STATICA DEI SISTEMI MECCANICI

(capitolo 8 delle note)

configurazione di equilibrio

(vedere a pagina 153 delle note)

LAVORO VIRTUALE

(vedere alle pagine 153-154 delle note)

Esempio 14 delle note: lavoro virtuale delle forze che assicurano la rigidità di un corpo rigido

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{N} F_j(X, v) \cdot \delta X_j$$

per un corpo rigido (costituito da N punti) si ha

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{N} F_j(X, v) \cdot (\delta X_{O'} + \omega dt \times (X_j - X_{O'}))$$

$$= \delta X_{O'} \cdot \left(\sum_{j=1}^{N} F_j(X, v) \right) +$$

$$\sum_{j=1}^{N} \underbrace{\left(F_j(X, v) \cdot \omega dt \times (X_j - X_{O'})\right)}_{\parallel}$$

$$\omega dt \cdot \sum_{j=1}^{N} (X_j - X_{O'}) \times F_j(X, v)$$

allora

$$\delta \mathcal{L} = \delta X_{O'} \cdot R^{(v)} + \omega dt \cdot N_{O'}^{(v)}$$

dove abbiamo introdotto la risultante e il momento risultante del sistema di forze

$$R^{(v)} = \sum_{j=1}^{N} F_j(X, v)$$

$$N_{0'}^{(v)} = \sum_{j=1}^{N} (X_j - X_{0'}) \times F_j(X, v)$$

poiché il sistema di forze che garantisce la rigidità è un sistema di forze interne, segue che è equilibrato, dunque $R^{(v)} = 0$, $N_{0'}^{(v)} = 0$

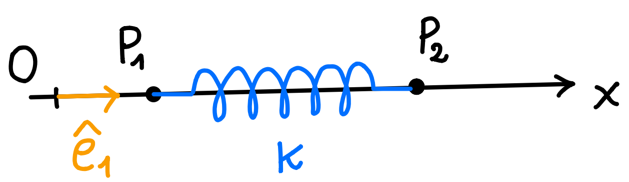
si conclude che in questo caso

$$\delta \mathcal{L} = 0$$

Osservazione 32

per uno spostamento virtuale non rigido, il lavoro elementare delle forze interne non è nullo

consideriamo due punti materiali nello spazio che si muovono su una retta e sono collegati da una molla



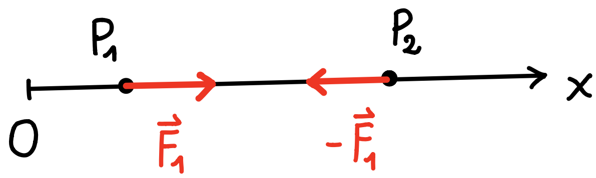
$$P_1 - O = x_1 \hat{e}_1 \,, \quad P_2 - O = x_2 \hat{e}_1$$

su P_1 agisce la forza

$$\vec{F}_1 = k(P_2 - P_1) = k(x_2 - x_1)\hat{e}_1$$

su P_2 agisce la forza

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$



$$\delta \mathcal{L} = F_1 \cdot \delta X_1 + F_2 \cdot \delta X_2$$

con $F_1 = (k(x_2 - x_1), 0, 0)^T$

$F_2 = -F_1$

$$\delta \mathcal{L} = F_1 \cdot (\delta X_1 - \delta X_2)$$

$$X_1 = (x_1, 0, 0)^T \longrightarrow \delta X_1 = (\delta x_1, 0, 0)^T$$

$$X_2 = (x_2, 0, 0)^T \longrightarrow \delta X_2 = (\delta x_2, 0, 0)^T$$

allora

$\delta \mathcal{L} = k(x_2 - x_1)(\delta x_1 - \delta x_2)$ che è $\neq 0$ per la maggior parte degli spostamenti virtuali

VINCOLI SENZA ATTRITO

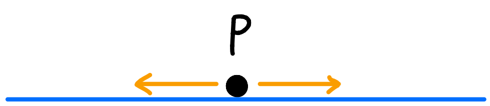
(vedere alle pagine 155 e 156 delle note) formula 8.1

$$\delta \mathcal{L}^{(v)} = \sum_{j=1}^{N} \Phi_j \cdot \delta x_j = 0$$ vincoli bilaterali

$$\delta \mathcal{L}^{(v)} = \sum_{j=1}^{N} \Phi_j \cdot \delta x_j \geq 0$$ vincoli unilaterali

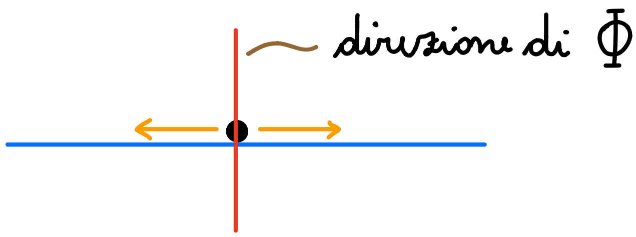
<u>esempio di vincolo bilaterale</u>

punto materiale che si può muovere lungo una guida orizzontale



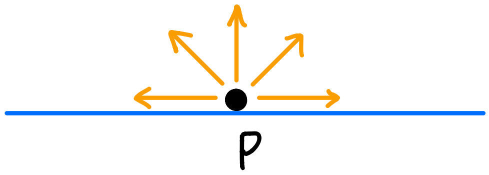
in arancione sono indicati alcuni spostamenti virtuali

la condizione $\Phi \cdot \delta x = 0$ si dice che una guida liscia può esercitare sul punto materiale P una reazione perpendicolare alla direzione di spostamento di P



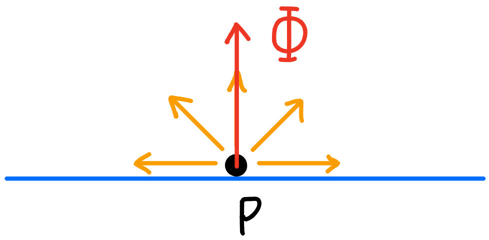
<u>esempio di vincolo unilaterale</u>

punto materiale che si può muovere lungo una guida orizzontale e può staccarsi da essa



in arancione sono indicati alcuni spostamenti virtuali

la condizione $\Phi \cdot \delta x \geqslant 0$, ricordando che deve valere per ogni spostamento virtuale, ci dice che la reazione Φ (quando non è nulla) è come in figura



coppie cinematiche

vediamo quali condizioni devono essere soddisfatte dalla risultante e dal momento risultante delle reazioni vincolari esercitate da un elemento della coppia sull'altro

la condizione di assenza di attrito insieme al fatto che ciascun elemento della coppia è un corpo rigido che possiamo schematizzare come un insieme di N punti materiali vincolati rigidamente, ci porta a scrivere

$$\delta L^{(v)} = \sum_{j=1}^{N} \Phi_j \cdot \delta x_j =$$

$$\sum_{j=1}^{N} \Phi_j \cdot (\delta X_{O'} + w\,dt \cdot (X_j - X_{O'})) = 0$$

cioè

$$\delta \mathcal{L}^{(v)} = R^{(v)} \cdot \delta X_{O'} + N_{O'}^{(v)} \cdot w\,dt = 0$$

con

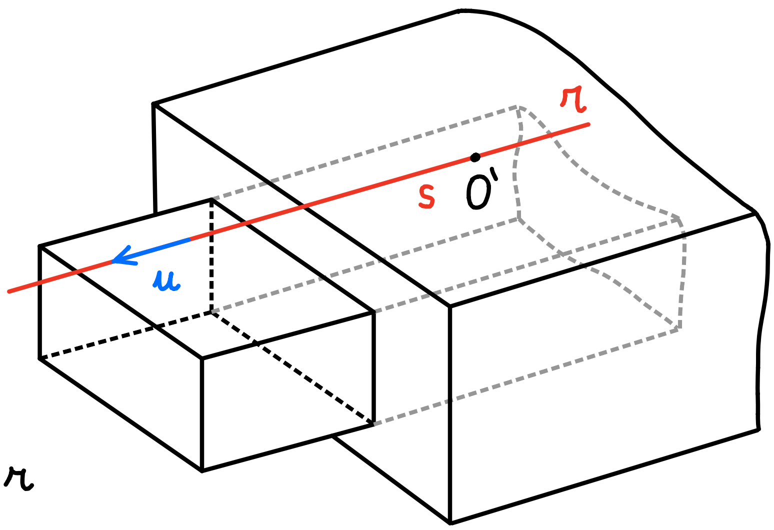
$$R^{(v)} = \sum_{j=1}^{N} \Phi_j$$

$$N_{O'}^{(v)} = \sum_{j=1}^{N} (X_j - X_{O'}) \times \Phi_j$$

coppia prismatica

consideriamo la generatrice r, e introduciamo u, versore di questa generatrice

Sia O' un punto di r solidale ad uno dei due corpi



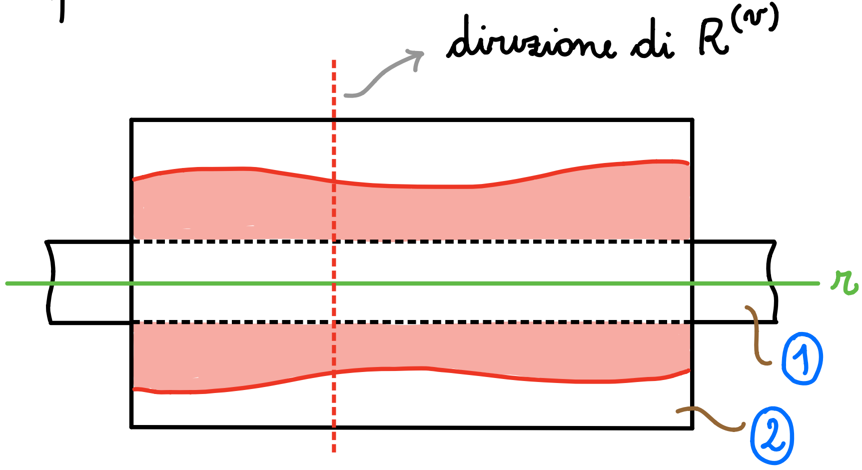
s è l'ascissa di O' misurata lungo la generatrice

$$\delta X_{O'} = u\,\delta s, \quad w\,dt = 0$$

$$\delta \mathcal{L}^{(v)} = 0 \longrightarrow R^{(v)} \cdot u\,\delta s = 0, \text{ per ogni } \delta s$$

$$R^{(v)} \cdot u = 0$$

negli esempi che incontreremo, la coppia prismatica è sul piano



in rosso indichiamo le reazioni esercitate da 1 su 2 (oppure da 2 su 1)

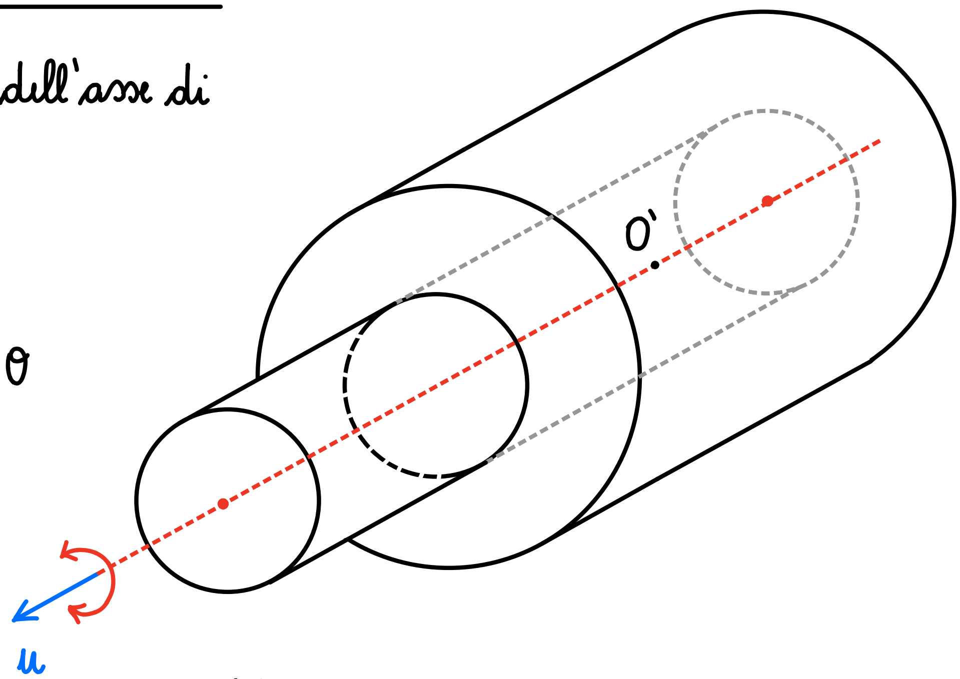
la condizione di assenza di attrito ci dice che la risultante $R^{(v)}$ di queste forze è perpendicolare alla generatrice r

coppia rotoidale

u versore dell'asse di rotazione

$\delta X_{O'} = 0$

$\omega dt = u \, \delta\theta$



$N_{O'}^{(v)} \cdot u \, \delta\theta = 0$, per ogni $\delta\theta$

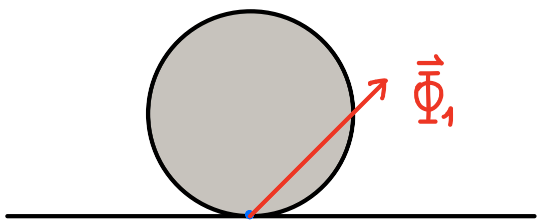
$$N_{O'}^{(v)} \cdot u = 0$$

l'assenza di attrito si traduce nel fatto che non c'è un momento nella direzione dell'asse della coppia

Per le <u>coppie rototraslatoria</u> e <u>sferica</u> vedere a pagina 156 delle note

Vincoli di puro rotolamento

(vedere a pagina 156 delle note)



$P_2 \in$ guida , $P_1 \in$ disco

$$\delta L^{(v)} = \Phi_1 \cdot \delta X_1 - \Phi_2 \cdot \delta X_2$$

Φ_1 è la reazione che la guida esercita sul disco

Φ_2 è la reazione che il disco esercita sulla guida

condizione di puro rotolamento $\delta X_1 = \delta X_2$

inoltre $\Phi_1 = -\Phi_2$, allora

$$\delta L^{(v)} = \Phi_1 \cdot (\delta X_1 - \delta X_2) = 0$$

NOTA : Φ_1 in generale avrà sia una componente ortogonale alla guida, sia una componente parallela alla guida (si veda il disegno)

Quindi, come per i vincoli senza attrito si ha che

$$\delta \mathcal{L}^{(v)} = 0$$

IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

(vedere alle pagine 157 e 158)

mi limito a spiegare questo passaggio

$$Q_h = Q_h(q) = -\sum_{j=1}^{N} \nabla_{x_j} \mathcal{V}(\chi(q)) \cdot \frac{\partial \chi_j}{\partial q_h}(q)$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial q_h}(q)$$

si ha

$$\chi(q) = (\chi_1(q), \chi_2(q), \dots, \chi_N(q))$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_h} = \frac{\partial \mathcal{V}(\chi(q))}{\partial q_h} = \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \chi_1}\right)^T \cdot \frac{\partial \chi_1}{\partial q_h} + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \chi_2}\right)^T \cdot \frac{\partial \chi_2}{\partial q_h}$$

$$+ \dots + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \chi_N}\right)^T \cdot \frac{\partial \chi_N}{\partial q_h} =$$

$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \chi_j}$ sono vettori riga,

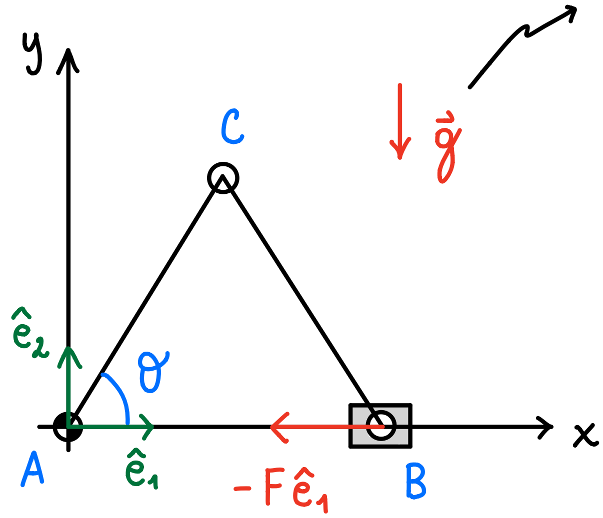
allora li trasponiamo per ottenere dei vettori colonna dato che poi li moltiplichiamo scalarmente per dei vettori colonna

infine notiamo che $\nabla_{x_j} \mathcal{V} = \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \chi_j}\right)^T$

Useremo il PLV per trovare le configurazioni di equilibrio di un sistema

Il PLV può essere usato anche per determinare le reazioni vincolari (vedere l'esempio 17 alle pagine 161, 162, 163 delle note)

Esercizio



agisce la forza di gravità

AC e CB sono due aste omogenee di massa m, lunghe 2ℓ

i vincoli sono senza attrito

i vincoli sono rappresentati da una coppia rotoidale fissa in A e da due coppie rotoidali mobili in C e in B

l'estremo B può scorrere lungo l'asse Ax

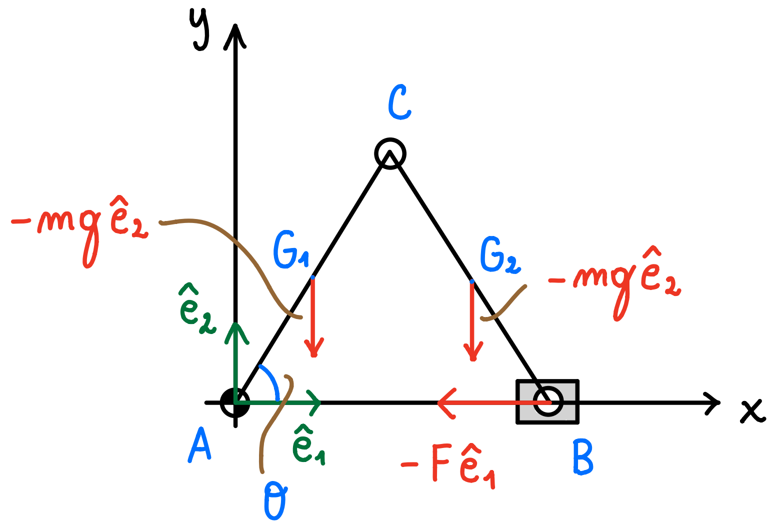
Usare il PLV per trovare le configurazioni di equilibrio

Sol.

Le forze esterne attive sono

a) la forza $-F\hat{e}_1$ applicata in B

b) la forza di gravità $-mg\hat{e}_2$ applicata nei baricentri G_1, G_2 delle due aste



poichè le aste sono omogenee, G_1 e G_2 sono i punti medi dei segmenti AC e CB rispettivamente

il sistema è ad un grado di libertà e

$$q = \theta$$

Scriviamo le posizioni dei punti G_1, G_2, B

$$X_{G_1}(\theta) = (\ell \cos\theta, \ell \,\text{sen}\,\theta)^T$$

$$X_{G_2}(\theta) = (3\ell \cos\theta, \ell \,\text{sen}\,\theta)^T$$

$$X_B(\theta) = (4\ell \cos\theta, 0)^T$$

Le forze attive sono conservative, e l'energia potenziale è data da

vedere NOTA alla fine dell'esercizio

$$\begin{cases} V(\theta) = mg\, y_{G_1}(\theta) + mg\, y_{G_2}(\theta) + F x_B(\theta) \\ V(\theta) = 2mg\ell \,\text{sen}\,\theta + 4\ell F\cos\theta \end{cases}$$

Applichiamo il PLV

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

$$2mgl\cos\theta - 4lF\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$mg\cos\theta - 2F\operatorname{sen}\theta = 0$$

dividiamo per $\cos\theta$

$$\tan\theta = \frac{mg}{2F}$$

$$\theta_1 = \arctan\frac{mg}{2F}, \quad \theta_2 = \pi + \theta_1$$

Possiamo procedere anche usando il PLV nella forma

$$\delta L^{(a)} = \sum_{j=1}^{N} F_j(X, v) \cdot \delta X_j = 0$$

scriviamo gli spostamenti virtuali

$$\delta X_{G_1} = (-l\operatorname{sen}\theta, l\cos\theta)^T \delta\theta$$

$$\delta X_{G_1} = (-3l\operatorname{sen}\theta, l\cos\theta)^T \delta\theta$$

$$\delta X_B = (-4l\operatorname{sen}\theta, 0)^T \delta\theta$$

e le forze attive

$$F_{G_1} = (0, -mg)^T, \quad F_{G_2} = (0, -mg)^T$$

$$F_B = (-F, 0)^T$$

$$\delta \mathcal{L}^{(a)} = F_B \cdot \delta X_B + F_{G_1} \cdot \delta X_{G_1} + F_{G_2} \cdot \delta X_{G_2}$$

$$(4 \ell F \operatorname{sen}\theta - 2 m g \ell \cos\theta)\, \delta\theta = 0$$

$\forall \delta\theta$

$$\longrightarrow \quad 4 \ell F \operatorname{sen}\theta - 2 m g \ell \cos\theta = 0$$

$$\tan\theta = \frac{mg}{2F}$$

$$\theta_1 = \arctan \frac{mg}{2F}, \quad \theta_2 = \pi + \theta_1$$

come prima

NOTA: $V(\theta) = 2 m g \ell \operatorname{sen}\theta + 4 \ell F \cos\theta$

$$V(\theta) = \mathcal{V}(X(\theta))$$

con $X = (X_{G_1}, X_{G_2}, X_B) \in \mathbb{R}^6$

verifichiamo che

$$F_{G_i} = -\nabla_{x_{G_i}} \mathcal{V}(x), \quad F_B = -\nabla_{x_B} \mathcal{V}(x)$$

$$i = 1,2$$

dove $x = (x_{G_1}, x_{G_2}, x_B) \in \mathbb{R}^6$

$$x_{G_1} = (x_{G_1}, y_{G_1})^T, \quad x_{G_2} = (x_{G_2}, y_{G_2})^T,$$

$$x_B = (x_B, y_B)^T$$

$$\mathcal{V}(x) = m g\, y_{G_1} + m g\, y_{G_2} + F x_B$$

$$F_{G_i} = -\nabla_{x_{G_i}} \mathcal{V}(x) = -\left(\frac{\partial \mathcal{V}(x)}{\partial x_{G_i}}\right)^T = \qquad (i = 1,2)$$

$$-\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_{G_i}}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_{G_i}}\right)^T = (0, -mg)^T$$

$$F_B = -\nabla_{x_B} \mathcal{V}(x) = -\left(\frac{\partial \mathcal{V}(x)}{\partial x_B}\right)^T =$$

$$-\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_B}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_B}\right)^T = (-F, 0)^T$$

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

(pagine 159 - 160 delle note)

Cercate di dimostrare come si ottengono le equazioni 8.6 :

$$\vec{R} = \vec{0} \,, \quad \vec{N}_Q = \vec{0}$$

a partire dalle equazioni di Newton scritte per ciascun punto del sistema

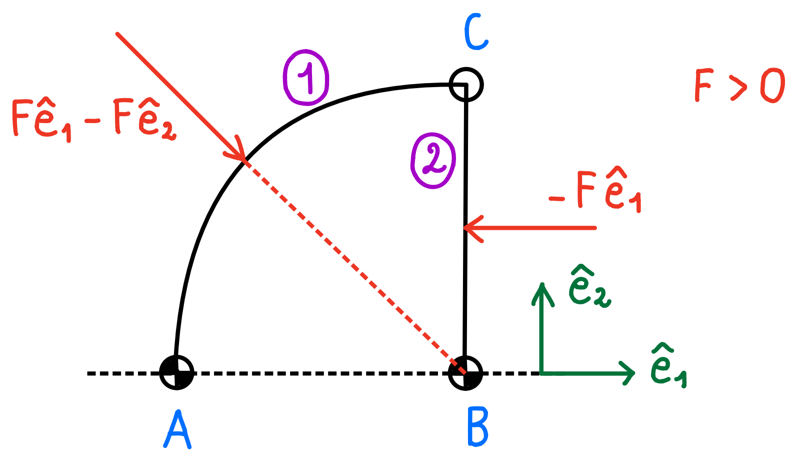
Nel prossimo esercizio mostreremo come determinare le reazioni vincolari per un arco a tre cerniere usando le equazioni cardinali della statica. Verrà discusso

1) il metodo di sovrapposizione degli effetti
2) il metodo di scomposizione

(gli argomenti che ho sottolineato in rosso sono trattati alle pagine 164 - 166 delle note; non ho fatto in tempo a farla, vi consiglio comunque di leggere la sezione 8.5: avrete modo di trattare i problemi iperstatici in altri corsi)

Esercizio

Consideriamo un arco a tre cerniere



il corpo BC è un'asta lunga l

il corpo AC è un quarto di circonferenza con centro in B e raggio l

in A e in B ci sono due coppie rotoidali fisse

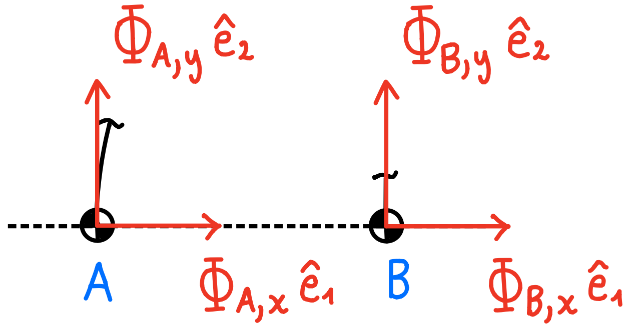
in C c'è una coppia rotoidale mobile

i vincoli sono privi di attrito

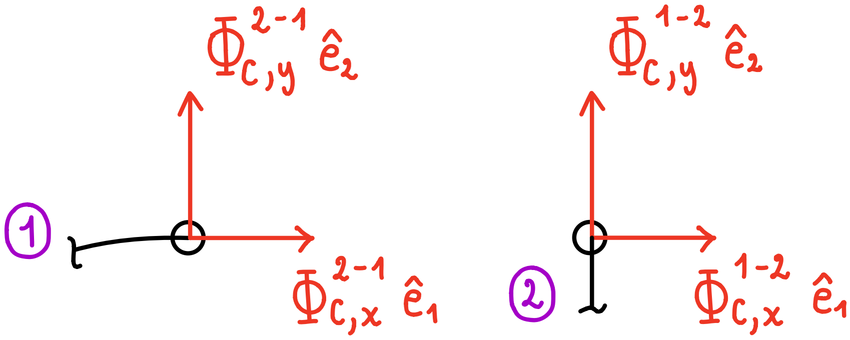
Calcolare le reazioni vincolari in A, B, C

Sol.

Le reazioni vincolari esercitate sui corpi 1 e 2 rispettivamente in A e B sono



consideriamo la coppia rotoidale in C



$\vec{\Phi}_C^{2-1}$ è la reazione (interna al sistema) esercitata dal corpo 2 sul corpo 1)

$\vec{\Phi}_C^{1-2}$ è la reazione (interna al sistema) esercitata dal corpo 1 sul corpo 2)

per il principio di azione e reazione vale

$$\vec{\Phi}_C^{2-1} = -\vec{\Phi}_C^{1-2}$$

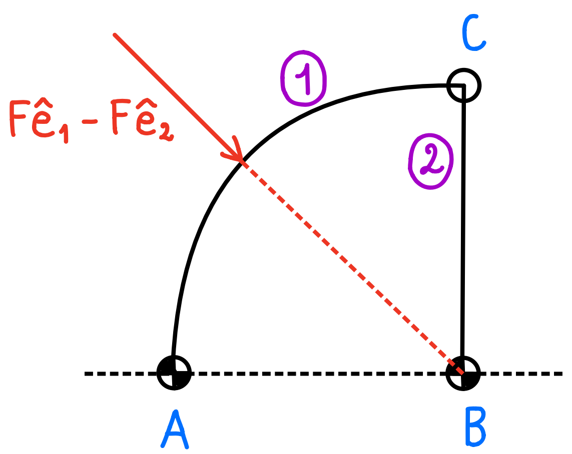
Le incognite sono 6

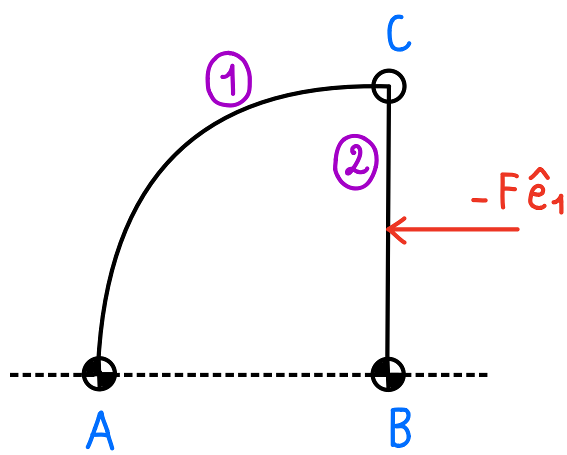
<u>Metodo di sovrapposizione degli effetti</u>

questo metodo si basa sul fatto che l'effetto complessivo di più forze esterne attive che agiscono sul sistema è dato dalla somma degli effetti delle singole forze

ciò è vero purchè le forze appaiono in modo lineare nelle equazioni cardinali della statica

In questo esempio potremmo risolvere separatamente i due sistemi





trovando

$\Phi'_{A,x}\ ,\ \Phi'_{A,y}$	$\Phi''_{A,x}\ ,\ \Phi''_{A,y}$
$\Phi'_{B,x}\ ,\ \Phi'_{B,y}$	$\Phi''_{B,x}\ ,\ \Phi''_{B,y}$
$(\Phi^{1-2}_{C,x})'\ ,\ (\Phi^{1-2}_{C,y})'$	$(\Phi^{1-2}_{C,x})''\ ,\ (\Phi^{1-2}_{C,y})''$

per poi ottenere

$$\Phi_{A,x} = \Phi'_{A,x} + \Phi''_{A,x} \qquad \Phi_{A,y} = \Phi'_{A,y} + \Phi''_{A,y}$$

$$\Phi_{B,x} = \Phi'_{B,x} + \Phi''_{B,x} \qquad \Phi_{B,y} = \Phi'_{B,y} + \Phi''_{B,y}$$

$$\Phi_{C,x}^{1-2} = \left(\Phi_{C,x}^{1-2}\right)' + \left(\Phi_{C,x}^{1-2}\right)''$$

$$\Phi_{C,y}^{1-2} = \left(\Phi_{C,y}^{1-2}\right)' + \left(\Phi_{C,y}^{1-2}\right)''$$

il metodo di sovrapposizione degli effetti è utile se si vuole seguire un procedimento di risoluzione grafica (che vedremo dopo),

se invece si procede con un metodo analitico in cui si scrivono le equazioni cardinali, non porta ad alcun vantaggio

Torniamo al problema di partenza e usiamo le equazioni cardinali

Eq. cardinali per l'intero sistema

$$\begin{cases} \vec{R}^{(E)} = \vec{0} \\ \vec{N}_Q^{(E)} = \vec{0} \end{cases}$$

queste sono due equazioni vettoriali che portano a tre equazioni scalari

$$\vec{R}^{(E)} = \underbrace{\vec{f}^{(E)}}_{\text{risultante delle forze esterne attive}} + \underbrace{\vec{\Phi}^{(E)}}_{\text{risultante delle forze esterne reattive}}$$

$$-F\hat{e}_1 + (F\hat{e}_1 - F\hat{e}_2) + \vec{\Phi}_A + \vec{\Phi}_B = 0$$

che proiettiamo lungo $\hat{e}_1$ ed $\hat{e}_2$

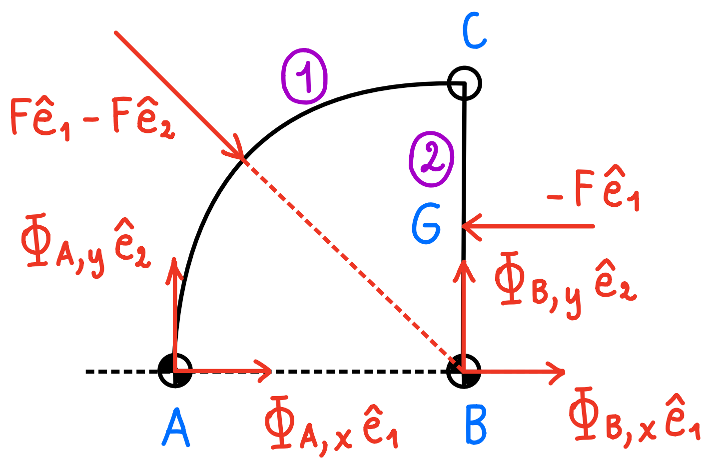
$$\hat{e}_1 : \quad -F + F + \Phi_{A,x} + \Phi_{B,x} = 0$$

$$\hat{e}_2 : \quad -F + \Phi_{A,y} + \Phi_{B,y} = 0$$

dalla prima equazione abbiamo

$$\Phi_{A,x} = -\Phi_{B,x}$$

Ora scriviamo la seconda equazione cardinale rispetto al polo B



si vede che gli unici contributi non nulli vengono da $\vec{\Phi}_A$ e $-F\hat{e}_1$

$$(A - B) \times \vec{\Phi}_A + (G - B) \times (-F\hat{e}_1) = 0$$

questa equazione vettoriale porta all'equazione scalare

$$-\Phi_{A,y}\,\ell + F\frac{\ell}{2} = 0 \longrightarrow \Phi_{A,y} = \frac{F}{2}$$

allora dalla 1ª eq. cardinale proiettata lungo $\hat{e}_2$

si ha

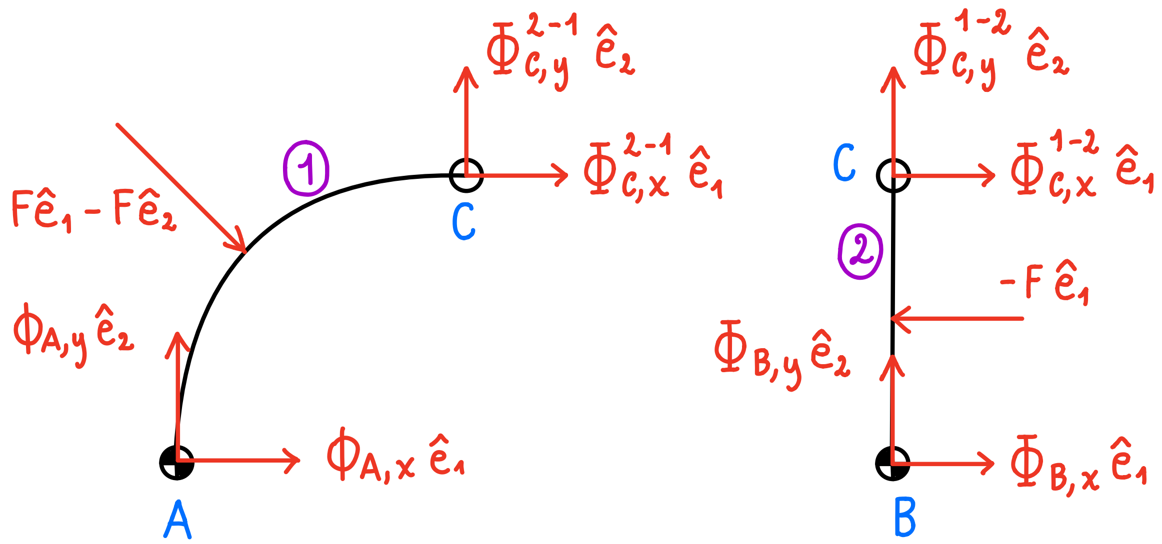
$$-F + \frac{F}{2} + \Phi_{B,y} = 0$$

$$\Phi_{B,y} = \frac{F}{2}$$

Le due equazioni cardinali per l'intero sistema ci hanno permesso di trovare due delle sei incognite

Per procedere è necessario usare il <u>metodo di scomposizione</u>

È necessario sconnettere i corpi in corrispondenza di C



consideriamo il corpo (2) e scriviamo la 2ª eq. cardinale rispetto al polo B

$$-\Phi_{C,x}^{1-2}\,\ell + \frac{F\ell}{2} = 0 \longrightarrow \Phi_{C,x}^{1-2} = \frac{F}{2}$$

dalla 1ª eq. cardinale sempre per il corpo (2) si ha

$$\begin{cases} \Phi_{B,x} + \Phi^{1-2}_{C,x} - F = 0 \\ \Phi_{B,y} + \Phi^{1-2}_{C,y} = 0 \end{cases}$$

$$\Phi_{B,x} = \frac{F}{2}$$

$$\Phi^{1-2}_{C,y} = -\frac{F}{2}$$

infine da

$$\Phi_{A,x} = -\Phi_{B,x} \quad \text{(trovata prima)}$$

si ha

$$\Phi_{A,x} = -\frac{F}{2}$$

In definita abbiamo ottenuto

$$\Phi_{A,x} = -\frac{F}{2}, \quad \Phi_{A,y} = \frac{F}{2}$$

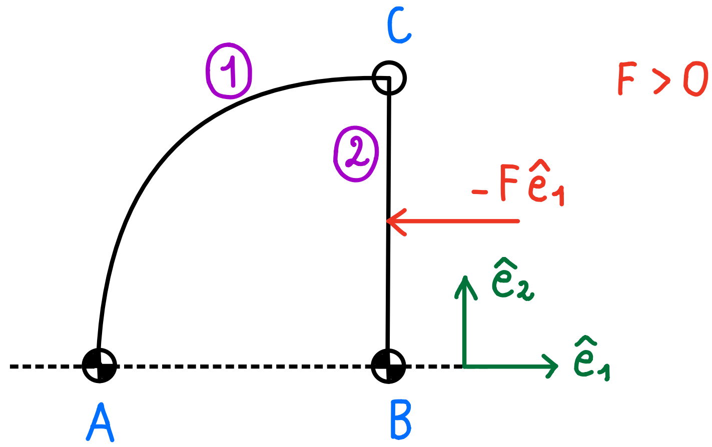
$$\Phi_{B,x} = \frac{F}{2}, \quad \Phi_{B,y} = \frac{F}{2}$$

$$\Phi^{1-2}_{C,x} = \frac{F}{2}, \quad \Phi^{1-2}_{C,y} = -\frac{F}{2}$$

$$\Phi^{2-1}_{C,x} = -\frac{F}{2}, \quad \Phi^{2-1}_{C,y} = \frac{F}{2}$$

Mostriamo ora il <u>metodo di risoluzione grafica</u>

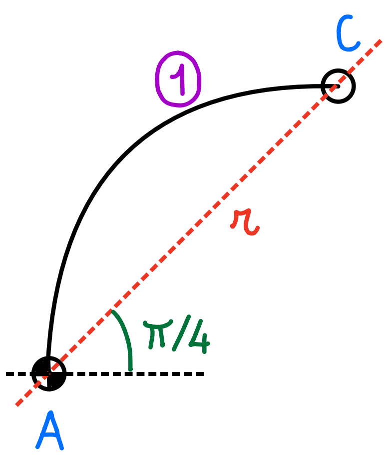
per farlo, consideriamo un sistema su cui agisce una sola forza esterna attiva



definiamo come <u>corpo scarico</u> un corpo su cui non agiscono forze esterne attive

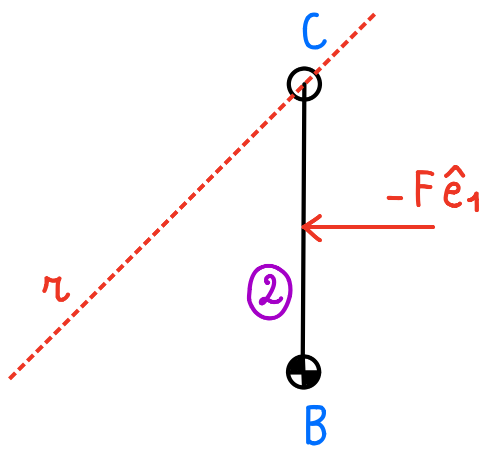
il corpo 1 è scarico

partiamo dal corpo scarico

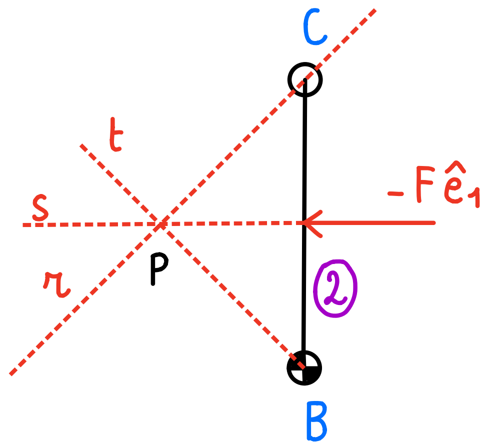


affinché 1 sia in equilibrio, in A e in C devono agire due forze direttamente opposte (eventualmente nulle)

passiamo al corpo 2



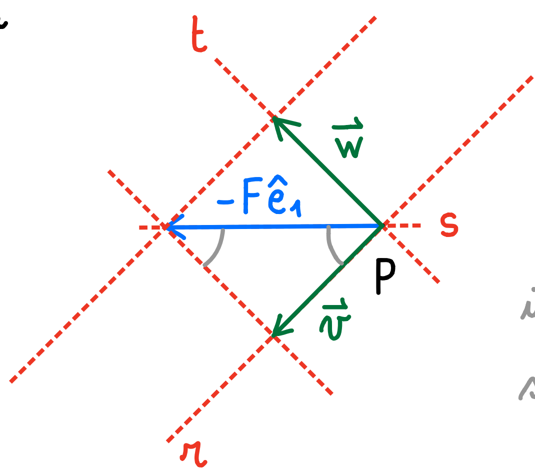
per il principio di azione e reazione la forza che agisce in C sul corpo 2, se non è nulla, è diretta come la retta r passante per A notiamo che la reazione che agisce in C su (2) deve essere diversa da zero altrimenti la reazione in B e $-F\hat{e}_1$ non possono costituire un sistema di forze equilibrato



prolunghiamo la retta di applicazione di $-F\hat{e}_1$ (chiamiamo questa retta s)

le due rette r ed s si intersecano in P, allora la retta di applicazione della reazione in B deve passare per P affinché il corpo (2) sia in equilibrio

Il metodo si conclude costruendo il triangolo delle forze



i due angoli indicati sono uguali a $\pi/4$

applichiamo $-F\hat{e}_1$ in P e lo scomponiamo lungo le rette r e t ottenendo $\vec{v}$ e $\vec{w}$

Allora si avrà

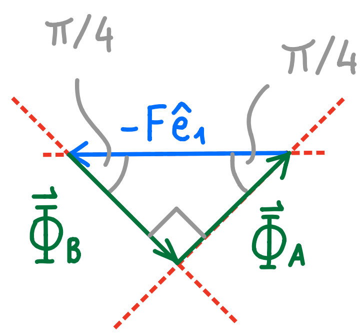
$$\vec{v} = -\vec{\Phi}_C^{1-2}$$

$$\vec{w} = -\vec{\Phi}_B$$

inoltre

$$-\vec{\Phi}_C^{1-2} = \vec{\Phi}_C^{2-1} = -\vec{\Phi}_A$$

Il triangolo delle forze si ottiene dal disegno precedente e tenendo conto delle considerazioni appena fatte



dalla geometria possiamo ottenere le componenti di tali vettori

$$|\vec{\Phi}_B| = F\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad |\vec{\Phi}_A| = F\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\Phi_{B,x} = F\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{F}{2}, \quad \Phi_{B,y} = -F\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{F}{2}$$

$$\Phi_{A,x} = \frac{F}{2}, \quad \Phi_{A,y} = \frac{F}{2} \qquad \vec{\Phi}_C^{1-2} = \vec{\Phi}_A$$