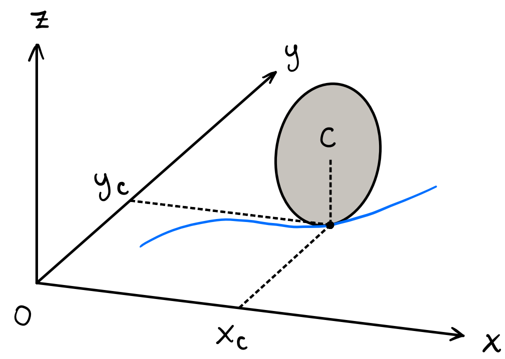
ESEMPIO di VINCOLO ANOLONOMO

un disco che rotola senza strisciare su un piano



l'insieme delle configurazioni del disco in un riferimento fisso $\Sigma = Oxyz$ può essere descritto attraverso le coordinate di un suo punto, per esempio il centro del disco

$$\vec{x}_c = (x_c, y_c, z_c)^T$$

e dall'orientazione di un riferimento solidale $\Sigma' = O'x'y'z'$ rispetto ad uno fisso che a sua volta può essere definita da tre angoli di Eulero

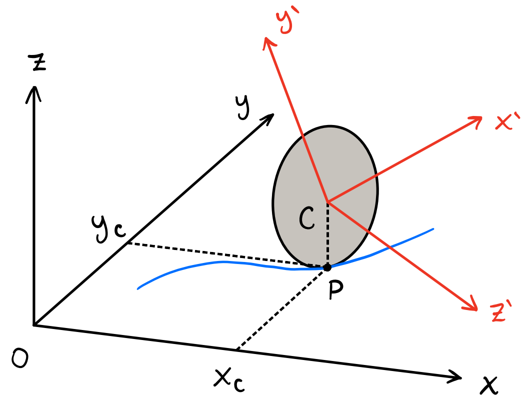
$$\vec{\alpha} = (\alpha, \beta, \gamma)^T$$

Allora la posizione di un qualsiasi punto del disco nel riferimento fisso è data da

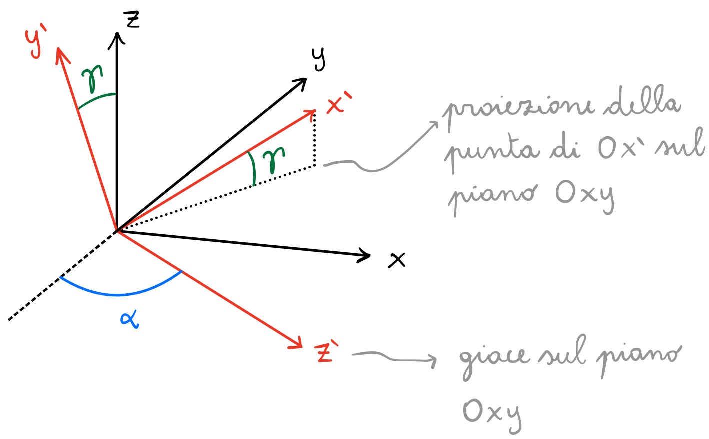
$$\vec{x} = \vec{x}_c + R(\vec{\alpha})\vec{x}'$$

dove $R(\vec{\alpha})$ è la matrice di rotazione da Σ' a Σ e $\vec{x}'$ è la posizione di $\vec{x} - \vec{x}_c$ espressa in Σ'

Introduciamo un riferimento solidale $C x' y' z'$ con $C z'$ perpendicolare al disco



Notiamo che $C z'$ durante il moto rimane perpendicolare all'asse Oz. Cerchiamo la sequenza di rotazioni che porta Σ in Σ'. Per comodità spostiamo C in O:



La sequenza di rotazioni elementari che porta Σ in Σ' si ricostruisce dal disegno:

- ruoto Σ di $\pi/2$ attorno ad Ox
- ruoto il riferimento così ottenuto di α attorno al nuovo asse y

- ruoto attorno all'asse Oz' di γ

In particolare uno dei tre angoli di Eulero è uguale a $\pi/2$.

I vincoli a cui è soggetto il disco sono

1) $z_C - r = 0$
2) $\beta - \pi/2 = 0$
3) vincolo di puro rotolamento $\vec{v}_P = \vec{0}$

Definito $\vec{x} = (x_C, y_C, z_C, \alpha, \beta, \gamma)^T$, le prime due condizioni si possono scrivere come

$$\psi(\vec{x}) = 0$$

con $\psi : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\psi = (z_C - r, \beta - \pi/2)^T$$

Si ha che

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 2. Dunque

$$C = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^6 : \psi(\vec{x}) = 0 \}$$

definisce una sottovarietà di $\mathbb{R}^6$ di dimensione

$$n = 6 - 2 = 4$$

Possiamo introdurre

$$\vec{y} = (x_C, y_C, \alpha, \gamma)$$

Chiediamoci ora se la condizione 3), cioè il puro rotolamento, impone un vincolo sulle componenti di $\vec{y}$.

Data una configurazione di partenza $\vec{y}_0$ il disco può in effetti raggiungere una qualsiasi altra configurazione $\vec{y}$, in quanto il punto di contatto ha a disposizione infiniti percorsi. Si conclude che il vincolo di puro rotolamento non impone nessuna restrizione sulle componenti di $\vec{y}$.

Possiamo allora affermare che l'insieme delle posizioni è dato dalla varietà delle configurazioni C definita prima sulla quale possiamo introdurre delle coordinate lagrangiane

$$\vec{q} = (x_c, y_c, \alpha, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^1$$

Le velocità virtuali (che coincidono con quelle possibili) si scrivono come

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial x_c} \dot{x}_c + \frac{\partial \vec{X}}{\partial y_c} \dot{y}_c + \frac{\partial \vec{X}}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial \vec{X}}{\partial \gamma} \dot{\gamma}$$

dove $\vec{X}$ è la posizione di un punto generico del disco.

Vediamo ora che <u>non tutte</u> le velocità virtuali sono accessibili e quindi il caso del disco che rotola senza strisciare su un piano rappresenta un <u>vincolo anolonomo</u>

In effetti per il puro rotolamento deve essere

$$\vec{v}_c = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times (\vec{X}_c - \vec{X}_P)$$
$$= \vec{\omega} \times (\vec{X}_c - \vec{X}_P)$$

con P punto di contatto. Dunque

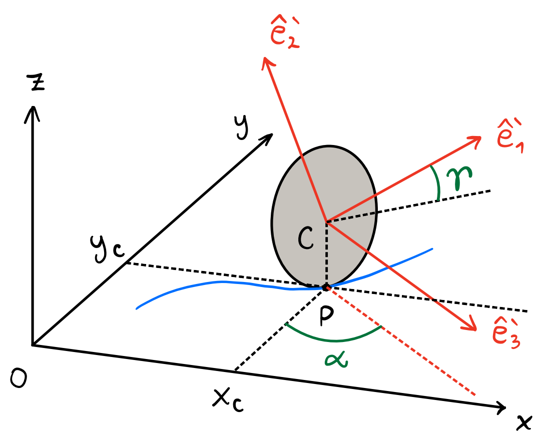
$$\vec{X}_c = x_c \hat{e}_1 + y_c \hat{e}_2 + r \hat{e}_3$$
$$\vec{X}_P = x_c \hat{e}_1 + y_c \hat{e}_2$$

dove $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ è la base del riferimento Σ,

$$\vec{v}_c = \dot{x}_c \hat{e}_1 + \dot{y}_c \hat{e}_2$$
$$\vec{X}_c - \vec{X}_P = r \hat{e}_3$$

Inoltre, introdotta la base $\{\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3'\}$ di Σ'

$$\vec{\omega} = -\dot{\alpha}\, \hat{e}_3 + \dot{\gamma}\, \hat{e}_3'$$



si ha che $\hat{e}_3' = \cos\alpha\, \hat{e}_1 - \operatorname{sen}\alpha\, \hat{e}_2$

Risulta

$$\vec{\omega} = (\dot{\gamma} \cos\alpha)\,\hat{e}_1 - (\dot{\gamma}\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,\hat{e}_2 - \dot{\alpha}\,\hat{e}_3$$

Proiettando $\vec{v}_c = \vec{\omega} \times (\vec{X}_C - \vec{X}_P)$ lungo $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ si ottiene

$$\begin{cases} \dot{x}_c = -\dot{\gamma}\, r\, \mathrm{sen}\,\alpha \\ \dot{y}_c = -\dot{\gamma}\, r \cos\alpha \end{cases}$$

che sono due vincoli che coinvolgono le velocità lagrangiane $\dot{x}_c, \dot{y}_c, \dot{\gamma}$. Allora dato un punto $\vec{x}$ della varietà delle configurazioni C non tutti i vettori tangenti a C in $\vec{x}$ (vedi qui) sono accessibili