$$\Sigma' = P\,\hat{e}_r\,\hat{e}_\theta\,\hat{e}_3$$

chiamiamo α l'angolo compreso tra $\hat{e}_1$ ed $\hat{e}_r$

Introduciamo un terzo riferimento (si veda la prossima figura)

$$\Sigma'' = B\,\hat{i}\,\hat{j}\,\hat{e}_\theta$$



$|B - O| = h$

β è un angolo costante

Possiamo ottenere un riferimento solidale al cono ruotando Σ'' attorno a $\hat{j}$ di un angolo opportuno

Notiamo che Σ'' si può ottenere da Σ' ruotando

Σ' di α attorno ad $\hat{e}_3$ e successivamente di β attorno ad $\hat{e}_\theta$. La velocità angolare di Σ'' rispetto a Σ' è allora

$$\vec{\omega}'' = \dot{\alpha}\,\hat{e}_3 + \dot{\beta}\,\hat{e}_\theta$$

e poiché β è costante si ha

$$\vec{\omega}'' = \dot{\alpha}\,\hat{e}_3$$

La velocità angolare del cono sarà data dalla velocità angolare di un qualunque base ad esso solidale e per quanto detto qui sopra la velocità angolare di una base solidale al cono ha la forma

$$\vec{\omega} = \dot{\alpha}\,\hat{e}_3 + \tilde{\omega}\,\hat{\jmath}$$

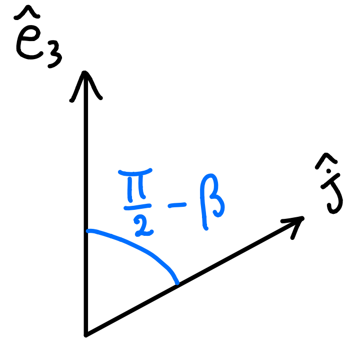
Cerchiamo di determinare $\tilde{\omega}$. Scriviamo

$$\vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times (B - P)$$

$B - O = h\hat{\jmath}$, con h altezza del cono

$$\vec{v}_B = \left.\frac{d(B-O)}{dt}\right|_{\Sigma'} = h \left.\frac{d\hat{\jmath}}{dt}\right|_{\Sigma'} =$$

$$h\,(\vec{\omega}'' \times \hat{\jmath}) = h\,(\dot{\alpha}\,\hat{e}_3 \times \hat{\jmath})$$



$$\hat{e}_3 \times \hat{j} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \hat{e}_\theta$$

$$\vec{v}_B = \dot{\alpha} h \cos\beta \, \hat{e}_\theta$$

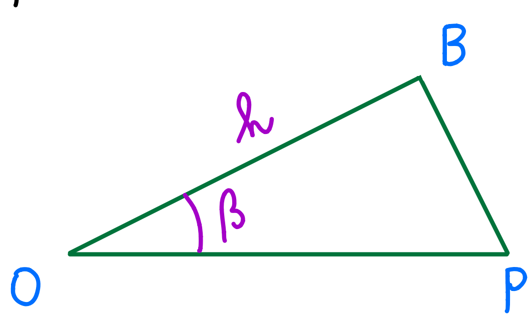
Passiamo a $\vec{v}_P$, questa è la velocità di P come punto solidale al cono, la quale si ottiene dalla condizione di puro rotolamento

$$\vec{v}_P^{(c)} = \vec{v}_P^{(piano)}$$

dove $\vec{v}_P^{(piano)}$ è la velocità di P come punto solidale al piano, cioè

$$\vec{v}_P^{(piano)} = \vec{0} \quad \text{dato che il piano è fisso}$$

Infine ci serve $B - P = (h \tan\beta) \hat{i}$



$$\tan\beta = \frac{|B - P|}{h}$$

Torniamo all'equazione

$$\vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times (B-P)$$

possiamo scriverla come

$$\dot{\alpha} h \cos\beta \, \hat{e}_\theta = \vec{0} + (\dot{\alpha}\hat{e}_3 + \tilde{\omega}\hat{j}) \times h \tan\beta \, \hat{i}$$

$$\dot{\alpha} h \cos\beta \, \hat{e}_\theta = \dot{\alpha} h \tan\beta \, (\hat{e}_3 \times \hat{i}) + h \tilde{\omega} \tan\beta \, (-\hat{e}_\theta)$$

$$\hat{e}_3 \times \hat{i} = -\operatorname{sen}\beta \, \hat{e}_\theta$$

$$\dot{\alpha} h \cos\beta \, \hat{e}_\theta = -\dot{\alpha} h \operatorname{sen}\beta \tan\beta \, \hat{e}_\theta - h \tilde{\omega} \tan\beta \, \hat{e}_\theta$$

Proiettiamo lungo $\hat{e}_\theta$ e dividiamo per h

$$\dot{\alpha} \cos\beta = -\dot{\alpha} \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\cos\beta} - \tilde{\omega} \tan\beta$$

$$\tilde{\omega} = -\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta} \left(\dot{\alpha} \cos\beta + \dot{\alpha} \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\cos\beta} \right)$$

$$= -\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta} \dot{\alpha} \left(\frac{\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta}{\cos\beta} \right)$$

$$= -\frac{\dot{\alpha}}{\operatorname{sen}\beta}$$

Quindi la velocità angolare del cono è

$$\vec{\omega} = \dot{\alpha}\,\hat{e}_3 - \frac{\dot{\alpha}}{\operatorname{sen}\beta}\,\hat{j} = \dot{\alpha}\left(\hat{e}_3 - \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\,\hat{j}\right)$$

$\ell = |P - O|$ lunghezza della generatrice

$\ell \operatorname{sen}\beta = r = |B - P|$ raggio della base del cono

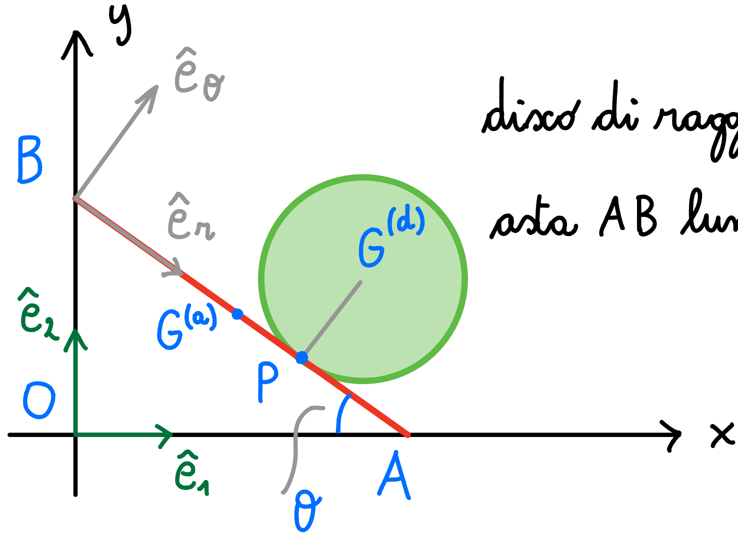
$$\vec{\omega} = \dot{\alpha}\left(\hat{e}_3 - \frac{\ell}{r}\,\hat{j}\right)$$

Si poteva procedere imponendo

$$\vec{\omega} = \omega_1\hat{e}_1 + \omega_2\hat{e}_2 + \omega_3\hat{e}_3$$

con $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ incognite; provate anche seguendo questa strada applicando la formula fondamentale con i punti B, P e poi con i punti B, O.

Esercizio



disco di raggio R

asta AB lunga ℓ

Un disco rotola senza strisciare su un'asta AB i cui estremi scivolano lungo gli assi Ox, Oy (θ non è costante)

Indichiamo con $G^{(d)}$ il centro del disco e con $G^{(a)}$ il punto dell'asta che soddisfa

$$|B - G^{(a)}| = |A - G^{(a)}|$$

Introduciamo s tale che

$$|P - B| = s$$

a) Calcolare la velocità angolare del disco

Sol.

Introduciamo il riferimento $B\hat{e}_r\hat{e}_\theta$ solidale all'asta (vedi figura)

Usiamo

$$\vec{v}_{G^{(d)}} = \vec{v}_P + \vec{\omega}^{(d)} \times (G^{(d)} - P)$$

$$G - O = B - O + s\hat{e}_r + R\hat{e}_\theta$$

$$= l \operatorname{sen}\theta \,\hat{e}_2 + s\hat{e}_r + R\hat{e}_\theta$$

$$\vec{v}_{G^{(d)}} = l\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{e}_2 + \dot{s}\,\hat{e}_r + s\,\frac{d\hat{e}_r}{dt} + R\,\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$$

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \vec{w}^{(a)} \times \hat{e}_r\,,$$

dove $\vec{w}^{(a)}$ è la velocità angolare dell'asta,

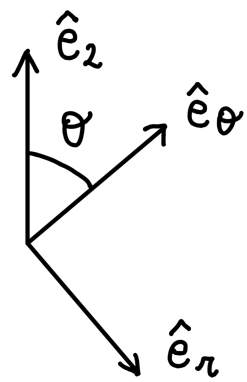
$$\vec{w}^{(a)} = -\dot{\theta}\,\hat{e}_r$$

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = -\dot{\theta}\,\hat{e}_3 \times \hat{e}_r = -\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = \vec{w}^{(a)} \times \hat{e}_\theta = -\dot{\theta}\,\hat{e}_3 \times \hat{e}_\theta = \dot{\theta}\,\hat{e}_r$$

$$\vec{v}_G^{(d)} = l\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{e}_2 + \dot{s}\,\hat{e}_r - s\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + R\dot{\theta}\,\hat{e}_r$$

$$\hat{e}_2 = (\cos\theta\,\hat{e}_\theta - \operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_r)$$



$$\vec{v}_{G^{(d)}} = l\dot{\theta}\cos\theta\,(\cos\theta\,\hat{e}_\theta - \operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_r) + \dot{s}\,\hat{e}_r - s\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + R\dot{\theta}\,\hat{e}_r$$

$$\vec{v}_{G^{(d)}} = (\dot{s} + R\dot{\theta} - l\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\,\hat{e}_r + \dot{\theta}\,(l\cos^2\theta - s)\,\hat{e}_\theta$$

$$\vec{v}_{G^{(d)}} = \vec{v}_P^{(d)} + \vec{\omega}^{(d)} \times (G^{(d)} - P)$$

$$G^{(d)} - P = R\hat{e}_\theta \qquad \vec{\omega}^{(d)} = \omega^{(d)}\hat{e}_3$$

$$\vec{\omega}^{(d)} \times (G^{(d)} - P) = -R\omega^{(d)}\hat{e}_r$$

imponiamo la condizione di puro rotolamento

vel. di P come punto solidale al disco

$$\vec{v}_P^{(d)} = \vec{v}_P^{(a)}$$

vel. di P come punto solidale all'asta

$$\vec{v}_P^{(a)} = \vec{v}_A + \vec{\omega}^{(a)} \times (P - A)$$

$$\vec{\omega}^{(a)} = -\dot{\theta}\hat{e}_3$$

$$P - A = -(\ell - s)\hat{e}_r$$

$$A - O = (\ell\cos\theta)\hat{e}_1$$

$$\vec{v}_A = -(\ell\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta)\hat{e}_1$$

$$= -(\ell\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta)\left[(\cos\theta)\hat{e}_r + (\mathrm{sen}\,\theta)\hat{e}_\theta\right]$$

$$\vec{v}_P^{(a)} = -(\ell\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta)\left[(\cos\theta)\hat{e}_r + (\mathrm{sen}\,\theta)\hat{e}_\theta\right]$$

$$-\dot{\theta}\hat{e}_3 \times \left[-(\ell - s)\hat{e}_r\right] =$$

$$-(\ell\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)\hat{e}_r - (\ell\dot{\theta}\,\mathrm{sen}^2\theta)\hat{e}_\theta$$

$$+ \dot{\theta}\,(\ell - s)\,\hat{e}_\theta$$

$$\vec{v}_P^{(a)} = -(\ell \dot{\theta} \operatorname{sen}\theta \cos\theta)\,\hat{e}_r + \hat{e}_\theta \left[(\ell - s)\dot{\theta} - \ell \dot{\theta} \operatorname{sen}^2\theta \right]$$

Notiamo che

$$\vec{v}_P = \frac{d(P-O)}{dt} \neq \vec{v}_P^{(a)}$$

infatti

$$\vec{v}_P = \frac{d(P-A)}{dt} + \frac{d(A-O)}{dt}$$

$$= \frac{d(P-A)}{dt} + \vec{v}_A$$

$$P - A = -(\ell - s)\,\hat{e}_r$$

$$\frac{d(P-A)}{dt} = \dot{s}\,\hat{e}_r - (\ell - s)\frac{d\hat{e}_r}{dt}$$

$$= \dot{s}\,\hat{e}_r - (\ell - s)\,\vec{\omega}^{(a)} \times \hat{e}_r$$

$$= \dot{s}\,\hat{e}_r + \vec{\omega}^{(a)} \times (P - A)$$

Cioè $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega}^{(a)} \times (P - A) + \dot{s}\,\hat{e}_r$

mentre abbiamo visto prima che

$$\vec{v}_P^{(a)} = \vec{v}_A + \vec{\omega}^{(a)} \times (P-A)$$

quindi

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P^{(a)} + \dot{s}\,\hat{e}_r$$

Potremmo anche scrivere in questo caso

$$\vec{v}_P^{(a)} = \left.\frac{d(P-O)}{dt}\right|_{s \text{ costante}}$$

intendendo che si può ottenere $\vec{v}_P^{(a)}$ derivando rispetto al tempo $P-O$ con s considerato costante, dato che P deve essere inteso come punto solidale all'asta

Torniamo all'equazione

$$\vec{v}_{G^{(d)}} = \vec{v}_P^{(d)} + \vec{\omega}^{(d)} \times (G^{(d)} - P)$$

e sostituiamo le quantità trovate; dopo aver proiettato lungo $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ si ha

$$\hat{e}_r : \; -\ell\dot{\theta}\cancel{\operatorname{sen}\theta}\cos\theta + \dot{s} + R\dot{\theta} = -\ell\dot{\theta}\cancel{\operatorname{sen}\theta}\cos\theta - R\omega^{(d)}$$

$$\hat{e}_\theta : \; \ell\dot{\theta}\cos^2\theta - s\dot{\theta} = (\ell - s)\dot{\theta} - \ell\dot{\theta}\operatorname{sen}^2\theta$$

dalla seconda abbiamo un'identità

$$\ell\dot\theta\cos^2\theta - s\dot\theta = -s\dot\theta + \ell\dot\theta\,(1-\operatorname{sen}^2\theta)$$

$$\ell\dot\theta\cos^2\theta - s\dot\theta = \ell\dot\theta\cos^2\theta - s\dot\theta$$

dalla prima otteniamo l'incognita $\omega^{(d)}$

$$\omega^{(d)} = -\frac{\dot s}{R} - \dot\theta$$

$$\vec\omega^{(d)} = \left(-\frac{\dot s}{R} - \dot\theta\right)\hat e_3$$

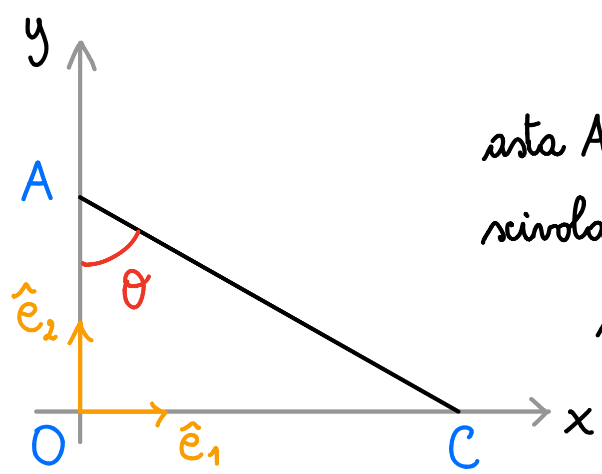
ii) Calcolare la posizione del centro istantaneo di rotazione del disco

Sol.

$$C_0 - O = A - O + \frac{\vec\omega^{(d)} \times \vec v_A}{|\vec\omega^{(d)}|^2}$$ (svolgere i conti)

__Esempio__ (lo trovate anche nelle note del prof. Gronchi)

$|A - C| = \ell$

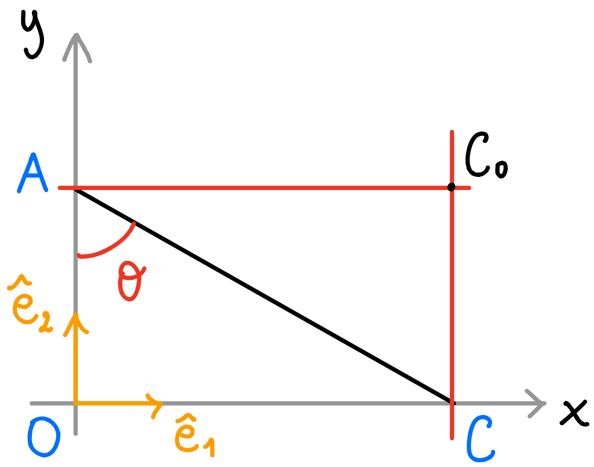


asta AC i cui estremi scivolano lungo gli assi Ox, Oy

i) Trovare la posizione del centro istantaneo di rotazione C_0

Sol.

Dal teorema di Chasles si ha subito



$$C_0 - O = (\ell \operatorname{sen}\theta)\,\hat{e}_1 + (\ell\cos\theta)\,\hat{e}_2$$

ii) Determinare la polare fissa e la polare mobile

Sol.

polare fissa

Scriviamo $C_0 - O = x_{C_0}\,\hat{e}_1 + y_{C_0}\,\hat{e}_2$

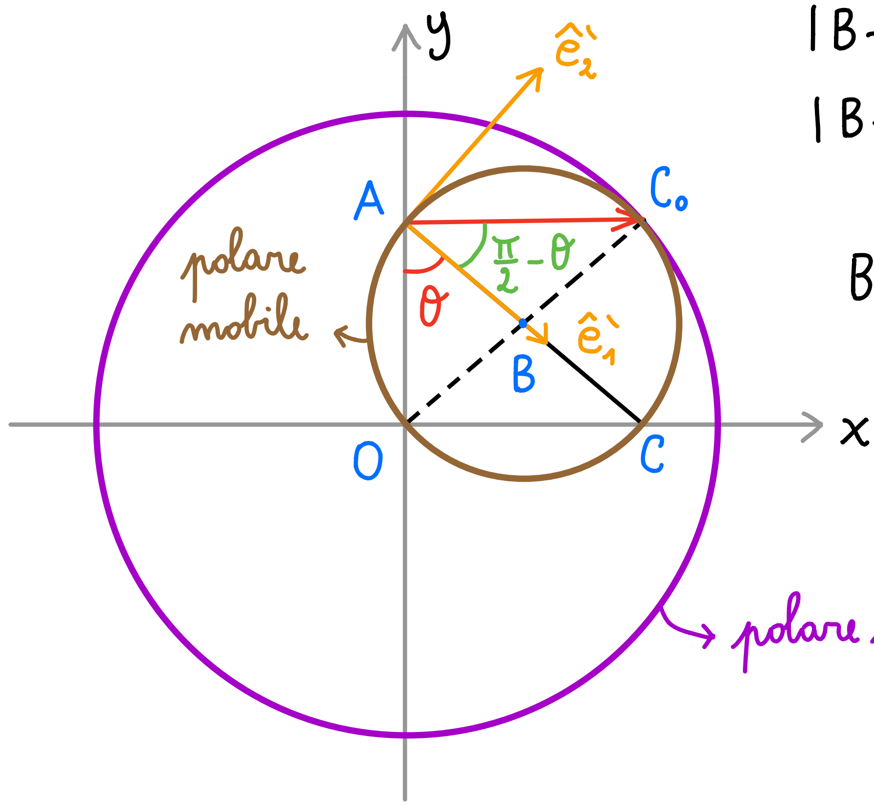
con

$x_{C_0} = \ell \operatorname{sen}\theta$

$y_{C_0} = \ell \cos\theta$

e notiamo che $x_{C_0}^2 + y_{C_0}^2 = \ell^2$

la polare fissa è una circonferenza con centro in O e raggio ℓ



$$|B-A| = |B-C| = |B-C_0| = |B-O| = \frac{\ell}{2}$$

$$B-O = \frac{\ell}{2}\,\text{sen}\,\theta\,\hat{e}_1 + \frac{\ell}{2}\cos\theta\,\hat{e}_2$$

polare mobile

Introduciamo un riferimento solidale all'asta: $A\hat{e}_1'\hat{e}_2'$ definito come in figura

Scriviamo le coordinate di C_0 in questo riferimento

$$C_0 - A = x'_{C_0}\,\hat{e}_1' + y'_{C_0}\,\hat{e}_2'$$

$$\begin{cases} x'_{C_0} = |C_0 - A| \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \ell\,\text{sen}^2\theta \\ y'_{C_0} = |C_0 - A|\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \ell\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \end{cases}$$

$$|C_0 - A| = \ell\,\text{sen}\,\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

Allora

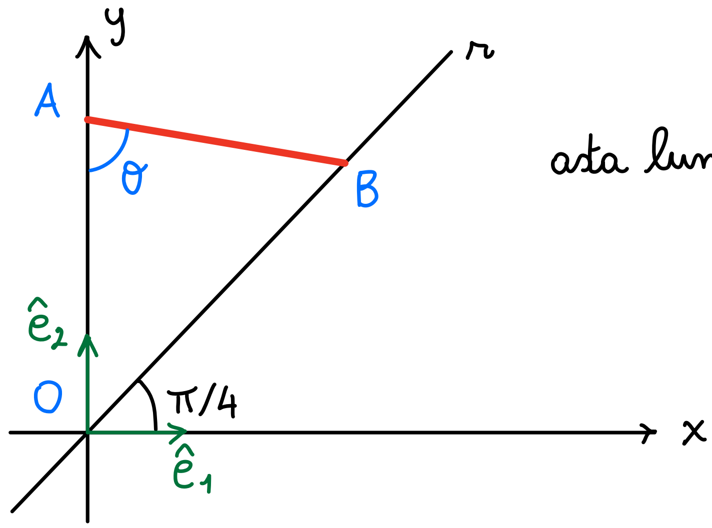
$$\begin{cases} x'_{C_0} = \ell\left(\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}\right) \\ y'_{C_0} = \dfrac{\ell}{2}\operatorname{sen}2\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_{C_0} - \dfrac{\ell}{2} = -\dfrac{\ell}{2}\cos 2\theta \\ y'_{C_0} = \dfrac{\ell}{2}\operatorname{sen}2\theta \end{cases}$$

vale $\left(x'_{C_0} - \dfrac{\ell}{2}\right)^2 + \left(y'_{C_0}\right)^2 = \dfrac{\ell^2}{4}$

la polare mobile è una circonferenza di raggio $\dfrac{\ell}{2}$ e centro in B (si veda la figura precedente)

Esercizio (18 luglio 2017)



asta lunga ℓ

l'estremo A dell'asta può scivolare lungo l'asse Oy, l'estremo B dell'asta può scivolare lungo la retta r

1) Calcolare la velocità angolare dell'asta

Sol 1a

- l'angolo θ è definito da una direzione fissa (Oy) e una direzione solidale all'asta (la retta passante per A e B)
- ad una rotazione antioraria dell'asta, θ aumenta

$$\longrightarrow \quad \vec{\omega}^{(a)} = \dot{\theta}\,\hat{e}_3$$

Sol. 1b

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}^{(a)} \times (A-B)$$

$$A - O = (\ell\cos\theta + \ell \,\mathrm{sen}\,\theta)\,\hat{e}_2$$

$$B - O = (\ell\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\hat{e}_1 + (\ell\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\hat{e}_2$$

$$\vec{v}_A = \ell\dot{\theta}\,(-\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta)\,\hat{e}_2$$

$$\vec{v}_B = \ell\dot{\theta}\,(\cos\theta\,\hat{e}_1 + \cos\theta\,\hat{e}_2)$$

$$A - B = (A-O) - (B-O)$$

$$= (-\ell\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\hat{e}_1 + (\ell\cos\theta + \ell\,\cancel{\mathrm{sen}\,\theta}$$

$$- \ell\,\cancel{\mathrm{sen}\,\theta})\,\hat{e}_2$$

$$= -\ell\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{e}_1 + \ell\cos\theta\,\hat{e}_2$$

$$\vec{\omega}^{(a)} = \omega^{a}\,\hat{e}_3$$

$$\vec{\omega}^{(a)} \times (A-B) =$$

$$\omega^{(a)}\,\hat{e}_3 \times (-\ell\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{e}_1 + \ell\cos\theta\,\hat{e}_2)$$

proiettiamo l'equazione lungo $\hat{e}_1$

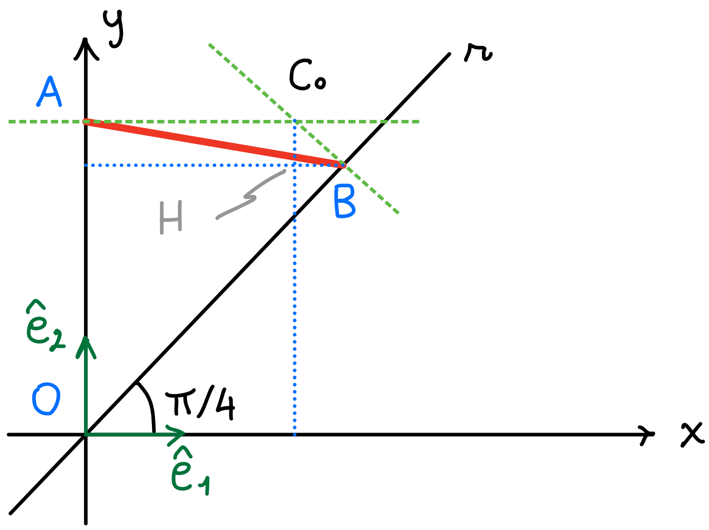
$$\hat{e}_1: \quad 0 = \ell\dot{\theta}\cos\theta - \omega^{(a)}\ell\cos\theta$$

$$\omega^{(a)} = \dot{\theta} \qquad \vec{\omega}^{(a)} = \dot{\theta}\,\hat{e}_3$$

2) Calcolare la posizione di C_0 dell'asta

Sol. 2a

Sfruttiamo il teorema di Chasles



$$y_{C_0} = y_A = l\cos\theta + l\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$x_{C_0} = x_B - \underbrace{(y_A - y_B)}_{\overline{HB}} = x_B - (y_A - x_B)$$

$$= 2x_B - y_A = 2l\,\mathrm{sen}\,\theta - l\cos\theta - l\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$x_{C_0} = l\,\mathrm{sen}\,\theta - l\cos\theta$$

$$C_0 - O = (\ell \sin\theta - \ell \cos\theta)\,\hat{e}_1 + (\ell \sin\theta + \ell \cos\theta)\,\hat{e}_2$$

Sol. 2b

$$C_0 - A = \frac{\vec{\omega}^{(a)} \times \vec{v}_A}{|\vec{\omega}^{(a)}|^2}$$

(svolgere il conto)

$$C_0 - O = (C_0 - A) + (A - O)$$

Osservazione:

si può scrivere

$$C_0 - O = \frac{\vec{\omega}^{(a)} \times \vec{v}_O}{|\vec{\omega}^{(a)}|^2}$$

con $\vec{v}_O = \vec{v}_A + \vec{\omega}^{(a)} \times (O - A)$

$$\vec{v}_O \neq \vec{0} \quad \text{!}$$

3) Determinare la polare fissa e la polare mobile descritte da C_0

Sol. 3

polare fissa

si ha

$$x_{C_0}^2 + y_{C_0}^2 = (\ell \operatorname{sen}\theta - \ell\cos\theta)^2 + (\ell\cos\theta + \ell\operatorname{sen}\theta)^2 = 2\ell^2$$

che è l'equazione di una circonferenza di raggio $\sqrt{2}\ell$ e centro in O

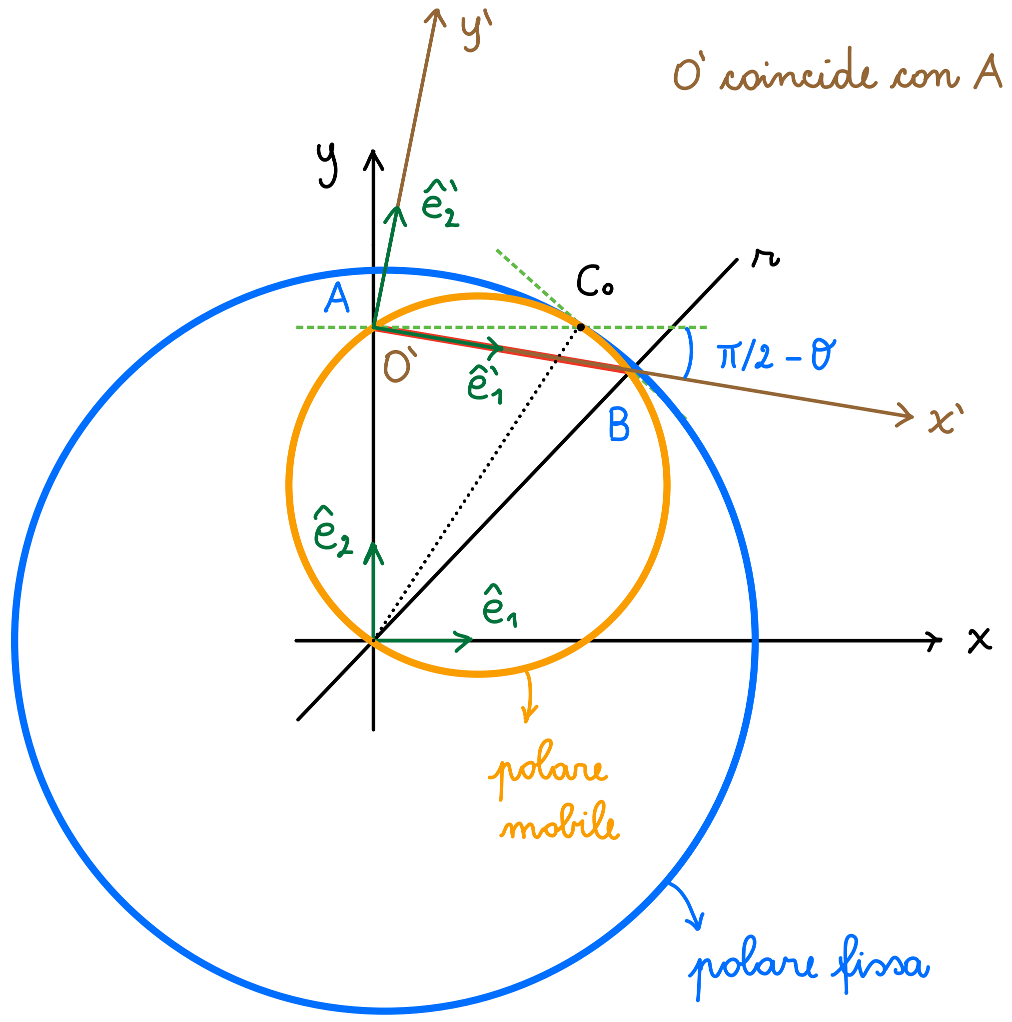
polare mobile

dobbiamo introdurre un riferimento solidale all'asta, $O'\hat{e}_1'\hat{e}_2'\hat{e}_3'$ (si veda la figura nella pagina seguente)

quindi scriviamo le coordinate di $C_0 - O'$ in tale riferimento

$$C_0 - O' = x'_{C_0}\hat{e}_1' + y'_{C_0}\hat{e}_2'$$

$$\begin{cases} x'_{C_0} = (\ell\operatorname{sen}\theta - \ell\cos\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ \\ y'_{C_0} = (\ell\operatorname{sen}\theta - \ell\cos\theta)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x'_{C_0} = (\ell \operatorname{sen}\theta - \ell\cos\theta)\operatorname{sen}\theta \\ y'_{C_0} = (\ell\operatorname{sen}\theta - \ell\cos\theta)\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_{C_0} = \ell\operatorname{sen}^2\theta - \ell\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ y'_{C_0} = \ell\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \ell\cos^2\theta \end{cases}$$

$$\operatorname{sen}\theta \cos\theta = \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}, \quad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\begin{cases} x'_{C_0} = \frac{\ell}{2}(1-\cos 2\theta) - \frac{\ell}{2}\operatorname{sen} 2\theta \\ y'_{C_0} = \frac{\ell}{2}\operatorname{sen} 2\theta - \frac{\ell}{2}(1+\cos 2\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_{C_0} - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2}(-\cos 2\theta - \operatorname{sen} 2\theta) \\ y'_{C_0} + \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2}(\operatorname{sen} 2\theta - \cos 2\theta) \end{cases}$$

$$\left(x'_{C_0} - \frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(y'_{C_0} + \frac{\ell}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{\ell^2}{4}\left(\cos^2 2\theta + \operatorname{sen}^2 2\theta + \cancel{2\operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta} + \operatorname{sen}^2 2\theta + \cos^2 2\theta - \cancel{2\operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta}\right)$$

$$= \frac{\ell^2}{4}(1+1) = \frac{\ell^2}{2}$$

si è ottenuto

$$\left(x'_{co} - \frac{l}{2}\right)^2 + \left(y'_{co} + \frac{l}{2}\right)^2 = \frac{l^2}{2}$$

che è l'equazione di una circonferenza di raggio $\frac{l\sqrt{2}}{2}$ e centro in $\left(\frac{l}{2}, -\frac{l}{2}, 0\right)$ nel riferimento $O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$