Compito di Meccanica Razionale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

10 Gennaio 2025

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Sul piano verticale Oxy si consideri un disco omogeneo di massa m e raggio r che rotola senza strisciare su una guida descritta dalla parabola di equazione

$$y = x^2.$$

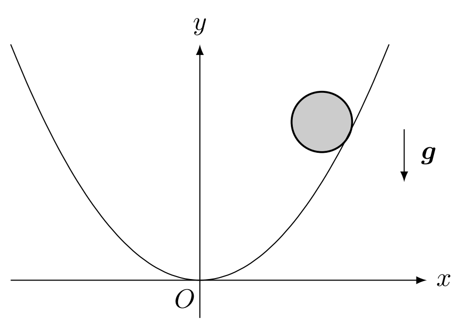
Sul disco agisce la forza di gravità di accelerazione $\boldsymbol{g}$ parallela ad Oy e di modulo uguale a g.
Si utilizzi come coordinata lagrangiana l'ascissa x del punto di contatto tra il disco e la guida.

i) Determinare la velocità angolare del disco.

ii) Scrivere l'equazione pura del moto del disco utilizzando le equazioni cardinali della dinamica.

iii) Calcolare la componente tangente alla guida della reazione vincolare che agisce sul disco.

Suggerimento: per rispondere a queste domande è utile determinare le direzioni tangente e normale alla guida nel punto di contatto tra il disco e la guida.



Secondo Esercizio

Si consideri il moto unidimensionale di un punto di massa unitaria definito dall'equazione differenziale

$$\ddot{x} = f(x), \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

con

$$f(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{6}{x^3}.$$

i) Scrivere l'espressione dell'energia potenziale $V(x)$ assumendo $V(1) = 0$.

ii) Calcolare i valori dell'energia che corrispondono agli equilibri.

iii) Tracciare il ritratto di fase.

iv) Considerato il moto corrispondente alle condizioni iniziali

$$(x_0, \dot{x}_0) = (3/4, 0),$$

calcolare il tempo che impiega il punto materiale per raggiungere $x = 1/4$.

Soluzione Primo Esercizio

i)

Introduciamo la base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$.

Per determinare la direzione normale alla parabola in un suo punto ci basta calcolare il gradiente della funzione $f(x, y) = y - x^2$:

$$\nabla f(x, y) = (-2x, 1)^T.$$

Possiamo allora introdurre i versori tangenziale e normale come segue:

$$\boldsymbol{e}_t = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}(\boldsymbol{e}_1 + 2x\boldsymbol{e}_2), \qquad \boldsymbol{e}_n = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}(-2x\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2).$$

Chiamiamo P e G il punto di contatto del disco con la guida ed il baricentro del disco, rispettivamente. Abbiamo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\chi}_P &= x\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2,\\ \boldsymbol{\chi}_G &= \boldsymbol{\chi}_P + r\boldsymbol{e}_n.\end{aligned}$$

Le velocità di P e G sono date da

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\chi}}_P &= \dot{x}(\boldsymbol{e}_1 + 2x\boldsymbol{e}_2) = \dot{x}\sqrt{1+4x^2}\boldsymbol{e}_t,\\ \dot{\boldsymbol{\chi}}_G &= \dot{x}\left(1 - \frac{2r}{(1+4x^2)^{3/2}}\right)(\boldsymbol{e}_1 + 2x\boldsymbol{e}_2) = \dot{x}\left(\sqrt{1+4x^2} - \frac{2r}{1+4x^2}\right)\boldsymbol{e}_t.\end{aligned}$$

La velocità angolare del disco $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_3$ la ricaviamo dall'equazione

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\chi}_G - \boldsymbol{\chi}_P),$$

con $\mathbf{v}_G = \dot{\boldsymbol{\chi}}_G$, $\mathbf{v}_P = \mathbf{0}$ e

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\chi}_G - \boldsymbol{\chi}_P) = r\omega(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_n) = -r\omega\boldsymbol{e}_t.$$

Proeittando lungo $\boldsymbol{e}_t$ si ha

$$\omega = -\frac{\dot{x}}{r}\left(\sqrt{1+4x^2} - \frac{2r}{1+4x^2}\right).$$

ii)

L'equazione pura del moto del disco si può ottenere dalla seconda equazione cardinale della dinamica rispetto a P:

$$\dot{\mathbf{M}}_P = \mathbf{N}_P - m\dot{\boldsymbol{\chi}}_P \times \dot{\boldsymbol{\chi}}_G. \qquad (1)$$

Abbiamo $\dot{\boldsymbol{\chi}}_P \times \dot{\boldsymbol{\chi}}_G = \mathbf{0}$ in quanto $\dot{\boldsymbol{\chi}}_P$, $\dot{\boldsymbol{\chi}}_G$ sono paralleli, inoltre

$$\mathbf{N}_P = (\boldsymbol{\chi}_G - \boldsymbol{\chi}_P) \times (-mg\boldsymbol{e}_2) = \frac{2xr}{\sqrt{1+4x^2}}mg\boldsymbol{e}_3$$

e

$$\mathbf{M}_P = I_{P,z}\boldsymbol{\omega} = -\frac{3mr\dot{x}}{2}\left(\sqrt{1+4x^2} - \frac{2r}{1+4x^2}\right)\boldsymbol{e}_3,$$

dove il momento di inerzia $I_{P,z}$ si può calcolare come segue:

$$I_{P,z} = I_{G,z} + m|\boldsymbol{\chi}_G - \boldsymbol{\chi}_P|^2 = \frac{3}{2}mr^2.$$

Proiettando l'equazione (1) lungo $\boldsymbol{e}_3$ e dividendo entrambi i membri per r si ha infine l'equazione pura del moto

$$\frac{3mr}{2}\dot{\omega} = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}mg,$$

con

$$\dot{\omega} = -\frac{\ddot{x}}{r}\left(\sqrt{1+4x^2} - \frac{2r}{1+4x^2}\right) - \frac{4\dot{x}^2 x}{r}\left(\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} + \frac{4r}{1+4x^2}\right). \tag{2}$$

iii)

La componente tangenziale della reazione vincolare Φ_t si ottiene dalla seconda equazione cardinale della dinamica rispetto a G:

$$\dot{\mathbf{M}}_G = \mathbf{N}_G, \tag{3}$$

dove

$$\mathbf{N}_G = (\boldsymbol{\chi}_P - \boldsymbol{\chi}_G) \times \boldsymbol{\Phi} = r\Phi_t \boldsymbol{e}_3$$

e

$$\mathbf{M}_G = I_{G,z}\boldsymbol{\omega} = -\frac{mr\dot{x}}{2}\left(\sqrt{1+4x^2} - \frac{2r}{1+4x^2}\right)\boldsymbol{e}_3.$$

Proiettando l'equazione (3) lungo $\boldsymbol{e}_3$ e dividendo entrambi i membri per r si ha infine

$$\Phi_t = \frac{mr}{2}\dot{\omega},$$

con $\dot{\omega}$ data in (2).

Soluzione Secondo Esercizio

i)
L'energia potenziale è data da

$$V(x) = -\int f(x)dx = \int \left(\frac{4}{x^2} - \frac{6}{x^3} \right) dx = \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} + c,$$

dove la costante c si determina dalla condizione $V(1) = 0$:

$$V(1) = 4 - 3 + c = 0 \quad \rightarrow \quad c = -1.$$

Risulta

$$V(x) = \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} - 1.$$

ii)
I punti di equilibrio sono le coppie $(x_0, \dot{x}_0)$, con $\dot{x}_0 = 0$ e $V'(x_0) = 0$. Abbiamo

$$V'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{6}{x^3} = 0,$$

da cui risulta che $(3/2, 0)$ è un punto di equilibrio. Il valore assunto dall'energia in corrispondenza di tale punto è

$$E\left(\frac{3}{2}, 0\right) = V\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3}.$$

iii)
Notando che

$$\lim_{x\to+\infty} V(x) = -1, \qquad \lim_{x\to-\infty} V(x) = -1,$$
$$\lim_{x\to 0^+} V(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} V(x) = -\infty,$$

si può tracciare il grafico di $V(x)$ (figura 1) e quindi il ritratto di fase (figura 2).

iv)
Calcoliamo il valore assunto dall'energia:

$$\bar{E} = E\left(\frac{3}{4}, 0\right) = -1.$$

Dalla definizione di energia, notando che per $t > 0$ si ha $x > 0$ decrescente, si può scrivere

$$\dot{x} = -\sqrt{2\left(\bar{E} - V(x)\right)} = -\frac{\sqrt{2(3-4x)}}{x}.$$

Separando le variabili risulta

$$t = -\int_{3/4}^{1/4} \frac{x}{\sqrt{2(3-4x)}} dx = \frac{7}{24}.$$

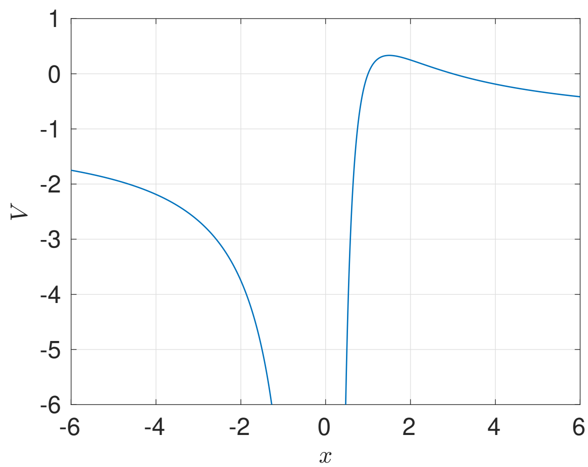


Figura 1: Grafico di $V(x)$.

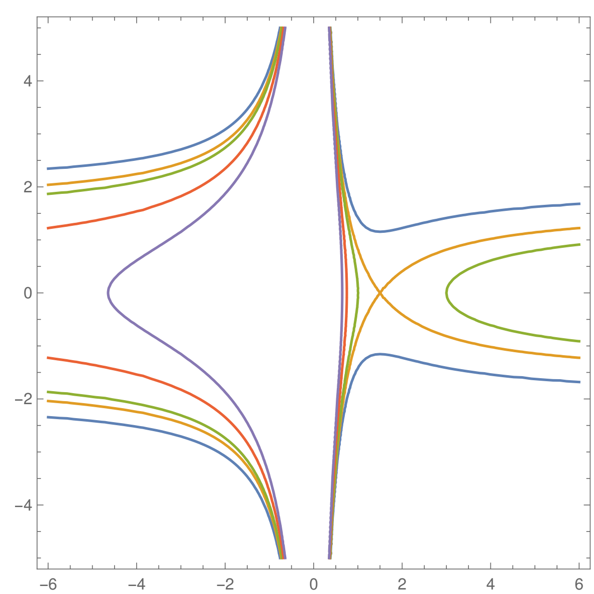


Figura 2: Ritratto di fase nel piano $(x, \dot{x})$. Si sono considerati i seguenti valori di energia: 1 (blu), 1/3 (arancione), 0 (verde), -1 (rosso), -2 (viola).

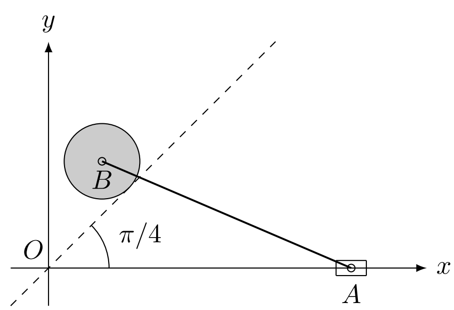
Compito di Meccanica Razionale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

28 Gennaio 2025

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Sul piano orizzontale Oxy si consideri un disco omogeneo di raggio r e massa m che rotola senza strisciare su una guida rettilinea coincidente con la retta $y = x$. Un'asta omogenea lunga $\ell \gg r$ e di massa M ha un estremo (B) vincolato attraverso una coppia rotoidale mobile al centro del disco, mentre l'altro estremo (A) può scivolare lungo la guida Ox attraverso un corsoio. Assumiamo che tutti i vincoli siano ideali.



Considerando il moto per $|y_B| < \ell$ ed utilizzando come parametro la variabile s definita dalla relazione $x_P = (\sqrt{2}/2)s$, dove P è il punto di contatto tra il disco e la guida (cioè $|s|$ rappresenta la distanza di P da O),

i) calcolare la velocità angolare dell'asta;

ii) ottenere graficamente la posizione del centro istantaneo di rotazione C_0 dell'asta in una configurazione del sistema con $s > 0$, come quella mostrata nella figura, motivando la risposta;

iii) scrivere esplicitamente la posizione di C_0;

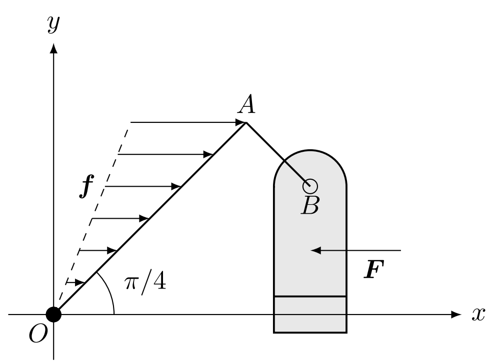
iv) trovare la reazione vincolare che agisce sull'asta in A.

Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Sul piano orizzontale Oxy si consideri il sistema meccanico formato da una squadra OAB e da un corpo rigido $\mathcal{C}$ vincolati tra loro attraverso una coppia rotoidale mobile posta nel punto B. La squadra è un corpo rigido costituito dalla porzione OA di lunghezza ℓ inclinata di $\pi/4$ rispetto all'asse Ox e dalla porzione AB di lunghezza $\ell/3$ tale che la direzione della retta per i punti A, B è perpendicolare alla direzione della retta per i punti O, A. La squadra è vincolata all'origine da una coppia rotoidale fissa. Il corpo $\mathcal{C}$ è vincolato all'asse Ox da una coppia prismatica. La porzione OA della squadra è sollecitata da un carico per unità di lunghezza distribuito linearmente dato da

$$\boldsymbol{f}(s) = \frac{\alpha F}{\ell^2} s\, \boldsymbol{e}_1, \qquad s \in [0, \ell],$$

dove $F > 0$, $\alpha > 0$ sono costanti ed $\boldsymbol{e}_1$ è un versore diretto e orientato come l'asse Ox. Su un punto del corpo $\mathcal{C}$ di ordinata $\sqrt{2}\ell/6$ è applicata la forza $\boldsymbol{F} = -F\boldsymbol{e}_1$. Assumiamo che tutti i vincoli siano ideali.



i) Mostrare come ottenere un sistema di forze applicate equivalente al sistema costituito dal carico distribuito che sia dato da una singola forza applicata.

ii) Determinare le reazioni vincolari interne ed esterne al sistema nei due casi $\alpha = 1$, $\alpha = 2$.

Soluzione Primo Esercizio

i)
Introduciamo la base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ e l'angolo φ tra la direzione Ox e l'asta AB tale che

$$\ell \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}(s+r). \tag{1}$$

Allora

$$\ell\cos\varphi = \sqrt{\frac{2\ell^2-(s+r)^2}{2}}.$$

Per comodità pongo

$$f(s) = \sqrt{2\ell^2-(s+r)^2}.$$

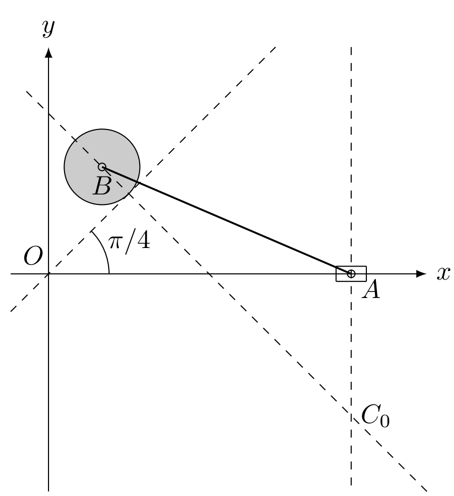
La velocità angolare dell'asta è data da

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3,$$

dove $\dot{\varphi}$ si ricava derivando rispetto al tempo i membri dell'equazione (1). Risulta

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{\dot{s}}{f(s)}\boldsymbol{e}_3.$$

ii)
Tenendo conto del teorema di Chasles, C_0 è individuato dal punto di intersezione della retta passante per B, P (che è ortogonale alla guida) e dalla retta parallela ad Oy e passante per A.



iii)
Le due rette menzionate al punto ii) hanno equazioni

$$y = -x + \sqrt{2}s, \qquad x = x_A,$$

dove

$$x_A = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(s - r + f(s)\right).$$

Risulta

$$\boldsymbol{\chi}_{C_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[(s-r+f(s))\,\boldsymbol{e}_1 + (s+r-f(s))\,\boldsymbol{e}_2\right].$$

iv)
La reazione vincolare che agisce in A sull'asta ha direzione parallela ad Oy. Indichiamola con $\boldsymbol{\Phi} = \Phi\boldsymbol{e}_2$. Possiamo allora determinarla dalla seconda equazione cardinale della dinamica dell'asta rispetto a B:

$$\dot{\mathbf{M}}_B = \mathbf{N}_B - M\mathbf{v}_B \times \mathbf{v}_G, \tag{2}$$

dove G è il baricentro dell'asta. Scriviamo le posizioni dei punti che entrano in gioco:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}_B &= \frac{\sqrt{2}}{2}[(s-r)\boldsymbol{e}_1 + (s+r)\boldsymbol{e}_2],\\
\boldsymbol{\chi}_A &= \frac{\sqrt{2}}{2}\,(s-r+f(s))\,\boldsymbol{e}_1,\\
\boldsymbol{\chi}_G &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(s-r+\frac{f(s)}{2}\right)\boldsymbol{e}_1 + \frac{s+r}{2}\boldsymbol{e}_2\right].
\end{aligned}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_B &= \frac{\sqrt{2}}{2}\dot{s}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2),\\
\mathbf{v}_G &= \frac{\sqrt{2}}{2}\dot{s}\left[\left(1 - \frac{s+r}{2f(s)}\right)\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2\right].
\end{aligned}$$

Si ottiene

$$\mathbf{N}_B = \frac{\sqrt{2}f(s)}{2}\Phi\boldsymbol{e}_3$$

e

$$-M\mathbf{v}_B \times \mathbf{v}_G = \frac{M\dot{s}^2}{4}\left(1 - \frac{s+r}{f(s)}\right)\boldsymbol{e}_3.$$

Inoltre calcoliamo $\mathbf{M}_B$ dalla formula

$$\mathbf{M}_B = I_{B,z}\boldsymbol{\omega} + M(\boldsymbol{\chi}_G - \boldsymbol{\chi}_B) \times \mathbf{v}_B,$$

con $I_{B,z} = M\ell^2/3$. Si ottiene

$$\mathbf{M}_B = M\dot{s}\left(\frac{s+r+f(s)}{4} - \frac{\ell^2}{3f(s)}\right)\boldsymbol{e}_3$$

e

$$\dot{\mathbf{M}}_B = M\left[\ddot{s}\left(\frac{s+r+f(s)}{4} - \frac{\ell^2}{3f(s)}\right) + \dot{s}^2\left(\frac{1}{4} - \frac{s+r}{f(s)}\left(\frac{1}{4} + \frac{\ell^2}{3f^2(s)}\right)\right)\right]\boldsymbol{e}_3.$$

Dopo alcune semplificazioni risulta

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{\sqrt{2}M}{f(s)}\left[\ddot{s}\left(\frac{s+r+f(s)}{4} - \frac{\ell^2}{3f(s)}\right) - \frac{\dot{s}^2\ell^2(s+r)}{3f^3(s)}\right]\boldsymbol{e}_2.$$

Soluzione Secondo Esercizio

i)
Introduciamo la base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Poichè il sistema di forze esterne attive applicate alla squadra è costituito da vettori paralleli, il trinomio invariante sarà nullo. Per un risultato visto, potremo sostituire tale sistema con un unico vettore dato dalla risultante applicata in un punto dell'asse centrale, che sceglieremo coincidere con il centro dei vettori paralleli. La risultante è data da

$$\boldsymbol{R} = \int_0^\ell \boldsymbol{f}(s) ds = \frac{\alpha F}{2} \boldsymbol{e}_1.$$

Chiamiamo C il centro dei vettori paralleli e P un generico punto della porzione OA. La posizione di C rispetto ad O è data da

$$\boldsymbol{\chi}_C = \frac{\displaystyle\int_0^\ell (\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{e}_1) \boldsymbol{\chi}_P \, ds}{\displaystyle\int_0^\ell \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{e}_1 \, ds},$$

dove

$$\boldsymbol{\chi}_P(s) = \frac{\sqrt{2}}{2} s(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2).$$

Si ottiene

$$\boldsymbol{\chi}_C = \frac{\displaystyle\frac{\sqrt{2}\alpha F}{2\ell^2}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) \int_0^\ell s^2 ds}{\displaystyle\int_0^\ell \frac{\alpha F}{\ell^2} s ds} = \frac{\sqrt{2}}{3} \ell(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2).$$

Si noti che

$$|\boldsymbol{\chi}_C| = \frac{2}{3}\ell,$$

come ci aspettavamo. Sostituiamo da qui in avanti il sistema di forze esterne attive applicate alla squadra con il sistema $\{\boldsymbol{R}, C\}$.

ii)
Cominciamo dal caso $\underline{\alpha = 1}$. La risultante è

$$\boldsymbol{R} = \frac{F}{2} \boldsymbol{e}_1.$$

Dalla prima equazione cardinale della statica (e. c. s.) dell'intero sistema si ha subito che la componente lungo Ox della reazione $\boldsymbol{\Phi}_O$ risulta

$$\Phi_{O,x} = \frac{F}{2},$$

e di conseguenza dalla prima e. c. s. per la squadra si ha che la componente lungo Ox della reazione $\boldsymbol{\Phi}_B$ che $\mathcal{C}$ esercita sulla squadra risulta

$$\Phi_{B,x} = -F.$$

Notando che

$$y_B = y_C = \frac{\sqrt{2}}{3} \ell,$$

per l'equilibrio della sola squadra, la retta di applicazione di $\mathbf{\Phi}_O$ deve passare per B, allora deve valere

$$\frac{\Phi_{O,y}}{\Phi_{O,x}} = \frac{y_B}{x_B},$$

con

$$x_B = \frac{2\sqrt{2}}{3}\ell.$$

Si ottiene

$$\Phi_{O,y} = \frac{F}{4}.$$

Dalla prima e. c. s. per la squadra segue che

$$\Phi_{B,y} = -\frac{F}{4}$$

e di conseguenza la risultante $\mathbf{\Phi}$ delle reazioni esercitate dalla guida Ox su $\mathcal{C}$ attraverso la coppia prismatica è diversa da zero ed è data da

$$\mathbf{\Phi} = -\frac{F}{4}\boldsymbol{e}_2.$$

In definitiva

$$\mathbf{\Phi}_O = \frac{F}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{F}{4}\boldsymbol{e}_2, \qquad \mathbf{\Phi}_B = -F\boldsymbol{e}_1 - \frac{F}{4}\boldsymbol{e}_2, \qquad \mathbf{\Phi} = -\frac{F}{4}\boldsymbol{e}_2.$$

Resta da determinare l'asse centrale delle reazioni esercitate dalla guida Ox su $\mathcal{C}$ attraverso la coppia prismatica. Si tratta della retta parallela all'asse Oy e passante per il punto di intersezione delle due rette di applicazione di $\mathbf{\Phi}_B$ e $-F\boldsymbol{e}_1$:

$$y = \frac{x}{4} + \frac{\sqrt{2}\ell}{6}, \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{6}\ell,$$

L'equazione dell'asse centrale è data da

$$x = 0$$

e possiamo applicare $\mathbf{\Phi}$ in un punto qualsiasi di questa retta.

Consideriamo ora il caso $\underline{\alpha = 2}$. La risultante è

$$\boldsymbol{R} = F\boldsymbol{e}_1,$$

applicata in C. Si nota allora che il sistema è soggetto ad una coppia di vettori con momento

$$\mathbf{N} = -\frac{\sqrt{2}F\ell}{6}\boldsymbol{e}_3.$$

Assumiamo che $\mathbf{\Phi}_O \neq 0$. Allora la retta di applicazione r di $\mathbf{\Phi}_O$ deve essere parallela all'asse Oy. Tuttavia, per l'equilibrio della sola squadra, r deve passare per O e B. Segue che necessariamente

$$\mathbf{\Phi}_O = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{\Phi}_B = -F\boldsymbol{e}_1$$

e le reazioni esercitate dalla guida Ox su $\mathcal{C}$ attraverso la coppia prismatica sono equivalenti ad una coppia di momento pari a $-\mathbf{N}$.

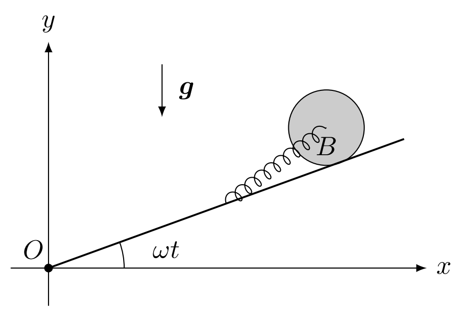
Compito di Meccanica Razionale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

28 Gennaio 2025

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Sul piano verticale Oxy si consideri un disco omogeneo di massa m e raggio r che rotola senza strisciare su un'asta omogenea di massa M e lunghezza 2ℓ vincolata in corrispondenza di un suo estremo in O attraverso una coppia rotoidale fissa. L'asta è posta in rotazione attorno all'asse Oz con velocità angolare ω costante. L'angolo che essa forma con l'asse Ox è dato da ωt, dove t denota il tempo. Una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla collega il baricentro del disco con il punto solidale all'asta distante ℓ da O. Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione $\boldsymbol{g}$ parallela ad Oy e di modulo uguale a g. Si assuma che i vincoli siano ideali.



Utilizzando come parametro lagrangiano la variabile s definita dalla relazione $x_P = s(\cos \omega t)$, dove P è il punto di contatto tra il disco e la guida (cioè s rappresenta la distanza di P da O),

i) ricavare le componenti della velocità del baricentro del disco e della velocità virtuale del baricentro del disco nel riferimento $Oxyz$;

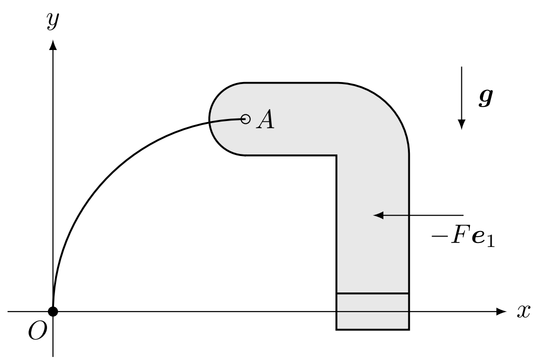
ii) ricavare l'equazione pura del moto del disco con le equazioni cardinali della dinamica;

iii) trovare un sistema di forze costituito da un unico vettore applicato equivalente alle forze centrifughe che agiscono sull'asta dovute alla sua rotazione;

iv) trovare un sistema di forze costituito da un unico vettore applicato equivalente alle forze centrifughe che agiscono sul disco dovute alla rotazione dell'asta.

Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Sul piano verticale Oxy si consideri il sistema meccanico formato da un corpo rigido omogeneo OA di massa m che ha la forma di un quarto di circonferenza di raggio ℓ con centro nel punto di coordinate $(\ell, 0)$ e da un corpo rigido $\mathcal{C}$ di massa $2m$ vincolati tra loro attraverso una coppia rotoidale mobile posta in $A \equiv (\ell, \ell)$. Il corpo OA è vincolato in O attraverso una coppia rotoidale fissa ed il corpo $\mathcal{C}$ è vincolato alla guida Ox attraverso una coppia prismatica. Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione $\boldsymbol{g}$ parallela ad Oy e di modulo uguale a g. Inoltre sul corpo $\mathcal{C}$ agisce la forza $-F\boldsymbol{e}_1$, $F \geq 0$, la cui retta di applicazione è data da $y = \ell/2$. Il baricentro di $\mathcal{C}$ si trova nel punto di coordinate $(3\ell/2, \ell/2)$. Si assuma che i vincoli siano ideali.



i) Ponendo $F = 0$, determinare le reazioni vincolari interne ed esterne al sistema.

ii) Considerando $F > 0$, calcolare quanto deve valere F affinchè le reazioni che Ox esercita su $\mathcal{C}$ attraverso la coppia prismatica siano equivalenti ad una coppia e calcolare il momento di tale coppia.

Soluzione Primo Esercizio

i)

Introduciamo la base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ e la base $\{\boldsymbol{e}_s, \boldsymbol{e}_t, \boldsymbol{e}_3\}$, dove

$$\boldsymbol{e}_s = (\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)^T,$$
$$\boldsymbol{e}_t = (-\sin(\omega t), \cos(\omega t), 0)^T.$$

La posizione di B è data da

$$\boldsymbol{\chi}_B = s\boldsymbol{e}_s + r\boldsymbol{e}_t.$$

Tenendo conto delle relazioni

$$\dot{\boldsymbol{e}}_s = -\omega \boldsymbol{e}_t, \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_t = \omega \boldsymbol{e}_s,$$

si ottiene che la velocità di B è

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_B = (\dot{s} - \omega r)\boldsymbol{e}_s + \omega s \boldsymbol{e}_t.$$

La velocità virtuale di B si ottiene considerando i versori $\boldsymbol{e}_s$, $\boldsymbol{e}_t$ fissi, quindi risulta

$$\boldsymbol{v}_B = \dot{s}\boldsymbol{e}_s.$$

ii)

L'equazione del moto si può ottenere dalla seconda equazione cardinale della dinamica del disco rispetto a P:

$$\dot{\mathbf{M}}_P = \mathbf{N}_P - m\dot{\boldsymbol{\chi}}_P \times \dot{\boldsymbol{\chi}}_B.$$

La posizione di P è data da $\boldsymbol{\chi}_P = s\boldsymbol{e}_s$ e la sua velocità risulta

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_P = \dot{s}\boldsymbol{e}_s + s\omega \boldsymbol{e}_t.$$

Si ha

$$\mathbf{N}_P = (\boldsymbol{\chi}_B - \boldsymbol{\chi}_P) \times (-mg\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{F}_{\text{el}}),$$

dove

$$\boldsymbol{F}_{\text{el}} = -k(s\boldsymbol{e}_s + r\boldsymbol{e}_t)$$

e

$$-m\dot{\boldsymbol{\chi}}_P \times \dot{\boldsymbol{\chi}}_B = -m\omega^2 s \boldsymbol{e}_3.$$

Inoltre calcoliamo $\mathbf{M}_P$ dalla formula

$$\mathbf{M}_P = I_{P,z}\boldsymbol{\omega} + m(\boldsymbol{\chi}_B - \boldsymbol{\chi}_P) \times \mathbf{v}_P,$$

con $I_{P,z} = 3mr^2/2$,

$$\mathbf{v}_P = \omega s \boldsymbol{e}_t$$

e

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\omega - \frac{\dot{s}}{r}\right)\boldsymbol{e}_3.$$

Risulta

$$\mathbf{M}_P = -\frac{3}{2}mr\dot{s}\boldsymbol{e}_3.$$

Allora l'equazione del moto diventa

$$\frac{3}{2}\ddot{s} = \omega^2 s - g\sin(\omega t) - \frac{k}{m}(s-\ell).$$

iii)
Sia λ la densità dell'asta. L'accelerazione centrifuga su un punto generico dell'asta, la cui posizione rispetto ad O è $s\boldsymbol{e}_s$, è data da

$$-\omega\boldsymbol{e}_3 \times (\omega\boldsymbol{e}_3 \times s\boldsymbol{e}_s) = \omega^2 s\boldsymbol{e}_s.$$

La risultante è

$$\boldsymbol{R}_a = \int_0^{2\ell} \lambda\omega^2 s\boldsymbol{e}_s ds = M\omega^2\ell\boldsymbol{e}_s.$$

Poichè il sistema di forze in questione è costituito da vettori con la stessa retta di applicazione, che è la retta passante per i punti dell'asta, esso è equivalente a

$$\mathcal{S}_a = \{\boldsymbol{R}_a, Q\},$$

dove $Q = O + \mu\boldsymbol{e}_s$, con $\mu \in \mathbb{R}$.

iv)
Sia σ la densità del disco. L'accelerazione centrifuga su un punto generico del disco, la cui posizione rispetto ad O è indicata con $\boldsymbol{\chi}$, è data da

$$-\omega\boldsymbol{e}_3 \times (\omega\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{\chi}) = \omega^2\boldsymbol{\chi}.$$

Introduciamo coordinate polari $(\rho,\theta) \in [0,r] \times [0,2\pi)$ in modo da scrivere

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}_B + (\rho\cos\theta)\boldsymbol{e}_s + (\rho\sin\theta)\boldsymbol{e}_t.$$

La risultante è

$$\boldsymbol{R}_d = \int_0^{2\pi}\int_0^r \sigma\rho\omega^2\boldsymbol{\chi}d\rho d\theta = m\omega^2\boldsymbol{\chi}_B.$$

Per determinare i punti Q dell'asse centrale del sistema di forze in questione, poniamo $\boldsymbol{N}_Q = \boldsymbol{0}$:

$$\boldsymbol{N}_Q = \int_0^{2\pi}\int_0^r \sigma\rho(\boldsymbol{\chi}-\boldsymbol{\chi}_Q)\times\omega^2\boldsymbol{\chi}d\rho d\theta = -\boldsymbol{\chi}_Q \times \boldsymbol{R}_d = \boldsymbol{0}.$$

Segue che l'asse centrale è dato dalla retta che passa per O e B. Un sistema equivalente è

$$\mathcal{S}_d = \{\boldsymbol{R}_d, Q\},$$

dove $Q = O + \mu\boldsymbol{e}_B$, con $\mu \in \mathbb{R}$ ed $\boldsymbol{e}_B = \boldsymbol{\chi}_B/|\boldsymbol{\chi}_B|$.

Soluzione Secondo Esercizio

i)

Sia λ la densità del corpo OA, calcoliamo la distanza del suo baricentro G dal punto $(\ell, 0)$:

$$h = \frac{\lambda}{m} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \ell^2 \cos\theta d\theta = \frac{2\sqrt{2}\ell}{\pi}.$$

Quindi le coordinate del baricentro sono

$$x_G = \ell - h\frac{\sqrt{2}}{2} = \ell\left(1 - \frac{2}{\pi}\right),$$
$$y_G = h\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\ell}{\pi}.$$

Dalla prima equazione cardinale della statica (e. q. s.) per l'intero sistema si ha

$$\Phi_{O,x} = 0.$$

Dalla prima e. c. s. per il corpo OA si ha

$$\Phi_{A,x} = 0.$$

Dalla seconda e. c. s. per il corpo OA rispetto ad O si ha

$$\Phi_{A,y} = mg\left(1 - \frac{2}{\pi}\right).$$

Dalla prima e. c. s. per il corpo OA si ha

$$\Phi_{O,y} = \frac{2mg}{\pi}.$$

Dalla prima e. c. s. per l'intero sistema si ha che la risultante delle reazioni della coppia prismatica è

$$\boldsymbol{\Phi} = mg\left(3 - \frac{2}{\pi}\right)\boldsymbol{e}_2.$$

Per determinare l'asse centrale, scriviamo la seconda e. c. s. del corpo $\mathcal{C}$ rispetto ad A introducendo un braccio b per la forza $\boldsymbol{\Phi}$. Risulta

$$b = \frac{\pi\ell}{3\pi - 2}.$$

In definitiva si ha

$$\boldsymbol{\Phi}_O = \frac{2mg}{\pi}\boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{\Phi}_A = mg\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{\Phi} = mg\left(3 - \frac{2}{\pi}\right)\boldsymbol{e}_2,$$

e l'asse centrale delle reazioni della coppia prismatica è dato dalla retta

$$y = \frac{3\pi - 1}{3\pi - 2}\ell.$$

ii)
Sfruttiamo il principio di sovrapposizione degli effetti e consideriamo il sistema soggetto alla sola forza $-F\boldsymbol{e}_1$, annullando quindi le forze peso. Da semplici considerazioni sul corpo OA e sull'intero sistema si vede subito che

$$\Phi'_{O,x} = \Phi'_{O,y} = -\Phi'_{A,x} = -\Phi'_{A,y} = F$$

e la risultante delle reazioni della coppia prismatica è

$$\boldsymbol{\Phi'} = -F\boldsymbol{e}_2,$$

mentre l'asse centrale da semplici considerazioni geometriche è dato dalla retta

$$y = \frac{\ell}{2}.$$

Considerando ora anche le forze peso oltre alla forza $-F\boldsymbol{e}_1$, abbiamo che le reazioni della coppia prismatica sono equivalenti a $\boldsymbol{\Phi}$ applicata in un punto della retta

$$y = \frac{3\pi - 1}{3\pi - 2}\ell$$

e $\boldsymbol{\Phi'}$ applicata in un punto della retta

$$y = \frac{\ell}{2}.$$

Affinché questo sistema sia equivalente ad una coppia basta porre

$$F = mg\left(3 - \frac{2}{\pi}\right).$$

Il momento della coppia si ottiene conoscendo la distanza tra i due assi centrali,

$$d = \frac{3\pi - 1}{3\pi - 2}\ell - \frac{\ell}{2} = \frac{3\pi}{2(3\pi - 2)}\ell,$$

e risulta

$$\boldsymbol{N} = Fd\boldsymbol{e}_3 = \frac{3}{2}mg\ell\boldsymbol{e}_3.$$

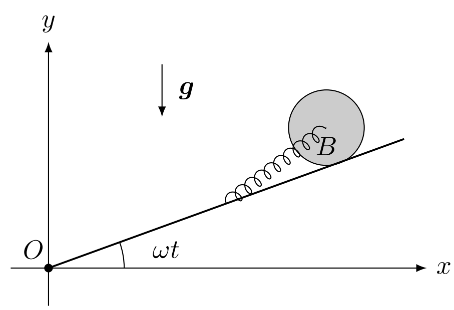
Compito di Meccanica Razionale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

28 Gennaio 2025

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Sul piano verticale Oxy si consideri un disco omogeneo di massa m e raggio r che rotola senza strisciare su un'asta omogenea di massa M e lunghezza 2ℓ vincolata in corrispondenza di un suo estremo in O attraverso una coppia rotoidale fissa. L'asta è posta in rotazione attorno all'asse Oz con velocità angolare ω costante. L'angolo che essa forma con l'asse Ox è dato da ωt, dove t denota il tempo. Una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla collega il baricentro del disco con il punto solidale all'asta distante ℓ da O. Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione $\boldsymbol{g}$ parallela ad Oy e di modulo uguale a g. Si assuma che i vincoli siano ideali.



Utilizzando come parametro lagrangiano la variabile s definita dalla relazione $x_P = s(\cos\omega t)$, dove P è il punto di contatto tra il disco e la guida (cioè s rappresenta la distanza di P da O),

i) ricavare le componenti della velocità del baricentro del disco e della velocità virtuale del baricentro del disco nel riferimento $Oxyz$;

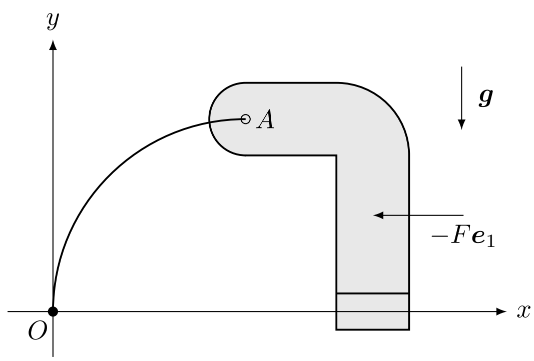
ii) ricavare l'equazione pura del moto del disco con le equazioni cardinali della dinamica;

iii) trovare un sistema di forze costituito da un unico vettore applicato equivalente alle forze centrifughe che agiscono sull'asta dovute alla sua rotazione;

iv) trovare un sistema di forze costituito da un unico vettore applicato equivalente alle forze centrifughe che agiscono sul disco dovute alla rotazione dell'asta.

Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Sul piano verticale Oxy si consideri il sistema meccanico formato da un corpo rigido omogeneo OA di massa m che ha la forma di un quarto di circonferenza di raggio ℓ con centro nel punto di coordinate $(\ell, 0)$ e da un corpo rigido $\mathcal{C}$ di massa $2m$ vincolati tra loro attraverso una coppia rotoidale mobile posta in $A \equiv (\ell, \ell)$. Il corpo OA è vincolato in O attraverso una coppia rotoidale fissa ed il corpo $\mathcal{C}$ è vincolato alla guida Ox attraverso una coppia prismatica. Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione $\boldsymbol{g}$ parallela ad Oy e di modulo uguale a g. Inoltre sul corpo $\mathcal{C}$ agisce la forza $-F\boldsymbol{e}_1$, $F \geq 0$, la cui retta di applicazione è data da $y = \ell/2$. Il baricentro di $\mathcal{C}$ si trova nel punto di coordinate $(3\ell/2, \ell/2)$. Si assuma che i vincoli siano ideali.



i) Ponendo $F = 0$, determinare le reazioni vincolari interne ed esterne al sistema.

ii) Considerando $F > 0$, calcolare quanto deve valere F affinchè le reazioni che Ox esercita su $\mathcal{C}$ attraverso la coppia prismatica siano equivalenti ad una coppia e calcolare il momento di tale coppia.

Soluzione Primo Esercizio

i)
Introduciamo la base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ e la base $\{\boldsymbol{e}_s, \boldsymbol{e}_t, \boldsymbol{e}_3\}$, dove

$$\boldsymbol{e}_s = (\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)^T,$$
$$\boldsymbol{e}_t = (-\sin(\omega t), \cos(\omega t), 0)^T.$$

La posizione di B è data da

$$\boldsymbol{\chi}_B = s\boldsymbol{e}_s + r\boldsymbol{e}_t.$$

Tenendo conto delle relazioni

$$\dot{\boldsymbol{e}}_s = -\omega \boldsymbol{e}_t, \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_t = \omega \boldsymbol{e}_s,$$

si ottiene che la velocità di B è

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_B = (\dot{s} - \omega r)\boldsymbol{e}_s + \omega s \boldsymbol{e}_t.$$

La velocità virtuale di B si ottiene considerando i versori $\boldsymbol{e}_s$, $\boldsymbol{e}_t$ fissi, quindi risulta

$$\boldsymbol{v}_B = \dot{s}\boldsymbol{e}_s.$$

ii)
L'equazione del moto si può ottenere dalla seconda equazione cardinale della dinamica del disco rispetto a P:

$$\dot{\mathbf{M}}_P = \mathbf{N}_P - m\dot{\boldsymbol{\chi}}_P \times \dot{\boldsymbol{\chi}}_B.$$

La posizione di P è data da $\boldsymbol{\chi}_P = s\boldsymbol{e}_s$ e la sua velocità risulta

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_P = \dot{s}\boldsymbol{e}_s + s\omega \boldsymbol{e}_t.$$

Si ha

$$\mathbf{N}_P = (\boldsymbol{\chi}_B - \boldsymbol{\chi}_P) \times (-mg\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{F}_{\text{el}}),$$

dove

$$\boldsymbol{F}_{\text{el}} = -k(s\boldsymbol{e}_s + r\boldsymbol{e}_t)$$

e

$$-m\dot{\boldsymbol{\chi}}_P \times \dot{\boldsymbol{\chi}}_B = -m\omega^2 s\boldsymbol{e}_3.$$

Inoltre calcoliamo $\mathbf{M}_P$ dalla formula

$$\mathbf{M}_P = I_{P,z}\boldsymbol{\omega} + m(\boldsymbol{\chi}_B - \boldsymbol{\chi}_P) \times \mathbf{v}_P,$$

con $I_{P,z} = 3mr^2/2$,

$$\mathbf{v}_P = \omega s \boldsymbol{e}_t$$

e

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\omega - \frac{\dot{s}}{r}\right)\boldsymbol{e}_3.$$

Risulta

$$\mathbf{M}_P = -\frac{3}{2}mr\dot{s}\boldsymbol{e}_3.$$

Allora l'equazione del moto diventa

$$\frac{3}{2}\ddot{s} = \omega^2 s - g\sin(\omega t) - \frac{k}{m}(s - \ell).$$

iii)
Sia λ la densità dell'asta. L'accelerazione centrifuga su un punto generico dell'asta, la cui posizione rispetto ad O è $s\boldsymbol{e}_s$, è data da

$$-\omega\boldsymbol{e}_3 \times (\omega\boldsymbol{e}_3 \times s\boldsymbol{e}_s) = \omega^2 s\boldsymbol{e}_s.$$

La risultante è

$$\boldsymbol{R}_a = \int_0^{2\ell} \lambda\omega^2 s\boldsymbol{e}_s ds = M\omega^2\ell\boldsymbol{e}_s.$$

Poichè il sistema di forze in questione è costituito da vettori con la stessa retta di applicazione, che è la retta passante per i punti dell'asta, esso è equivalente a

$$\mathcal{S}_a = \{\boldsymbol{R}_a, Q\},$$

dove $Q = O + \mu\boldsymbol{e}_s$, con $\mu \in \mathbb{R}$.

iv)
Sia σ la densità del disco. L'accelerazione centrifuga su un punto generico del disco, la cui posizione rispetto ad O è indicata con $\boldsymbol{\chi}$, è data da

$$-\omega\boldsymbol{e}_3 \times (\omega\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{\chi}) = \omega^2\boldsymbol{\chi}.$$

Introduciamo coordinate polari $(\rho, \theta) \in [0, r] \times [0, 2\pi)$ in modo da scrivere

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}_B + (\rho\cos\theta)\boldsymbol{e}_s + (\rho\sin\theta)\boldsymbol{e}_t.$$

La risultante è

$$\boldsymbol{R}_d = \int_0^{2\pi}\int_0^r \sigma\rho\omega^2\boldsymbol{\chi} d\rho d\theta = m\omega^2\boldsymbol{\chi}_B.$$

Per determinare i punti Q dell'asse centrale del sistema di forze in questione, poniamo $\boldsymbol{N}_Q = \boldsymbol{0}$:

$$\boldsymbol{N}_Q = \int_0^{2\pi}\int_0^r \sigma\rho(\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\chi}_Q) \times \omega^2\boldsymbol{\chi} d\rho d\theta = -\boldsymbol{\chi}_Q \times \boldsymbol{R}_d = \boldsymbol{0}.$$

Segue che l'asse centrale è dato dalla retta che passa per O e B. Un sistema equivalente è

$$\mathcal{S}_d = \{\boldsymbol{R}_d, Q\},$$

dove $Q = O + \mu\boldsymbol{e}_B$, con $\mu \in \mathbb{R}$ ed $\boldsymbol{e}_B = \boldsymbol{\chi}_B/|\boldsymbol{\chi}_B|$.

Soluzione Secondo Esercizio

i)

Sia λ la densità del corpo OA, calcoliamo la distanza del suo baricentro G dal punto $(\ell, 0)$:

$$h = \frac{\lambda}{m} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \ell^2 \cos\theta d\theta = \frac{2\sqrt{2}\ell}{\pi}.$$

Quindi le coordinate del baricentro sono

$$x_G = \ell - h\frac{\sqrt{2}}{2} = \ell\left(1 - \frac{2}{\pi}\right),$$

$$y_G = h\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\ell}{\pi}.$$

Dalla prima equazione cardinale della statica (e. q. s.) per l'intero sistema si ha

$$\Phi_{O,x} = 0.$$

Dalla prima e. c. s. per il corpo OA si ha

$$\Phi_{A,x} = 0.$$

Dalla seconda e. c. s. per il corpo OA rispetto ad O si ha

$$\Phi_{A,y} = mg\left(1 - \frac{2}{\pi}\right).$$

Dalla prima e. c. s. per il corpo OA si ha

$$\Phi_{O,y} = \frac{2mg}{\pi}.$$

Dalla prima e. c. s. per l'intero sistema si ha che la risultante delle reazioni della coppia prismatica è

$$\boldsymbol{\Phi} = mg\left(3 - \frac{2}{\pi}\right)\boldsymbol{e}_2.$$

Per determinare l'asse centrale, scriviamo la seconda e. c. s. del corpo $\mathcal{C}$ rispetto ad A introducendo un braccio b per la forza $\boldsymbol{\Phi}$. Risulta

$$b = \frac{\pi\ell}{3\pi - 2}.$$

In definitiva si ha

$$\boldsymbol{\Phi}_O = \frac{2mg}{\pi}\boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{\Phi}_A = mg\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{\Phi} = mg\left(3 - \frac{2}{\pi}\right)\boldsymbol{e}_2,$$

e l'asse centrale delle reazioni della coppia prismatica è dato dalla retta

$$x = \frac{3\pi - 1}{3\pi - 2}\ell.$$

ii)
Sfruttiamo il principio di sovrapposizione degli effetti e consideriamo il sistema soggetto alla sola forza $-F\boldsymbol{e}_1$, annullando quindi le forze peso. Da semplici considerazioni sul corpo OA e sull'intero sistema si vede subito che

$$\Phi'_{O,x} = \Phi'_{O,y} = -\Phi'_{A,x} = -\Phi'_{A,y} = F$$

e la risultante delle reazioni della coppia prismatica è

$$\boldsymbol{\Phi'} = -F\boldsymbol{e}_2,$$

mentre l'asse centrale da semplici considerazioni geometriche è dato dalla retta

$$x = \frac{\ell}{2}.$$

Considerando ora anche le forze peso oltre alla forza $-F\boldsymbol{e}_1$, abbiamo che le reazioni della coppia prismatica sono equivalenti a $\boldsymbol{\Phi}$ applicata in un punto della retta

$$x = \frac{3\pi - 1}{3\pi - 2}\ell$$

e $\boldsymbol{\Phi'}$ applicata in un punto della retta

$$x = \frac{\ell}{2}.$$

Affinché questo sistema sia equivalente ad una coppia basta porre

$$F = mg\left(3 - \frac{2}{\pi}\right).$$

Il momento della coppia si ottiene conoscendo la distanza tra i due assi centrali,

$$d = \frac{3\pi - 1}{3\pi - 2}\ell - \frac{\ell}{2} = \frac{3\pi}{2(3\pi - 2)}\ell,$$

e risulta

$$\boldsymbol{N} = Fd\boldsymbol{e}_3 = \frac{3}{2}mg\ell\boldsymbol{e}_3.$$

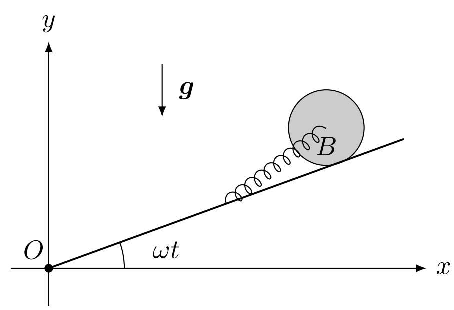
Compito di Meccanica Razionale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

28 Gennaio 2025

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Sul piano verticale Oxy si consideri un disco omogeneo di massa m e raggio r che rotola senza strisciare su un'asta omogenea di massa M e lunghezza 2ℓ vincolata in corrispondenza di un suo estremo in O attraverso una coppia rotoidale fissa. L'asta è posta in rotazione attorno all'asse Oz con velocità angolare ω costante. L'angolo che essa forma con l'asse Ox è dato da ωt, dove t denota il tempo. Una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla collega il baricentro del disco con il punto solidale all'asta distante ℓ da O. Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione $\boldsymbol{g}$ parallela ad Oy e di modulo uguale a g. Si assuma che i vincoli siano ideali.



Utilizzando come parametro lagrangiano la variabile s definita dalla relazione $x_P = s(\cos\omega t)$, dove P è il punto di contatto tra il disco e la guida (cioè s rappresenta la distanza di P da O),

i) ricavare le componenti della velocità del baricentro del disco e della velocità virtuale del baricentro del disco nel riferimento $Oxyz$;

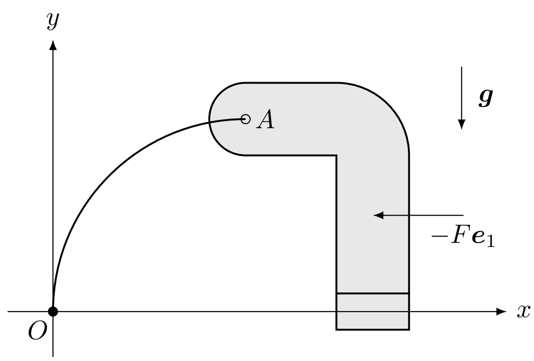
ii) ricavare l'equazione pura del moto del disco con le equazioni cardinali della dinamica;

iii) trovare un sistema di forze costituito da un unico vettore applicato equivalente alle forze centrifughe che agiscono sull'asta dovute alla sua rotazione;

iv) trovare un sistema di forze costituito da un unico vettore applicato equivalente alle forze centrifughe che agiscono sul disco dovute alla rotazione dell'asta.

Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Sul piano verticale Oxy si consideri il sistema meccanico formato da un corpo rigido omogeneo OA di massa m che ha la forma di un quarto di circonferenza di raggio ℓ con centro nel punto di coordinate $(\ell, 0)$ e da un corpo rigido $\mathcal{C}$ di massa $2m$ vincolati tra loro attraverso una coppia rotoidale mobile posta in $A \equiv (\ell, \ell)$. Il corpo OA è vincolato in O attraverso una coppia rotoidale fissa ed il corpo $\mathcal{C}$ è vincolato alla guida Ox attraverso una coppia prismatica. Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione $\boldsymbol{g}$ parallela ad Oy e di modulo uguale a g. Inoltre sul corpo $\mathcal{C}$ agisce la forza $-F\boldsymbol{e}_1$, $F \geq 0$, la cui retta di applicazione è data da $y = \ell/2$. Il baricentro di $\mathcal{C}$ si trova nel punto di coordinate $(3\ell/2, \ell/2)$. Si assuma che i vincoli siano ideali.



i) Ponendo $F = 0$, determinare le reazioni vincolari interne ed esterne al sistema.

ii) Considerando $F > 0$, calcolare quanto deve valere F affinchè le reazioni che Ox esercita su $\mathcal{C}$ attraverso la coppia prismatica siano equivalenti ad una coppia e calcolare il momento di tale coppia.

Soluzione Primo Esercizio

i)
Introduciamo la base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ e la base $\{\boldsymbol{e}_s, \boldsymbol{e}_t, \boldsymbol{e}_3\}$, dove

$$\boldsymbol{e}_s = (\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)^T,$$
$$\boldsymbol{e}_t = (-\sin(\omega t), \cos(\omega t), 0)^T.$$

La posizione di B è data da

$$\boldsymbol{\chi}_B = s\boldsymbol{e}_s + r\boldsymbol{e}_t.$$

Tenendo conto delle relazioni

$$\dot{\boldsymbol{e}}_s = -\omega \boldsymbol{e}_t, \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_t = \omega \boldsymbol{e}_s,$$

si ottiene che la velocità di B è

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_B = (\dot{s} - \omega r)\boldsymbol{e}_s + \omega s \boldsymbol{e}_t.$$

La velocità virtuale di B si ottiene considerando i versori $\boldsymbol{e}_s$, $\boldsymbol{e}_t$ fissi, quindi risulta

$$\boldsymbol{v}_B = \dot{s}\boldsymbol{e}_s.$$

ii)
L'equazione del moto si può ottenere dalla seconda equazione cardinale della dinamica del disco rispetto a P:

$$\dot{\mathbf{M}}_P = \mathbf{N}_P - m\dot{\boldsymbol{\chi}}_P \times \dot{\boldsymbol{\chi}}_B.$$

La posizione di P è data da $\boldsymbol{\chi}_P = s\boldsymbol{e}_s$ e la sua velocità risulta

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_P = \dot{s}\boldsymbol{e}_s + s\omega \boldsymbol{e}_t.$$

Si ha

$$\mathbf{N}_P = (\boldsymbol{\chi}_B - \boldsymbol{\chi}_P) \times (-mg\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{F}_{\text{el}}),$$

dove

$$\boldsymbol{F}_{\text{el}} = -k(s\boldsymbol{e}_s + r\boldsymbol{e}_t)$$

e

$$-m\dot{\boldsymbol{\chi}}_P \times \dot{\boldsymbol{\chi}}_B = -m\omega^2 s \boldsymbol{e}_3.$$

Inoltre calcoliamo $\mathbf{M}_P$ dalla formula

$$\mathbf{M}_P = I_{P,z}\boldsymbol{\omega} + m(\boldsymbol{\chi}_B - \boldsymbol{\chi}_P) \times \mathbf{v}_P,$$

con $I_{P,z} = 3mr^2/2$,

$$\mathbf{v}_P = \omega s \boldsymbol{e}_t$$

e

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\omega - \frac{\dot{s}}{r}\right)\boldsymbol{e}_3.$$

Risulta

$$\mathbf{M}_P = -\frac{3}{2}mr\dot{s}\boldsymbol{e}_3.$$

Allora l'equazione del moto diventa

$$\frac{3}{2}\ddot{s} = \omega^2 s - g\sin(\omega t) - \frac{k}{m}(s-\ell).$$

iii)
Sia λ la densità dell'asta. L'accelerazione centrifuga su un punto generico dell'asta, la cui posizione rispetto ad O è $s\boldsymbol{e}_s$, è data da

$$-\omega\boldsymbol{e}_3 \times (\omega\boldsymbol{e}_3 \times s\boldsymbol{e}_s) = \omega^2 s\boldsymbol{e}_s.$$

La risultante è

$$\boldsymbol{R}_a = \int_0^{2\ell} \lambda\omega^2 s\boldsymbol{e}_s ds = M\omega^2\ell\boldsymbol{e}_s.$$

Poichè il sistema di forze in questione è costituito da vettori con la stessa retta di applicazione, che è la retta passante per i punti dell'asta, esso è equivalente a

$$\mathcal{S}_a = \{\boldsymbol{R}_a, Q\},$$

dove $Q = O + \mu\boldsymbol{e}_s$, con $\mu \in \mathbb{R}$.

iv)
Sia σ la densità del disco. L'accelerazione centrifuga su un punto generico del disco, la cui posizione rispetto ad O è indicata con $\boldsymbol{\chi}$, è data da

$$-\omega\boldsymbol{e}_3 \times (\omega\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{\chi}) = \omega^2\boldsymbol{\chi}.$$

Introduciamo coordinate polari $(\rho, \theta) \in [0, r] \times [0, 2\pi)$ in modo da scrivere

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}_B + (\rho\cos\theta)\boldsymbol{e}_s + (\rho\sin\theta)\boldsymbol{e}_t.$$

La risultante è

$$\boldsymbol{R}_d = \int_0^{2\pi}\int_0^r \sigma\rho\omega^2\boldsymbol{\chi} d\rho d\theta = m\omega^2\boldsymbol{\chi}_B.$$

Per determinare i punti Q dell'asse centrale del sistema di forze in questione, poniamo $\boldsymbol{N}_Q = \boldsymbol{0}$:

$$\boldsymbol{N}_Q = \int_0^{2\pi}\int_0^r \sigma\rho(\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\chi}_Q) \times \omega^2\boldsymbol{\chi} d\rho d\theta = -\boldsymbol{\chi}_Q \times \boldsymbol{R}_d = \boldsymbol{0}.$$

Segue che l'asse centrale è dato dalla retta che passa per O e B. Un sistema equivalente è

$$\mathcal{S}_d = \{\boldsymbol{R}_d, Q\},$$

dove $Q = O + \mu\boldsymbol{e}_B$, con $\mu \in \mathbb{R}$ ed $\boldsymbol{e}_B = \boldsymbol{\chi}_B/|\boldsymbol{\chi}_B|$.

Soluzione Secondo Esercizio

i)

Sia λ la densità del corpo OA, calcoliamo la distanza del suo baricentro G dal punto $(\ell, 0)$:

$$h = \frac{\lambda}{m} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \ell^2 \cos\theta d\theta = \frac{2\sqrt{2}\ell}{\pi}.$$

Quindi le coordinate del baricentro sono

$$x_G = \ell - h\frac{\sqrt{2}}{2} = \ell\left(1 - \frac{2}{\pi}\right),$$
$$y_G = h\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\ell}{\pi}.$$

Dalla prima equazione cardinale della statica (e. q. s.) per l'intero sistema si ha

$$\Phi_{O,x} = 0.$$

Dalla prima e. c. s. per il corpo OA si ha

$$\Phi_{A,x} = 0.$$

Dalla seconda e. c. s. per il corpo OA rispetto ad O si ha

$$\Phi_{A,y} = mg\left(1 - \frac{2}{\pi}\right).$$

Dalla prima e. c. s. per il corpo OA si ha

$$\Phi_{O,y} = \frac{2mg}{\pi}.$$

Dalla prima e. c. s. per l'intero sistema si ha che la risultante delle reazioni della coppia prismatica è

$$\boldsymbol{\Phi} = mg\left(3 - \frac{2}{\pi}\right)\boldsymbol{e}_2.$$

Per determinare l'asse centrale, scriviamo la seconda e. c. s. del corpo $\mathcal{C}$ rispetto ad A introducendo un braccio b per la forza $\boldsymbol{\Phi}$. Risulta

$$b = \frac{\pi\ell}{3\pi - 2}.$$

In definitiva si ha

$$\boldsymbol{\Phi}_O = \frac{2mg}{\pi}\boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{\Phi}_A = mg\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{\Phi} = mg\left(3 - \frac{2}{\pi}\right)\boldsymbol{e}_2,$$

e l'asse centrale delle reazioni della coppia prismatica è dato dalla retta

$$x = \frac{4\pi - 2}{3\pi - 2}\ell.$$

ii)
Sfruttiamo il principio di sovrapposizione degli effetti e consideriamo il sistema soggetto alla sola forza $-F\boldsymbol{e}_1$, annullando quindi le forze peso. Da semplici considerazioni sul corpo OA e sull'intero sistema si vede subito che

$$\Phi'_{O,x} = \Phi'_{O,y} = -\Phi'_{A,x} = -\Phi'_{A,y} = F$$

e la risultante delle reazioni della coppia prismatica è

$$\boldsymbol{\Phi}' = -F\boldsymbol{e}_2,$$

mentre l'asse centrale da semplici considerazioni geometriche è dato dalla retta

$$x = \frac{\ell}{2}.$$

Considerando ora anche le forze peso oltre alla forza $-F\boldsymbol{e}_1$, abbiamo che le reazioni della coppia prismatica sono equivalenti a $\boldsymbol{\Phi}$ applicata in un punto della retta

$$x = \frac{4\pi - 2}{3\pi - 2}\ell$$

e $\boldsymbol{\Phi}'$ applicata in un punto della retta

$$x = \frac{\ell}{2}.$$

Affinché questo sistema sia equivalente ad una coppia basta porre

$$F = mg\left(3 - \frac{2}{\pi}\right).$$

Il momento della coppia si ottiene conoscendo la distanza tra i due assi centrali,

$$d = \frac{4\pi - 2}{3\pi - 2}\ell - \frac{\ell}{2} = \frac{5\pi - 2}{2(3\pi - 2)}\ell,$$

e risulta

$$\boldsymbol{N} = Fd\boldsymbol{e}_3 = \frac{5\pi - 2}{2\pi}mg\ell\boldsymbol{e}_3.$$