Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
15 Novembre 2018
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1
Si consideri la lagrangiana

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 + q^2 - q), \qquad q, \dot{q} \in \mathbb{R}.$$

i) Trovare la soluzione $t \mapsto \bar{\gamma}(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\bar{\gamma}(0) = 1, \qquad \dot{\bar{\gamma}}(0) = 0.$$

ii) Mostrare che, per ogni $T > 0$, la soluzione $\bar{\gamma}$ è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^T L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt$$

nella classe di funzioni $C^1([0,T],\mathbb{R})$.

iii) Fissato $T > 0$, calcolare la *slope function* $\mathcal{P}(t,q)$ del campo di estremali $\{\gamma_\alpha(t)\}_\alpha$ definito sulla striscia $\{(t,\alpha) : t \in (0,T), \alpha \in \mathbb{R}\}$ dalle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma_\alpha(0) = 1, \qquad \dot{\gamma}_\alpha(0) = \alpha.$$

iv) Scrivere le equazioni di Carathéodory e calcolare la funzione iconale $S(q,t)$.

Esercizio 2
Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 + \frac{1}{8}|\mathbf{q}|^2 + \frac{1}{2}(p_1 q_2 - q_1 p_2),$$

con $\mathbf{p} = (p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1,q_2) \in \mathbb{R}^2$.

i) Completare le relazioni

$$q_1 = Q_2 \cos Q_1,$$
$$q_2 = Q_2 \sin Q_1$$

ad una trasformazione canonica

$$(\mathbf{p},\mathbf{q}) \xrightarrow{\mathbf{\Psi}} (\mathbf{P},\mathbf{Q}),$$

con $\mathbf{P} = (P_1,P_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{Q} = (Q_1,Q_2) \in S^1 \times \mathbb{R}^+$, usando una funzione generatrice $S(\mathbf{q},\mathbf{P})$ omogenea di grado 1 nelle $\mathbf{P}$ e scrivere la funzione di Hamilton nelle variabili $\mathbf{P},\mathbf{Q}$.

ii) Trovare due integrali primi indipendenti per il campo vettoriale hamiltoniano X_H.

iii) Mostrare che le coordinate polari (Q_1,Q_2) sono variabili separabili per l'equazione di Hamilton-Jacobi associata a $K = H \circ \mathbf{\Psi}^{-1}$.

Secondo compitino di Istituzioni di Fisica Matematica
19 Dicembre 2018
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1
Siano date le funzioni

$$H_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 + p_1(q_1+q_2), \qquad H_2(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 + p_2(q_1+q_2),$$

con $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$.

i) Trovare le soluzioni dei sistemi hamiltoniani per H_1, H_2 in corrispondenza alle condizioni iniziali

$$p_1(0) = 1, \qquad p_2(0) = 1, \qquad q_1(0) = 1, \qquad q_2(0) = -1.$$

ii) Trovare una trasformazione canonica

$$(\mathbf{p},\mathbf{q}) \stackrel{\mathbf{\Psi}}{\to} (\mathbf{P},\mathbf{Q}),$$

con $\mathbf{P} = (P_1, P_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^2$, tale che Q_2 sia ciclica per l'hamiltoniana $H = \{H_1, H_2\}$ e determinare due integrali primi in involuzione e indipendenti su $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ per il sistema hamiltoniano definito da H.

iii) Scrivere un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione $K = H \circ \mathbf{\Psi}^{-1}$.

iv) Trovare un sottoinsieme $\mathcal{I}$ di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, invariante per entrambi X_{H_1}, X_{H_2}, tale che i flussi $\mathbf{\Phi}^t_{H_1}$, $\mathbf{\Phi}^t_{H_2}$ ristretti ad $\mathcal{I}$ commutino.

Esercizio 2
Si consideri la hamiltoniana

$$H_\epsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \frac{1}{2} I_2^2 + \epsilon f(\varphi_1, \varphi_2),$$

con $\omega_1 > 0$, e

$$f(\varphi_1, \varphi_2) = \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) - \sin(\varphi_1 - 2\varphi_2),$$

definita per $(I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$.

i) Trovare la forma normale risonante di H_ϵ relativa alla risonanza singola definita da $k = (1, -2)$. Scrivere anche l'espressione della funzione generatrice χ che definisce la trasformazione canonica Φ^ϵ_χ usata per passare a tale forma normale.

ii) Descrivere l'andamento delle variabili di azione I_1, I_2 al primo ordine in ϵ all'interno della risonanza considerata e mostrare che in questo caso vale il principio della media.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
17 Gennaio 2019
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1
Data la funzione di Lagrange

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q), \quad V(q) = -\cos q, \qquad\qquad q, \dot{q} \in \mathbb{R}$$

si consideri la soluzione $\gamma(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per $L(q, \dot{q})$ con condizioni iniziali

$$q(0) = \frac{\pi}{3}, \qquad \dot{q}(0) = 1.$$

Trovare un valore $\bar{t} > 0$ del tempo tale che nell'intervallo $(0, \bar{t})$ non ci siano valori coniugati a $t = 0$.

Esercizio 2
Consideriamo le equazioni di Hamilton con hamiltoniana $H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$, dove

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 + V(|\mathbf{q}|)$$

e $V : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^2.

i) Mostrare che le relazioni

$$\mathbf{P} = R_t\mathbf{p}, \quad \mathbf{Q} = R_t\mathbf{q}, \qquad R_t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}. \tag{1}$$

definiscono una trasformazione canonica dipendente dal tempo e scrivere la nuova hamiltoniana $\mathcal{H}$ e il sistema hamiltoniano associato nelle variabili $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$.

ii) Mostrare che la funzione $\mathbf{P} \cdot J\mathbf{Q}$ è un integrale primo del sistema hamiltoniano del punto i).

iii) Usando la trasformata di Legendre scrivere la lagrangiana $\mathcal{L}$ corrispondente ad $\mathcal{H}$ nelle coordinate $\mathbf{Q}$.

Esercizio 3
Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = I_1 + I_2 + \epsilon(I_1^2 + I_2^2)\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2),$$

con $0 < \epsilon \ll 1$, $(I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$.

i) Trovare due integrali primi del sistema hamiltoniano.

ii) Trovare una trasformazione di coordinate canonica

$$(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) \xrightarrow{\Psi} (J_1, J_2, \theta_1, \theta_2),$$

con $J_j = J_j(I_1, I_2), \theta_j = \theta_j(\varphi_1, \varphi_2)$ funzioni lineari omogenee, $j = 1, 2$, tale che la variabile angolo θ_1 sia ciclica nella funzione di Hamilton per la dinamica nelle nuove coordinate.

iii) Date le condizioni iniziali

$$I_1(0) = 1, \;\; I_2(0) = -1, \;\; \varphi_1(0) = 0, \;\; \varphi_2(0) = 0,$$

mostrare che le azioni I_1, I_2 sono funzioni monotone del tempo t per $t \geq 0$.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
8 Febbraio 2019
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1
Data la funzione di Lagrange

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}\dot q^2 - V(q), \quad V(q) = -\cos q, \qquad\qquad q,\dot q \in \mathbb{R}$$

si consideri la soluzione $\gamma(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per $L(q,\dot q)$ con condizioni iniziali

$$q(0) = \frac{\pi}{4}, \qquad \dot q(0) = 1.$$

Dimostrare che esiste un valore positivo del tempo $\bar t < +\infty$ coniugato a $t = 0$.[1]

Esercizio 2
Consideriamo l'hamiltoniana $H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_1^2 + q_2^2,$$

dove $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$.

i) Trovare tre integrali del moto diversi da H che siano indipendenti tra loro nel dominio di H e dire se sono in involuzione.

ii) Calcolare il flusso integrale $\mathbf{\Phi}^t(\mathbf{p},\mathbf{q})$ delle equazioni di Hamilton associate ad H e verificare che, per ogni $\bar t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{\Phi}^{\bar t}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ definisce una trasformazione canonica.

iii) Dimostrare che la trasformazione $\mathbf{\Psi}$ dipendente dal tempo e definita da

$$(\mathbf{p},\mathbf{q},t) \overset{\mathbf{\Psi}}{\to} (\mathbf{\Phi}^t(\mathbf{p},\mathbf{q}),t)$$

è canonica trovandone una opportuna funzione generatrice.

Esercizio 3
Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi}) = I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + 2\epsilon[\sin 2\varphi_1 \cos\varphi_2 + I_1^2\cos^2(2\varphi_1 - \varphi_2)],$$

dove

$$\mathbf{I} = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2, \qquad \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1,\varphi_2) \in \mathbb{T}^2, \qquad 0 < \epsilon \ll 1.$$

Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi}) \overset{\Psi_\epsilon}{\to} (\tilde{\mathbf{I}},\tilde{\boldsymbol{\varphi}})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ al primo ordine in ϵ. Scrivere inoltre la forma normale non risonante.

[1] *Suggerimento:* ragionare per assurdo assumendo che un tale valore di $\bar t$ non esista.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

18 Giugno 2019

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1
Si consideri la lagrangiana

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}\dot q^2 + q\dot q + q^2 - q\sin t, \qquad q,\dot q \in \mathbb{R}.$$

i) Trovare la soluzione $t \mapsto \bar\gamma(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\bar\gamma(0) = 1, \qquad \dot{\bar\gamma}(0) = 0.$$

ii) Mostrare che, per ogni $T > 0$, la soluzione $\bar\gamma$ è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^T L(\gamma(t),\dot\gamma(t))dt$$

nella classe di funzioni $C^1([0,T],\mathbb{R})$.

iii) Fissato $T > 0$, calcolare la *slope function* $\mathcal{P}(t,q)$ del campo di estremali $\{\gamma_\alpha(t)\}_\alpha$ definito sulla striscia $\{(t,\alpha) : t \in (0,T), \alpha \in \mathbb{R}\}$ dalle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma_\alpha(0) = 1, \qquad \dot\gamma_\alpha(0) = \alpha.$$

Esercizio 2
Si consideri la trasformazione $\Psi : (p,q,t) \to (P,Q,t)$ che dipende dai parametri reali α, ω, β, γ, definita da

$$\begin{cases} P = e^{-\alpha t}[p\cos(\omega t) + q\sin(\omega t)], \\ Q = e^{\alpha t}[\beta\, p\sin(\omega t) + \gamma\, q\cos(\omega t)], \end{cases}$$

dove p, q, P, Q, $t \in \mathbb{R}$.

i) Trovare tutti i valori di α, ω, β, γ che rendono Ψ canonica univalente.

ii) Per i valori di ω, β, γ trovati in i) e per $\alpha = 1$ estendere Ψ ad una trasformazione canonica

$$\tilde\Psi : (p,e,q,t) \to (P,\mathcal{E},Q,t),$$

dove P, Q sono dati da Ψ, ed e, $\mathcal{E}$ sono nuove variabili coniugate al tempo.

Esercizio 3
Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(I,\varphi) = h(I) + \epsilon f(I,\varphi),$$

con

$$h(I) = I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + I_3\omega_3,$$
$$f(I,\varphi) = I_1 I_2[\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin\varphi_1 \sin(2\varphi_2 - \varphi_3)],$$

dove

$$I = (I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3, \quad \omega_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ i = 1,2,3, \quad \epsilon \ll 1.$$

i) Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I,\varphi) \xrightarrow{\Psi_\epsilon} (\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ϵ. Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione.

ii) Scrivere la forma normale risonante al primo ordine in ϵ nel caso $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = 3$ e trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per il sistema hamiltoniano definito da tale forma normale risonante troncata al primo ordine in ϵ.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

19 Luglio 2019

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1
Si consideri la lagrangiana

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + q\dot{q} + q^2 - q\sin t, \qquad q,\dot{q} \in \mathbb{R}.$$

i) Trovare la soluzione $t \mapsto \bar{\gamma}(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\bar{\gamma}(0) = 1, \qquad \dot{\bar{\gamma}}(0) = 0.$$

ii) Mostrare che, per ogni $T > 0$, la soluzione $\bar{\gamma}$ è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^T L(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))dt$$

nella classe di funzioni $C^1([0,T],\mathbb{R})$.

iii) Fissato $T > 0$, calcolare la *slope function* $\mathcal{P}(t,q)$ del campo di estremali $\{\gamma_\alpha(t)\}_\alpha$ definito sulla striscia $\{(t,\alpha) : t \in (0,T), \alpha \in \mathbb{R}\}$ dalle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma_\alpha(0) = 1, \qquad \dot{\gamma}_\alpha(0) = \alpha.$$

Esercizio 2
Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton:

$$H(p_1,p_2,q_1,q_2) = (p_1 - kq_2)^2 + (p_2 + kq_1)^2,$$

con $p_1,p_2,q_1,q_2 \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$ costante.
Si utilizzi il metodo di Hamilton-Jacobi per trovare il moto $q_1(t)$, $q_2(t)$ in corrispondenza delle condizioni iniziali $p_{10},p_{20},q_{10},q_{20}$ al tempo 0.

Esercizio 3
Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(I,\varphi) = h(I) + \epsilon f(I,\varphi),$$

con

$$h(I) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2,$$
$$f(I,\varphi) = I_1 I_2[\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin\varphi_1 \sin(2\varphi_2)],$$

dove

$$I = (I_1,I_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi = (\varphi_1,\varphi_2) \in \mathbb{T}^2, \quad \omega_1,\omega_2 \neq 0, \quad \epsilon \ll 1.$$

i) Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I, \varphi) \xrightarrow{\Psi_\epsilon} (\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ϵ. Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione.

ii) Scrivere la forma normale risonante al primo ordine in ϵ nel caso $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1$ e trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per il sistema hamiltoniano definito da tale forma normale risonante troncata al primo ordine in ϵ.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

15 Novembre 2019

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1
Si consideri la lagrangiana

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}\dot q^2 - V(q), \qquad V(q) = -\frac{1}{1+q} - \frac{1}{1-q},$$

con $-1 < q < 1$, $\dot q \in \mathbb{R}$.

i) Consideriamo la soluzione $t \mapsto \gamma(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma(0) = 0, \qquad \dot\gamma(0) = 2.$$

Mostrare che $\gamma(t)$ è monotona crescente e trovare gli estremi t_1, t_2 del suo intervallo massimale di definizione.

ii) Mostrare che per ogni tempo τ, con $0 < \tau < t_2$, la soluzione $\gamma(t)$ è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^\tau L(\gamma(t), \dot\gamma(t))dt$$

nella classe di funzioni $C^1([0,\tau], \mathbb{R})$.

iii) Calcolare la funzione eccesso di Weierstrass per L e mostrare che per ogni tempo τ, con $0 < \tau < t_2$, la soluzione $\gamma(t)$ è anche un minimo forte per il funzionale $\mathcal{A}$ nella classe $C^1([0,\tau], \mathbb{R})$.

Esercizio 2
Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q},t) = (1+t^2)^2\left(|\mathbf{p}|^2 - \frac{|\mathbf{q}|^2}{q_1^2 q_2^2}\right) + \frac{2t}{1+t^2}\mathbf{p}\cdot\mathbf{q},$$

con $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $t \in \mathbb{R}$.

i) Scrivere le componenti del campo vettoriale hamiltoniano

$$X_K = \Psi_* X_H,$$

dove

$$(\mathbf{p},\mathbf{q},t) \xrightarrow{\Psi} (\mathbf{P},\mathbf{Q},t),$$

con $\mathbf{P} = (P_1, P_2)$, $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2)$, è la trasformazione canonica univalente dipendente dal tempo definita dalla funzione generatrice

$$S(\mathbf{q},\mathbf{P},t) = \frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{P}}{1+t^2}.$$

ii) Calcolare un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla nuova hamiltoniana K.

Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica
18 Dicembre 2019
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1
Si considerino le due funzioni hamiltoniane

$$H_1 = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2}\left(1 + \frac{1}{q_1^2 q_2^2}\right), \qquad H_2 = \frac{q_1^4 + q_2^4}{q_1^2 q_2^2} + (q_1 p_2 - q_2 p_1)^2,$$

dove $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}_*^2$ con $\mathbb{R}_* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

i) Scrivere le espressioni dei campi hamiltoniani X_{H_1}, X_{H_2} e mostrare che i flussi corrispondenti Φ_1^t, Φ_2^t commutano.

ii) Trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per ciascuno dei sistemi hamiltoniani definiti da H_1 e H_2.

Esercizio 2
Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2} I_1^2 - I_2 - \epsilon \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

dove $\boldsymbol{I} = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$ sono variabili azione-angolo.

i) Usare il metodo di Lie per trovare una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}) \stackrel{\mathcal{C}_\epsilon^{-1}}{\to} (\tilde{\boldsymbol{I}}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}})$$

tale che la hamiltoniana $\tilde{H}_\epsilon = H_\epsilon \circ \mathcal{C}_\epsilon$ non dipenda da $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ al primo ordine in ϵ. Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione fino al secondo ordine in ϵ incluso.

ii) Mostrare che le variabili di azione I_1, I_2 compiono oscillazioni di ampiezza di ordine $\sqrt{\epsilon}$ attorno a dei valori costanti (quindi, in particolare, il sistema soddisfa il principio della media).

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
28 Gennaio 2020
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1
Si descrivano le traiettorie del moto geodetico di un punto materiale di massa m sulla superficie di equazioni

$$\begin{cases} x = r(z)\cos\varphi \\ y = r(z)\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad r(z) = \exp(-2z^6 + 3z^4 + 1),$$

dove $z \in \mathbb{R}$, $\varphi \in S^1$.

Esercizio 2
Trovare delle condizioni sui coefficienti reali a_1, a_2, b_1, b_2, supposti > 0, delle matrici diagonali costanti

$$A = \mathrm{diag}(a_1, a_2), \qquad B = \mathrm{diag}(b_1, b_2),$$

per cui è possibile estendere le relazioni

$$q_1 = \mathbf{p} \cdot A\mathbf{Q}, \qquad q_2 = \mathbf{p} \cdot B\mathbf{Q},$$

ad una trasformazione canonica univalente

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) = (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mapsto (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = (P_1, P_2, Q_1, Q_2)$$

definita localmente in ogni punto $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ tale che $p_1 p_2 \neq 0$.

Esercizio 3
Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = aI_1^2 + bI_2^2 + cI_3^2 + \epsilon\cos(\varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\varphi_3),$$

con $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3$, $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3$ e $0 < \epsilon \ll 1$.

i) Trovare due integrali primi del sistema hamiltoniano tra loro indipendenti come combinazioni lineari di I_1, I_2, I_3.

ii) Determinare dei valori dei coefficienti a, b, c per cui esistono dei moti del sistema che non soddisfano il principio della media. Trovare esplicitamente questi particolari moti.

iii) Assumendo $a = b = c = 1$, determinare una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I, \varphi) \xrightarrow{\Psi_\epsilon} (\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ϵ. Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

18 Febbraio 2020

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1
Si consideri il problema unidimensionale definito dall'equazione

$$\ddot{x} = -\frac{k}{x} + F, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{1}$$

con k, F costanti positive tali che $kF = 1$.

i) Trovare una lagrangiana L che ha (1) come equazione di Eulero-Lagrange.

ii) Tracciare le curve di livello dell'integrale di Jacobi di questo problema nel piano $(x, \dot{x})$.

iii) Mostrare che la soluzione $\bar{\gamma}(t)$ dell'equazione (1) con condizioni iniziali $x(0) = \sqrt{\frac{k}{F}}$, $\dot{x}(0) = 2$ è illimitata ed è definita per tutti i tempi $t > 0$.

iv) Mostrare che $\bar{\gamma}$ è un minimo debole del funzionale di azione lagrangiana $\mathcal{A}_L$ nell'insieme delle funzioni $C^1([0, t_1]; \mathbb{R})$ per ogni $t_1 > 0$.

Esercizio 2
Completare la relazione

$$P = \arctan q + p(1 + t^2)$$

ad una trasformazione canonica dipendente da t

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (p, q, t) \xrightarrow{\mathbf{\Psi}} (P, Q, t).$$

Estendere poi tale trasformazione ad una trasformazione canonica nello spazio delle fasi esteso, con coordinate (p, e, q, t).

Esercizio 3
Trovare un valore del vettore $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ in modo che il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2}(I_1^2 + I_2^2 - I_3^2) - \varepsilon \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\varphi})$$

con $\boldsymbol{I} = (I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3$, $0 < \varepsilon \ll 1$ non soddisfi il principio della media al primo ordine in ε, descrivendo esplicitamente una famiglia di moti che lo viola.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

9 Giugno 2020

Si consideri la hamiltoniana

$$H_\varepsilon(\mathbf{p},\mathbf{q}) = h(\mathbf{p},\mathbf{q}) + \varepsilon f(\mathbf{p},\mathbf{q})$$

dove

$$h(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}(|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2), \qquad \mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n,\ n \geq 1$$

ed $f(\mathbf{p},\mathbf{q})$ è una funzione regolare.

1) Usando la teoria di Hamilton-Jacobi trovare una trasformazione canonica

$$(\mathbf{p},\mathbf{q}) \overset{\mathbf{\Phi}}{\mapsto} (\boldsymbol{I},\boldsymbol{\varphi})$$

che porti alle variabili azione angolo del sistema di oscillatori armonici definito dalla hamiltoniana $h(\mathbf{p},\mathbf{q})$. Scrivere inoltre l'espressione della funzione $h \circ \mathbf{\Phi}^{-1}$.

2) Nel caso in cui $n = 2$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ ed

$$f(\mathbf{p},\mathbf{q}) = q_1 p_2 - q_2 p_1$$

trovare con il metodo di Lie una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\varphi}) \overset{\mathbf{\Psi}_\varepsilon}{\mapsto} (\tilde{\boldsymbol{I}},\tilde{\boldsymbol{\varphi}})$$

che sposti la dipendenza dagli angoli ad un ordine superiore in ε nella hamiltoniana $(H_\varepsilon \circ \mathbf{\Phi}^{-1}) \circ \mathbf{\Psi}_\varepsilon^{-1}$.

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica

4 Settembre 2020

Si considerino le due funzioni

$$H_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}(|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2), \qquad H_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p_1 q_2 - q_1 p_2,$$

con $\mathbf{p} = (p_1, p_2), \mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$.

i) Si dimostri che i campi vettoriali hamiltoniani $\mathbf{X}_j = \mathbf{X}_{H_j}$, $j = 1, 2$ sono integrabili, trovando per ciascuno una coppia di integrali primi in involuzione e genericamente indipendenti su $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

ii) Si calcolino esplicitamente i flussi $\mathbf{\Phi}_1^t(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $\mathbf{\Phi}_2^t(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ dei campi hamiltoniani $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$.

iii) Mostrare che i flussi $\mathbf{\Phi}_1^t$ e $\mathbf{\Phi}_2^t$ commutano.

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
16 Novembre 2020

i) Completare le relazioni

$$P_1 = p_1 q_1 t, \qquad P_2 = p_2 q_2 t$$

ad una trasformazione canonica dipendente dal tempo

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \xrightarrow{\Psi} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t),$$

con $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= (p_1, p_2) \in (\mathbb{R}^+)^2, \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2) \in (\mathbb{R}^+)^2, \\ \mathbf{P} &= (P_1, P_2) \in (\mathbb{R})^2, \quad \mathbf{Q} = (Q_1, Q_2) \in (\mathbb{R})^2, \end{aligned}$$

usando una funzione generatrice $S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$.

ii) Estendere tale trasformazione ad una trasformazione canonica nello spazio delle fasi esteso

$$(\mathbf{p}, e, \mathbf{q}, t) \xrightarrow{\tilde{\Psi}} (\mathbf{P}, \mathcal{E}, \mathbf{Q}, t),$$

dove $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ sono definiti da Ψ, ed e, $\mathcal{E}$ sono i momenti coniugati a t.

iii) Data la funzione hamiltoniana

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = t^2\big(p_1^2 q_1^2 + p_2^2 q_2^2\big) + \frac{1}{t}\big((1 + p_2 q_2)\log q_2 + p_1 q_1 \log q_1\big)$$

trovare un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla hamiltoniana K coniugata ad H tramite la trasformazione Ψ.

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
17 Dicembre 2020

Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = a(I_1^2 + I_2^2) + bI_1 I_2 + \varepsilon \sin^2(\varphi_1 + 2\varphi_2),$$

con a, $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $(I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$ e $0 < \varepsilon \ll 1$.

i) Determinare dei valori dei coefficienti a, b per cui esistono dei moti del sistema che non soddisfano il principio della media. Trovare esplicitamente questi particolari moti.

ii) Assumendo $a = 1$, $b = 2$, usare il metodo di Lie per trovare una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I, \varphi) \overset{\Psi_\varepsilon}{\to} (\tilde{I}, \tilde{\varphi}),$$

tale che $\tilde{H}_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \Psi_\varepsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ε; scrivere inoltre la forma normale non risonante fino al secondo ordine in ε incluso.

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
19 gennaio 2021

Si considerino le funzioni di Hamilton

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\left[|\mathbf{p}|^2|\mathbf{q}|^2 - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})^2\right] + V(|\mathbf{q}|), \qquad K(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2\right),$$

dove $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ e $V : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^2.

i) Calcolare la parentesi di Lie

$$[X_H, X_K]$$

dei campi vettoriali hamiltoniani associati ad H e K.

ii) Assumendo che

$$V(x) = \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

e che $\mathbf{q} \in (\mathbb{R}\setminus\{0\})^n$, mostrare che il sistema hamiltoniano definito da

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = [X_H, X_K]$$

è integrabile con il metodo di Hamilton-Jacobi.

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
9 febbraio 2021

Si consideri la trasformazione di coordinate dipendente dal tempo

$$(p, q, t) \xrightarrow{\Psi} (P, Q, t)$$

con

$$p, q \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad P = S_t^{-1} p, \quad Q = S_t q, \quad S_t = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}.$$

i) Dimostrare che Ψ è canonica.

ii) Estendere Ψ ad una trasformazione canonica

$$(p, e, q, t) \xrightarrow{\tilde{\Psi}} (P, \mathcal{E}, Q, t)$$

definita sullo spazio delle fasi esteso, in cui P, Q sono date da Ψ, ed e, $\mathcal{E} \in \mathbb{R}$ sono nuove variabili, coniugate al tempo.

iii) Scrivere nelle variabili $(P, \mathcal{E}, Q, t)$ definite da $\tilde{\Psi}$ il campo vettoriale

$$X = (q_1,\, -q_2,\, 0,\, p_1,\, -p_2,\, 1)^T,$$

dove $(p_1, p_2)^T = p$, $(q_1, q_2)^T = q$.

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
18 giugno 2021

Si consideri la trasformazione di coordinate dipendente dal tempo

$$(p, q, t) \xrightarrow{\Psi} (P, Q, t)$$

con

$$\begin{aligned} P &= \sin q + f(q, t), \\ Q &= q^2 + pq(1 + t), \end{aligned}$$

dove $f(q, t)$ è una funzione di classe C^2 in qualche dominio $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$ e $p \in \mathbb{R}$.

i) Determinare la funzione $f(q, t)$ ed il dominio $\mathcal{D}$ in modo che la trasformazione Ψ sia canonica univalente.

ii) Si trovi una funzione generatrice della Ψ.

iii) Scrivere le componenti del campo vettoriale hamiltoniano

$$X_K = \Psi_* X_H,$$

dove

$$H(p, q, t) = \ln q \left(q^2 - \frac{1}{1 + t} \right) - \frac{q^2}{2}.$$

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
23 Luglio 2021

Si consideri una trasformazione di coordinate dipendente dal tempo

$$(p, q, t) \xrightarrow{\Psi} (P, Q, t)$$

con

$$\begin{aligned} P &= \sin q + f(q, t), \\ Q &= q^2 + pq(1 + t), \end{aligned}$$

definita nel dominio

$$\mathcal{D} = \{(p, q, t) : p \in \mathbb{R}, q > 0, t > -1\},$$

dove $f(q, t)$ è una funzione di classe C^2.

i) Determinare una funzione $f(q, t)$ in modo che la trasformazione Ψ sia canonica univalente.

ii) Trovare una funzione generatrice della trasformazione Ψ.

iii) Scrivere le componenti del campo vettoriale hamiltoniano

$$X_K = \Psi_* X_H,$$

dove

$$H(p, q, t) = \log q \left(q^2 - \frac{1}{1 + t} \right) - \frac{q^2}{2}.$$

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
21 Settembre 2021

Sia dato il sistema dinamico conservativo descritto dalla lagrangiana

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \frac{\dot{q}_2^2}{1+q_1^2}\right) - (1+q_1^2)(1+q_2^2).$$

con $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ e $(\dot{q}_1, \dot{q}_2) \in \mathbb{R}^2$.

i) Trovare la hamiltoniana del sistema.

ii) Scrivere l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione caratteristica W e dimostrare che le variabili q_1, q_2 sono separabili.

iii) Trovare un integrale completo $W(q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2)$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, dell'equazione di Hamilton-Jacobi.

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
17 Novembre 2021

Esercizio 1
Si consideri la hamiltoniana

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \frac{t}{2}|\mathbf{p}|^2 + \frac{1}{2t}(|\mathbf{q}|^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q})$$

con $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$.

i) Completare le relazioni

$$Q_1 = \frac{q_1^2}{2t}, \qquad Q_2 = \frac{q_2^2}{2t}$$

ad una trasformazione canonica dipendente dal tempo

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \xrightarrow{\Psi} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t),$$

con $\mathbf{P} = (P_1, P_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^2$, e scrivere la hamiltoniana K coniugata ad H tramite la trasformazione Ψ.

ii) Trovare un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla hamiltoniana K.

iii) Determinare due integrali primi indipendenti per il campo vettoriale X_H.

Esercizio 2
Si consideri la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q), \qquad V(q) = q^2 \log q$$

con $q > 0$, $\dot{q} \in \mathbb{R}$.

i) Tracciare il ritratto di fase delle equazioni di Eulero-Lagrange per L.

ii) Mostrare che la soluzione $\bar{\gamma}(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange con condizioni iniziali

$$\bar{\gamma}(0) = e^{-1/2}, \qquad \dot{\bar{\gamma}}(0) = (1/e - 1/3)^{1/2}$$

è una funzione periodica tale che

$$\bar{\gamma}(t) > 1/e, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

iii) Mostrare che esiste un valore τ_* del tempo t per cui $\bar{\gamma}(t)$ non può essere un minimo debole del funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}_L(\gamma) = \int_0^{\tau_*} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt.$$

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
17 dicembre 2021

Esercizio 1
Si considerino le due funzioni hamiltoniane

$$H_1 = p_1 q_2 - p_2 q_1, \qquad H_2 = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{q},$$

dove $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$.

i) Calcolare i flussi integrali Φ_1^t, Φ_2^t delle equazioni di Hamilton associate ad H_1 e H_2.

ii) Mostrare che i flussi Φ_1^t, Φ_2^t commutano.

iii) Trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per ciascuno dei sistemi hamiltoniani definiti da H_1 e H_2.

Esercizio 2
Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(I, \varphi) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + 2\varepsilon[\sin 2\varphi_1 \cos\varphi_2 + I_1^2 \cos^2(2\varphi_1 - \varphi_2)],$$

dove $I = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$ sono variabili azione-angolo e $(\omega_1, \omega_2) \neq (0, 0)$.

Usare, quando è possibile, il metodo di Lie per trovare una la funzione generatrice χ di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}) \overset{\mathcal{C}_\varepsilon^{-1}}{\to} (\tilde{\boldsymbol{I}}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}})$$

tale che la hamiltoniana $\tilde{H}_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \mathcal{C}_\varepsilon$ non dipenda da $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ al primo ordine in ε. Scrivere inoltre al primo ordine in ε la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione.

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
27 gennaio 2022

Esercizio 1
Si consideri la lagrangiana

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}\dot q^2 + q\dot q - q\sin t, \qquad q,\dot q \in \mathbb{R}.$$

i) Trovare la soluzione $t \mapsto \bar\gamma(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\bar\gamma(0) = 1, \qquad \dot{\bar\gamma}(0) = 0.$$

ii) Mostrare che, per ogni $T > 0$, la soluzione $\bar\gamma$ è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^T L(\gamma(t),\dot\gamma(t))dt$$

nella classe di funzioni $C^1([0,T],\mathbb{R})$.

iii) Fissato $T > 0$, calcolare la *slope function* $\mathcal{P}(t,q)$ del campo di estremali $\{\gamma_\alpha(t)\}_\alpha$ definito sulla striscia $\{(t,\alpha) : t \in (0,T), \alpha \in \mathbb{R}\}$ dalle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma_\alpha(0) = 1, \qquad \dot\gamma_\alpha(0) = \alpha.$$

Esercizio 2
Si consideri un punto materiale P di massa m che si muove nello spazio soggetto al campo di forze derivabile dall'energia potenziale

$$V(x,y,z) = \frac{k}{x^2+y^2} - Fz,$$

con $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ coordinate di P rispetto ad un sistema di riferimento fissato, e $k > 0$, $F > 0$ parametri reali.

i) Si dimostri che le coordinate cilindriche $(r,z,\varphi) \in (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})$ sono separabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi di questo sistema meccanico.

ii) Trovare un integrale completo di tale equazione.

Esercizio 3
Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(I,\varphi) = h(I) + \epsilon f(I,\varphi),$$

con

$$\begin{aligned} h(I) &= \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3, \\ f(I,\varphi) &= 2I_1[I_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\cos\varphi_3 + I_3\sin(\varphi_1-\varphi_2+\varphi_3)], \end{aligned}$$

dove

$$I = (I_1,I_2,I_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi = (\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) \in \mathbb{T}^3, \quad \omega_1,\omega_2,\omega_3 \neq 0, \quad \epsilon \ll 1.$$

i) Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I, \varphi) \xrightarrow{\Psi_\epsilon} (\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ϵ. Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione.

ii) Scrivere la forma normale risonante al primo ordine in ϵ nel caso $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 1$ e trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per il sistema hamiltoniano definito da tale forma normale risonante troncata al primo ordine in ϵ.

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
18 febbraio 2022

Esercizio 1
Si consideri la lagrangiana

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - y.$$

i) Trovare la soluzione $[0, 1] \ni t \mapsto \bar{\gamma}(t) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni al bordo

$$\bar{\gamma}(0) = (0, 0), \qquad \bar{\gamma}(1) = (1, 0) \tag{1}$$

e calcolarne il valore dell'energia $\bar{e}$.

ii) Scrivere l'espressione del funzionale di Maupertuis, definito sulla classe $\Gamma_{\bar{e}}$ delle curve variate asincrone, il cui grafico si può scrivere nella forma $(x, y(x))$, con gli stessi estremi (1) e la stessa energia $\bar{e}$ di $\bar{\gamma}$. Scrivere inoltre il funzionale nella forma

$$\mathcal{J}_L(\gamma) = \int_0^1 f(y(x); \bar{e})\sqrt{1 + y'^2(x)}dx$$

per una qualche funzione f.

iii) Trovare l'espressione dell'arco rettilineo $t \mapsto \widetilde{\gamma}(t) = (\widetilde{x}(t), 0) \in \Gamma_{\bar{e}}$ che congiunge il punto $(0, 0)$ al punto $(1, 0)$ e che ha energia $\bar{e}$.

iv) Mostrare che si ha

$$\mathcal{J}_L(\bar{\gamma}) < \mathcal{J}_L(\widetilde{\gamma}).$$

Esercizio 2
Si consideri la trasformazione di coordinate $(p, q, t) \overset{\mathbf{\Psi}}{\mapsto} (P, Q, t)$ definita da

$$P = 2e^t\sqrt{pq}\log p,$$
$$Q = e^{-t}\sqrt{pq},$$

sull'insieme $\{(p, q) \in \mathbb{R}^2 : p, q > 0\}$.

i) Dimostrare che la trasformazione $\mathbf{\Psi}$ è completamente canonica.

ii) Estendere $\mathbf{\Psi}$ ad una trasformazione canonica nello spazio delle fasi esteso.

iii) Determinare come si trasforma la hamiltoniana $H(p, q) = pq$ tramite $\mathbf{\Psi}$.

Esercizio 3
Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(I, \varphi) = \frac{1}{2}(aI_1^2 + bI_2^2) + \varepsilon\cos(3\varphi_1 - 2\varphi_2), \qquad \varepsilon \ll 1,$$

con $(I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$, $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$.

i) Determinare la condizione che a e b devono soddisfare affinchè esistano nel sistema dei moti che non soddisfano il principio della media. Scrivere inoltre questi particolari moti.

ii) Posto $a = 1$, $b = -2$, mostrare che I_1, I_2 compiono oscillazioni di ampiezza di ordine $\sqrt{\varepsilon}$ attorno a dei valori costanti.

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
20 Giugno 2022

Esercizio 1
Sia
$$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \overset{\boldsymbol{\Psi}}{\mapsto} (\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q})$$
una trasformazione di coordinate in $\mathbb{R}^{2n}$, con $n \geq 1$, dove

$$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n), \quad \boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n), \quad \boldsymbol{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n), \quad \boldsymbol{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$$

sono vettori di $\mathbb{R}^n$.

i) Posto
$$\tilde{\boldsymbol{x}} = (p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_n, q_n), \qquad \tilde{\boldsymbol{y}} = (P_1, Q_1, P_2, Q_2, \dots, P_n, Q_n)$$
e
$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} J_2 & O_2 & \dots & O_2 \\ O_2 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O_2 \\ O_2 & \dots & O_2 & J_2 \end{bmatrix} \qquad \text{con} \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
mostrare che la trasformazione $\boldsymbol{\Psi}$ è simplettica con valenza 1 se e solo se vale la relazione
$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{y}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}} \tilde{J} \left[\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{y}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}}\right]^T = \tilde{J}.$$
Suggerimento: usare la matrice ortogonale
$$S = [\boldsymbol{e}_1 | \boldsymbol{e}_{n+1} | \boldsymbol{e}_2 | \boldsymbol{e}_{n+2} | \dots | \boldsymbol{e}_n | \boldsymbol{e}_{2n}]^T$$
dove gli $\boldsymbol{e}_j$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^{2n}$.

ii) Si consideri per semplicità il caso $n = 2$ e si definiscano le matrici
$$M_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial p_j} & \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \\ \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} & \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \end{bmatrix} \qquad 1 \leq i, j \leq 2.$$
Mostrare che valgono le relazioni
$$M_{11} + M_{21} = M_{12} + M_{22} = 1.$$

Esercizio 2
Si consideri la funzione hamiltoniana
$$H_\varepsilon = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + \omega^2 q_2^2) + \varepsilon q_1^2 q_2$$
con $\omega \neq 0$.

i) Mostrare che la dinamica associata alla hamiltoniana H_0 ottenuta da H ponendo $\varepsilon = 0$ è integrabile.

ii) Introdurre variabili azione-angolo per H_0 attraverso la trasformazione

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \xrightarrow{\Phi} (I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2)$$

e scrivere la nuova hamiltoniana

$$K_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \Phi^{-1}.$$

iii) Usare il metodo di Lie per trovare una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) \xrightarrow{\mathcal{C}_\varepsilon^{-1}} (\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$$

tale che la hamiltoniana $\tilde{H}_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \mathcal{C}_\varepsilon$ non dipenda da $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ al primo ordine in ε. Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione fino al secondo ordine in ε incluso.

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
13 Settembre 2022

Esercizio 1
Sia

$$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \overset{\boldsymbol{\Psi}}{\mapsto} (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})$$

una trasformazione di coordinate in $\mathbb{R}^{2n}$, con $n \geq 1$, dove

$$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n), \quad \boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n), \quad \boldsymbol{P} = (P_1, P_2, \ldots, P_n), \quad \boldsymbol{Q} = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$$

sono vettori di $\mathbb{R}^n$.

i) Posto

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = (p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots, p_n, q_n), \qquad \tilde{\boldsymbol{y}} = (P_1, Q_1, P_2, Q_2, \ldots, P_n, Q_n)$$

e

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} J_2 & O_2 & \ldots & O_2 \\ O_2 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O_2 \\ O_2 & \ldots & O_2 & J_2 \end{bmatrix} \qquad \text{con} \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

mostrare che la trasformazione $\boldsymbol{\Psi}$ è simplettica con valenza 1 se e solo se vale la relazione

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{y}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}} \tilde{J} \left[\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{y}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}}\right]^T = \tilde{J}.$$

Suggerimento: usare la matrice ortogonale

$$S = [\boldsymbol{e}_1 | \boldsymbol{e}_{n+1} | \boldsymbol{e}_2 | \boldsymbol{e}_{n+2} | \ldots | \boldsymbol{e}_n | \boldsymbol{e}_{2n}]^T$$

dove gli $\boldsymbol{e}_j$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^{2n}$.

- Si consideri per semplicità il caso $n = 2$ e si definiscano le matrici

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial p_j} & \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \\ \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} & \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \end{bmatrix} \qquad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Mostrare che valgono le relazioni

$$M_{11} + M_{21} = M_{12} + M_{22} = 1.$$

Esercizio 2
Si consideri la funzione hamiltoniana

$$H_\varepsilon = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + \omega^2 q_2^2) + \varepsilon q_1^2 q_2$$

con $\omega \neq 0$.

i) Mostrare che la dinamica associata alla hamiltoniana H_0 ottenuta da H ponendo $\varepsilon = 0$ è integrabile.

ii) Introdurre variabili azione-angolo per H_0 attraverso la trasformazione

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \xrightarrow{\Phi} (I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2)$$

e scrivere la nuova hamiltoniana

$$K_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \Phi^{-1}.$$

iii) Usare il metodo di Lie per trovare una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) \xrightarrow{\mathcal{C}_\varepsilon^{-1}} (\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$$

tale che la hamiltoniana $\tilde{H}_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \mathcal{C}_\varepsilon$ non dipenda da $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ al primo ordine in ε. Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione fino al secondo ordine in ε incluso.

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
17 Novembre 2022

Esercizio 1
Si consideri l'equazione di Newton

$$m\ddot{X} = kX, \qquad k > 0,$$

dove $X = (x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$ sono le coordinate di un punto materiale di massa m che si muove su un piano.

i) Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange nelle coordinate polari $(q, \theta) \in (\mathbb{R}^+, S^1)$ definite sul piano del moto.

Assumendo che $m = 1$,

ii) determinare la componente $\bar{q}(t)$ della soluzione $\bar{\gamma}(t) = (\bar{q}(t), \bar{\theta}(t))$ di tali equazioni con condizioni iniziali

$$q(0) = 1, \quad \dot{q}(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = \sqrt{\frac{k}{3}}.$$

iii) mostrare che per ogni tempo $\tau > 0$, $\bar{q}(t)$ è un minimo debole stretto del funzionale

$$\mathcal{A}_{\tilde{L}} = \int_0^\tau \tilde{L}(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t))dt,$$

nella classe di funzioni $C^1([0, \tau], \mathbb{R})$, dove $\tilde{L}(q, \dot{q})$ è la lagrangiana ridotta che si ottiene "eliminando" la coordinata θ nelle equazioni.

Esercizio 2

i) Data una funzione di quattro variabili scalari $S(q_1, q_2, P_1, Q_2)$ tale che

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial(q_1, q_2)\partial(P_1, Q_2)} \neq 0$$

su tutto il dominio considerato, mostrare che le relazioni

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2}, \quad Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1}, \quad P_2 = -\frac{\partial S}{\partial Q_2}$$

definiscono localmente una trasformazione canonica univalente

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \overset{\Psi}{\mapsto} (P_1, P_2, Q_1, Q_2).$$

ii) Completare le relazioni

$$P_1 = q_1p_2 - q_2p_1, \qquad Q_2 = q_1p_1 + q_2p_2$$

ad una trasformazione canonica univalente

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \overset{\Psi}{\mapsto} (P_1, P_2, Q_1, Q_2),$$

definita su $p_1, p_2, q_1, q_2 > 0$, utilizzando una funzione generatrice S dello stesso tipo del punto precedente.[1]

[1] *Suggerimento:* si ricordi la relazione $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, valida per ogni $x > 0$.

iii) (*facoltativo*) Trovare la soluzione delle equazioni di Hamilton con hamiltoniana

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{4} \log^2(q_1^2 + q_2^2) + q_1(p_1 + p_2) - q_2(p_1 - p_2)$$

e con condizioni iniziali

$$p_1(0) = p_2(0) = q_1(0) = q_2(0) = 1.$$

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
21 Dicembre 2022

Esercizio 1
Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = |\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2 - p_1p_2 - q_1q_2,$$

con $\mathbf{p} = (p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1,q_2) \in \mathbb{R}^2$.

i) Determinare una trasformazione canonica

$$(\mathbf{p},\mathbf{q}) \stackrel{\Psi}{\to} (\mathbf{P},\mathbf{Q}),$$

tale che le nuove coordinate $\mathbf{Q}$ siano separabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione di Hamilton $K = H \circ \Psi^{-1}$.

ii) Trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per il sistema hamiltoniano definito da H.

iii) Scrivere un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione K.

Esercizio 2
Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(I,\varphi) = h(I) + \epsilon f(I,\varphi),$$

con

$$\begin{aligned} h(I) &= I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + I_3\omega_3, \\ f(I,\varphi) &= I_1I_2[\cos^2(\varphi_1-\varphi_2) + \sin\varphi_1 \sin(2\varphi_2-\varphi_3)], \end{aligned}$$

dove

$$I = (I_1,I_2,I_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi = (\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) \in \mathbb{T}^3, \quad \omega_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ i = 1,2,3, \quad \epsilon \ll 1.$$

i) Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I,\varphi) \stackrel{\Psi_\epsilon}{\to} (\tilde{I},\tilde{\varphi})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ϵ. Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione.

ii) Scrivere la forma normale risonante al primo ordine in ϵ nel caso $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = 3$ e trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per il sistema hamiltoniano definito da tale forma normale risonante troncata al primo ordine in ϵ.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
11 Gennaio 2023
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1
Si descrivano le traiettorie del moto geodetico di un punto materiale sulla superficie di equazioni

$$\begin{cases} x = r(z)\cos\varphi \\ y = r(z)\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad\qquad r(z) = 2 + \frac{\cos z}{1+z^2},$$

dove $z \in \mathbb{R}, \varphi \in S^1$, disegnando anche il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto con coordinate $z, \dot{z}$ nel caso in cui la componente del momento angolare $\boldsymbol{M}_O$ lungo l'asse z sia non nulla.

Esercizio 2
Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(p_1,p_2,q_1,q_2,t) = \frac{p_1^2+p_2^2}{t^2} + \frac{t^2(q_1^2+q_2^2)}{2} - \frac{p_1q_1+p_2q_2}{t} - p_2q_1 - p_1q_2,$$

con $p_1,p_2,q_1,q_2 \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}^+$.

i) Data la trasformazione canonica dipendente dal tempo

$$(p_1,p_2,q_1,q_2,t) \xrightarrow{\tilde{\Psi}} (\tilde{p}_1,\tilde{p}_2,\tilde{q}_1,\tilde{q}_2,t)$$

con

$$\tilde{p}_1 = \frac{p_1}{t}, \qquad \tilde{p}_2 = \frac{p_2}{t}, \qquad \tilde{q}_1 = tq_1, \qquad \tilde{q}_2 = tq_2,$$

scrivere il campo vettoriale $X_{\tilde{H}} = \Psi_* X_H$ associato alla nuova hamiltoniana $\tilde{H}$.

ii) Mostrare che la funzione

$$F(\tilde{q}_1,\tilde{p}_2,Q_2,P_1) = Q_2(\tilde{q}_1 - \tilde{p}_2) + \tilde{p}_2P_1$$

genera una trasformazione canonica univalente

$$(\tilde{p}_1,\tilde{p}_2,\tilde{q}_1,\tilde{q}_2) \xrightarrow{\Psi} (P_1,P_2,Q_1,Q_2)$$

sul dominio della funzione $\tilde{H}$ tale che le nuove coordinate Q_1, Q_2 siano separabili per la funzione di Hamilton $K = \tilde{H} \circ \Psi^{-1}$.

iii) Trovare la soluzione per $t \geq 1$ delle equazioni di Hamilton associate ad H con condizioni iniziali $p_1(1) = p_2(1) = q_1(1) = q_2(1) = 1$.

Esercizio 3
Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(I,\varphi) = h(I) + \epsilon f(I,\varphi),$$

con

$$h(I) = \frac{1}{2}(aI_1^2 + bI_2^2 + cI_3^2),$$
$$f(I,\varphi) = \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) + \sin(\varphi_1 - 2\varphi_2),$$

dove

$$I = (I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \epsilon \ll 1.$$

i) Determinare dei valori dei coefficienti a, b, c per cui esistono dei moti del sistema che non soddisfano il principio della media. In particolare, discutere l'evoluzione temporale delle azioni.

ii) Assumendo $a = b = c = 1$, usare il metodo di Lie per trovare una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \xrightarrow{\mathcal{C}_\epsilon^{-1}} (\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3)$$

tale che la hamiltoniana $\tilde{H}_\epsilon = H_\epsilon \circ \mathcal{C}_\epsilon$ non dipenda da $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3$ al primo ordine in ϵ. Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione fino al primo ordine in ϵ.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
3 Febbraio 2023
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1
Data la funzione di Lagrange

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q), \quad V(q) = \log q, \qquad\qquad q \in \mathbb{R}^+, \quad \dot{q} \in \mathbb{R},$$

si consideri la soluzione $\gamma(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per $L(q,\dot{q})$ con condizioni iniziali

$$q(0) = 1, \qquad \dot{q}(0) = 0.$$

Mostrare che la soluzione $\gamma(t)$ per ogni tempo $0 < \tau < t_2$, con t_2 estremo superiore del suo intervallo massimale di definizione, è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^\tau L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt$$

nella classe di funzioni $C^1([0,\tau],\mathbb{R})$.

Esercizio 2
Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(p_1,p_2,q_1,q_2) = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{q_1^2 + q_2^2},$$

con $(p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2$ e $(q_1,q_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

i) Determinare una trasformazione canonica

$$(p_1,p_2,q_1,q_2) \xrightarrow{\Psi} (P_1,P_2,Q_1,Q_2),$$

tale che le nuove coordinate Q_1, Q_2 siano separabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione di Hamilton $K = H \circ \Psi^{-1}$.

ii) Scrivere un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione K.

Esercizio 3
Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi}) = h(\mathbf{I}) + \epsilon f(\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi}),$$

dove

$$\begin{aligned} h(\mathbf{I}) &= I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + I_3\omega_3, \\ f(\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi}) &= 2I_1[I_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\varphi_3 + I_3\sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3)], \end{aligned}$$

e

$$\mathbf{I} = (I_1,I_2,I_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) \in \mathbb{T}^3, \quad \omega_1,\omega_2,\omega_3 \neq 0, \quad 0 < \epsilon \ll 1.$$

i) Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) \stackrel{\Psi_\epsilon}{\to} (\tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ al primo ordine in ϵ. Scrivere inoltre la forma normale non risonante.

ii) Scrivere la forma normale risonante al primo ordine in ϵ nel caso

$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (2, 1, 1)$$

e determinare quali combinazioni lineari delle azioni $\tilde{\mathbf{I}}$ sono integrali primi per il campo vettoriale definito dalla forma risonante trascurando i termini di ordine ϵ^2.

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
17 aprile 2023

Esercizio 1
Si consideri la lagrangiana

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}\dot q^2 + q\dot q + q^2 - q\sin t, \qquad q,\dot q \in \mathbb{R}.$$

i) Trovare la soluzione $t \mapsto \bar\gamma(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\bar\gamma(0) = 1, \qquad \dot{\bar\gamma}(0) = 0.$$

ii) Mostrare che, per ogni $T > 0$, la soluzione $\bar\gamma$ è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^T L(\gamma(t),\dot\gamma(t))dt$$

nella classe di funzioni $C^1([0,T],\mathbb{R})$.

iii) Fissato $T > 0$, calcolare la *slope function* $\mathcal{P}(t,q)$ del campo di estremali $\{\gamma_\alpha(t)\}_\alpha$ definito sulla striscia $\{(t,\alpha) : t \in (0,T), \alpha \in \mathbb{R}\}$ dalle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma_\alpha(0) = 1, \qquad \dot\gamma_\alpha(0) = \alpha.$$

Esercizio 2
Si consideri una trasformazione di coordinate dipendente dal tempo

$$(p,q,t) \xrightarrow{\Psi} (P,Q,t)$$

con

$$\begin{aligned} P &= \sin q + f(q,t), \\ Q &= q^2 + pq(1+t), \end{aligned}$$

definita nel dominio

$$\mathcal{D} = \{(p,q,t) : p \in \mathbb{R}, q > 0, t > -1\},$$

dove $f(q,t)$ è una funzione di classe C^2.

i) Determinare una funzione $f(q,t)$ in modo che la trasformazione Ψ sia canonica univalente.

ii) Trovare una funzione generatrice della trasformazione Ψ.

iii) Scrivere le componenti del campo vettoriale hamiltoniano

$$X_K = \Psi_* X_H,$$

dove

$$H(p,q,t) = \frac{1}{1+t}\left[\frac{q^2}{2(1+t)} + pq\right].$$

Esercizio 3
Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(I,\varphi) = h(I) + \epsilon f(I,\varphi),$$

con

$$\begin{aligned} h(I) &= \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2, \\ f(I,\varphi) &= I_1 I_2[\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin\varphi_1 \sin(2\varphi_2)], \end{aligned}$$

dove

$$I = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2, \quad \omega_1, \omega_2 \neq 0, \quad \epsilon \ll 1.$$

i) Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I,\varphi) \xrightarrow{\Psi_\epsilon} (\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ϵ. Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione.

ii) Scrivere la forma normale risonante al primo ordine in ϵ nel caso $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1$ e trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per il sistema hamiltoniano definito da tale forma normale risonante troncata al primo ordine in ϵ.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
23 Giugno 2023
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1
Si consideri il moto di un punto materiale P in $\mathbb{R}^3$ di massa unitaria soggetto ad una forza centrale con energia potenziale

$$V(\rho) = -\frac{k}{\rho}, \qquad k > 0,$$

con ρ distanza di P dal centro delle forze O.

i) Scrivere la lagrangiana del sistema nelle coordinate polari $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times S^1$ introdotte nel piano del moto (assumendo che il momento angolare di P rispetto ad O sia diverso da zero).

ii) Trovare la soluzione $\bar{\gamma}(t) = (\bar{\rho}(t), \bar{\theta}(t))$ delle equazioni di Eulero-Lagrange del punto i) con le condizioni iniziali

$$\rho(0) = 1, \quad \dot{\rho}(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = \sqrt{k}.$$

iii) Usando la lagrangiana ridotta $\tilde{L}(\rho, \dot{\rho})$, ottenuta col metodo di Routh, calcolare l'estremo superiore dei tempi $t_1 > 0$ tale che la componente $\bar{\rho}(t)$ della soluzione $\bar{\gamma}(t)$ del punto ii) sia un minimo debole stretto dell'azione lagrangiana $\mathcal{A}_{\tilde{L}}$ nell'insieme delle funzioni $C^1([0, t_1], \mathbb{R})$.

Esercizio 2
Si considerino i due sistemi hamiltoniani con funzioni di Hamilton

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + |\mathbf{p}|^2, \qquad K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + |\mathbf{q}|^2,$$

con $\mathbf{q} \in (\mathbb{R}^+)^n$ e $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$.

i) Trovare un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla hamiltoniana K.

ii) Indicando con X_H ed X_K i campi vettoriali hamiltoniani associati ad H e K, rispettivamente, determinare il campo vettoriale

$$X = [X_K, X_H]$$

e dimostrare che è integrabile trovando n integrali primi in involuzione e genericamente indipendenti nel dominio in cui sono definite le variabili $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$.

iii) Determinare il flusso $\Phi^t(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ del campo vettoriale X.

Esercizio 3
Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2^2) + \epsilon[\cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}) + \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\varphi})],$$

dove $\epsilon \ll 1$ e

$$\boldsymbol{I} = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2, \quad \boldsymbol{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)\}.$$

i) Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}) \xrightarrow{\Psi_\epsilon} (\tilde{\boldsymbol{I}}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}),$$

con $\tilde{\boldsymbol{I}} = (\tilde{I}_1, \tilde{I}_2)$, $\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$, tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ al primo ordine in ϵ.

ii) Trovare dei valori del vettore $\boldsymbol{k}$ in modo tale che non sia soddisfatto il principio della media, scrivendo una famiglia di moti che lo viola.

Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica
14 Novembre 2023

Esercizio 1
Si consideri l'equazione di Newton

$$\ddot{x} = 0,$$
$$\ddot{z} = -\frac{1}{2},$$

di un punto materiale di massa unitaria che si muove sul piano (x, z) soggetto ad una forza di intensità costante.

i) Determinare la soluzione di tale equazione con condizioni iniziali

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0.$$

ii) Mostrare che la funzione $\bar{u}(x) = z(x)$ ottenuta dalla soluzione del punto precedente, è un estremale del funzionale

$$\mathcal{A}_L = \int_0^{x_1} L(\bar{u}(x), \bar{u}'(x))dx,$$

definito dalla lagrangiana

$$L(u, u') = \sqrt{1-u}\,\sqrt{1+u'^2}$$

con $u' = \frac{du}{dx}$.

iii) Mostrare che $\bar{u}(x)$ è un minimo debole stretto del funzionale $\mathcal{A}_L$ per ogni $x_1 > 0$ nella classe di funzioni $C^1([0, x_1], \mathbb{R})$. *Suggerimento*: cercare la soluzione dell'equazione di Jacobi in una forma polinomiale.

Esercizio 2

i) Si completi la relazione

$$Q = e^q$$

ad una trasformazione canonica univalente

$$\mathbb{R}^2 \ni (p, q) \overset{\mathbf{\Psi}}{\mapsto} (P, Q)$$

tramite il metodo della funzione generatrice.

ii) Si consideri il sistema hamiltoniano ad un grado di libertà con funzione di Hamilton

$$H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 e^{-2q} + p$$

e se ne calcoli la soluzione con condizioni iniziali al tempo $t = 0$

$$p_0 = 1, \qquad q_0 = 0$$

considerando il sistema hamiltoniano ottenuto tramite la trasformazione canonica $\mathbf{\Psi}$.

iii) Fissato un tempo $\tau > 0$ si verifichi che si ha

$$K(\mathbf{\Phi}^\tau(P, Q)) = K(P, Q),$$

dove $K = H \circ \Psi^{-1}$ e $\mathbf{\Phi}^t(P, Q)$ è il flusso integrale del campo vettoriale hamiltoniano X_K.

Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica
20 Dicembre 2023

Esercizio 1
Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = p_1^2 - p_2^2 + \frac{1}{q_1^2 - q_2^2},$$

con $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ e $q_1 > q_2$.

i) Determinare una trasformazione canonica[1]

$$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \stackrel{\Psi}{\to} (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}),$$

tale che le nuove coordinate $\boldsymbol{Q}$ siano separabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione di Hamilton $K = H \circ \Psi^{-1}$.

ii) Scrivere un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione K.

Esercizio 2
Si consideri la funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2}(I_1 - I_2)^2 + \varepsilon\big[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\big]$$

con $\boldsymbol{I} = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$.

i) Mostrare che il sistema hamiltoniano associato ad H_ε è integrabile scrivendo due integrali primi indipendenti e in involuzione;

ii) mostrare che il sistema hamiltoniano associato ad H_ε non soddisfa il principio della media al primo ordine in ε;

iii) tramite il metodo di Lie, scrivere la forma normale risonante $\tilde{H}_\varepsilon$ di H_ε relativa alla risonanza singola definita da $k_* = (1, 1)$;

iv) trovare la soluzione generale del sistema hamiltoniano associato ad $\tilde{H}_\varepsilon$ cancellando i termini $O(\varepsilon^2)$.

[1] È utile ricordare la relazione $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
16 Gennaio 2024

Esercizio 1
Si considerino le funzioni

$$\zeta_1(t) = e^{-t/2}\sin\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big),$$
$$\zeta_2(t) = e^{-t/2}\Big(A\cos\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big) + B\sin\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big)\Big),$$

con $A, B \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$.

Usando il teorema di oscillazione di Sturm, mostrare che tra due zeri consecutivi di ζ_1 esiste un unico zero di ζ_2, e viceversa.

Esercizio 2
Si consideri la trasformazione di coordinate

$$(p, q) \stackrel{\Psi}{\mapsto} (P, Q)$$

con

$$P = \frac{q^2 p}{1 - qp}, \qquad Q = \frac{(1 - qp)^2}{q^2 p},$$

e $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, $pq \neq 0, 1$.

i) Verificare che la trasformazione è canonica univalente.

ii) Dopo aver mostrato che
$$q^2 p = QP^2,$$
utilizzare questo risultato per determinare la trasformazione inversa della trasformazione data.

iii) Trovare una funzione generatrice $S(q, P)$.

Esercizio 3
Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) + \varepsilon q^4,$$

con $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, $\omega > 0$, $\varepsilon \ll 1$.

i) Trovare una trasformazione canonica

$$(p, q) \stackrel{\Psi_\varepsilon}{\mapsto} (I, \varphi)$$

con $I \in \mathbb{R}$, $\varphi \in S^1$ tale che la hamiltoniana $K_\varepsilon(I, \varphi) = H_\varepsilon \circ \Psi_\varepsilon^{-1}(I, \varphi)$ assuma la forma
$$K_\varepsilon(I, \varphi) = h(I) + \varepsilon f(I, \varphi).$$

ii) Determinare una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità
$$(I, \varphi) \stackrel{\tilde{\Psi}_\varepsilon}{\mapsto} (\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$
tale che la hamiltoniana $\tilde{K}_\varepsilon(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) = K_\varepsilon \circ \tilde{\Psi}_\varepsilon^{-1}(\tilde{I}, \tilde{\varphi})$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ε. Scrivere inoltre la forma normale non risonante.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
9 Febbraio 2024

Esercizio 1

i) Mostrare che la funzione $y(x) = \cosh x$ è un estremale del funzionale

$$\mathcal{A}_L = \int_0^{x_1} L(y(x), y'(x))dx,$$

definito dalla lagrangiana

$$L(y, y') = y\sqrt{1 + y'^2}$$

con $y' = \frac{dy}{dx}$.

ii) Mostrare che $y(x)$ è un minimo debole stretto del funzionale $\mathcal{A}_L$ per ogni $x_1 > 0$ nella classe di funzioni $C^1([0, x_1], \mathbb{R})$.

Esercizio 2

Si completino le relazioni

$$\begin{aligned} P_1 &= p_1 - p_2 - q_1 - q_2 \\ Q_1 &= p_1 + p_2 + q_1 - q_2 \end{aligned}$$

ad una trasformazione canonica lineare

$$\mathbb{R}^4 \ni (p_1, p_2, q_1, q_2) \overset{\Psi}{\mapsto} (P_1, P_2, Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^4.$$

Esercizio 3

Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{q_1^2} + \frac{p_2^2}{q_2^2}\right) - \cos(q_1^2 - q_2^2),$$

con $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ e $(q_1, q_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$.

i) Si mostri che la trasformazione canonica

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \overset{\Psi}{\to} (P_1, P_2, Q_1, Q_2),$$

ottenuta completanto la trasformazione puntuale

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{2}(q_1^2 - q_2^2), \\ Q_2 &= \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2), \end{aligned}$$

rende separabili le nuove coordinate Q_1, Q_2 nell'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione di Hamilton $K = H \circ \Psi^{-1}$.

ii) Trovare la soluzione per $t \geq 0$ delle equazioni di Hamilton associate ad H con condizioni iniziali $p_1(0) = p_2(0) = q_1(0) = q_2(0) = 1$.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
14 Giugno 2024

Esercizio 1
Si descrivano le traiettorie del moto geodetico di un punto materiale di massa unitaria sulla superficie di equazioni

$$\begin{cases} x = r(z)\cos\varphi \\ y = r(z)\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad r(z) = \begin{cases} 1 + \frac{\log(1+z^4)}{z^2} & \text{se } z \neq 0, \\ 1 & \text{se } z = 0, \end{cases}$$

dove $z \in \mathbb{R}, \varphi \in S^1$, disegnando anche il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto con coordinate $z, \dot{z}$ nel caso in cui la componente del momento angolare lungo l'asse z sia non nulla.

Esercizio 2

i) Si consideri la relazione

$$\boldsymbol{P} = A\boldsymbol{p} + A^t\boldsymbol{q}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che coinvolge i vettori $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$. Si può estendere tale relazione ad una trasformazione canonica lineare $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \mapsto (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})$ di $\mathbb{R}^{2n}$?

ii) Data la relazione

$$\boldsymbol{P} = A\boldsymbol{p} + B\boldsymbol{q},$$

con A, B matrici reali invertibili di ordine n, quale proprietà devono soddisfare A e B affinché tale relazione si possa estendere ad una trasformazione canonica lineare $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \mapsto (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})$ di $\mathbb{R}^{2n}$?

iii) Siano A, B, C matrici reali invertibili di ordine n. Assumiamo che A e CB^t siano simmetriche e che $(C - B)A = I$. Si trovino le soluzioni del sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}) \cdot A(B\boldsymbol{p} + C\boldsymbol{q})$$

con condizioni iniziali $\boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{0}$.

Esercizio 3
Si consideri la funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega(I_1 + I_2) + \varepsilon\big[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos\varphi_2\big]$$

con $(I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$ e $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$.

i) Mostrare che il sistema hamiltoniano associato ad H_ε è integrabile scrivendo due integrali primi indipendenti e in involuzione.

ii) Trovare le soluzioni del sistema hamiltoniano associato ad H_ε e dire se tale sistema soddisfa il principio della media.

iii) Si consideri adesso la funzione di Hamilton

$$K_\varepsilon = H_\varepsilon + \varepsilon I_2 \cos\varphi_2.$$

Scrivere la forma normale risonante di K_ε relativa al multi-indice risonante $k^* = (1, -1)$, al primo ordine in ε.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
Laurea Magistrale in Matematica
5 Luglio 2024

Esercizio 1
Si consideri la lagrangiana

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q), \qquad V(q) = -\frac{1}{q} - q,$$

con $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\dot{q} \in \mathbb{R}$.

i) Scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange relativa a L e tracciare il suo ritratto di fase.

ii) Si consideri la soluzione $t \mapsto \gamma_1(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma_1(0) = 1, \qquad \dot{\gamma}_1(0) = 2.$$

Mostrare che l'intervallo massimale destro di γ_1 è $[0, +\infty)$.

iii) Mostrare che per ogni tempo τ, con $0 < \tau < +\infty$, la soluzione $\gamma_1(t)$ è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}_L(\gamma) = \int_0^\tau L(\gamma(\tau), \dot{\gamma}(\tau))dt \tag{1}$$

nella classe di funzioni $C^1([0,\tau],\mathbb{R})$.

iv) Si consideri la soluzione $t \mapsto \gamma_2(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma_2(0) = -2, \qquad \dot{\gamma}_2(0) = 0.$$

Mostrare che γ_2 è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è periodica.

v) Mostrare che esiste un tempo $\tau > 0$ tale che la soluzione $\gamma_2(t)$ non è un minimo debole per il funzionale definito in (1) nella classe di funzioni $C^1([0,\tau],\mathbb{R})$.

Esercizio 2
Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(p_1,p_2,q_1,q_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{q_1^2} + \frac{p_2^2}{q_2^2}\right) + q_1^2 + q_2^2,$$

con $(p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2$ e $(q_1,q_2) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$.

i) Estendere le relazioni

$$P_1 = \frac{p_1}{q_1}, \qquad P_2 = \frac{p_2}{q_2},$$

ad una trasformazione canonica

$$(p_1,p_2,q_1,q_2) \xrightarrow{\Psi} (P_1,P_2,Q_1,Q_2),$$

sul dominio di H. Scrivere inoltre la funzione di Hamilton $K = H \circ \Psi^{-1}$.

ii) Trovare due integrali primi per il campo vettoriale associato ad H in involuzione ed indipendenti tra loro.

iii) Scrivere un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione K.

iv) Scrivere la soluzione del sistema hamiltoniano per H in corrispondenza delle condizioni iniziali $p_1(0) = p_2(0) = 0$, $q_1(0) = q_2(0) = \sqrt{2}$.

Esercizio 3
Si consideri la funzione hamiltoniana

$$H(I_1, I_2, I_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3 + \varepsilon \left[\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin^2(\varphi_2 - 2\varphi_3)\right]$$

con $(I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3$, $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3$, $\varepsilon \ll 0$. Determinare quali condizioni devono essere soddisfatte da ω_1, ω_2, ω_3 affichè valga il principio della media.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

Laurea Magistrale in Matematica

13 Settembre 2024

Esercizio 1
Si consideri la lagrangiana

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q), \qquad V(q) = -\frac{1}{q} - q,$$

con $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\dot{q} \in \mathbb{R}$.

i) Scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange relativa a L e tracciare il suo ritratto di fase.

ii) Si consideri la soluzione $t \mapsto \gamma_1(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma_1(0) = 1, \qquad \dot{\gamma}_1(0) = 2.$$

Mostrare che l'intervallo massimale destro di γ_1 è $[0, +\infty)$.

iii) Mostrare che per ogni tempo τ, con $0 < \tau < +\infty$, la soluzione $\gamma_1(t)$ è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}_L(\gamma) = \int_0^\tau L(\gamma(\tau), \dot{\gamma}(\tau))dt \tag{1}$$

nella classe di funzioni $C^1([0,\tau], \mathbb{R})$.

iv) Si consideri la soluzione $t \mapsto \gamma_2(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma_2(0) = -2, \qquad \dot{\gamma}_2(0) = 0.$$

Mostrare che γ_2 è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è periodica.

v) Mostrare che esiste un tempo $\tau > 0$ tale che la soluzione $\gamma_2(t)$ non è un minimo debole per il funzionale definito in (1) nella classe di funzioni $C^1([0,\tau], \mathbb{R})$.

Esercizio 2
Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + q_1 q_2,$$

con $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ e $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$.

i) Estendere le relazioni

$$Q_1 = \frac{q_1 - q_2}{2}, \qquad Q_2 = \frac{q_1 + q_2}{2},$$

ad una trasformazione canonica

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \xrightarrow{\Psi} (P_1, P_2, Q_1, Q_2),$$

sul dominio di H. Scrivere inoltre la funzione di Hamilton $K = H \circ \Psi^{-1}$.

ii) Trovare due integrali primi per il campo vettoriale associato ad H in involuzione ed indipendenti tra loro.

iii) Scrivere un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione K.

iv) Scrivere la soluzione del sistema hamiltoniano per H in corrispondenza delle condizioni iniziali $p_1(0) = q_1(0) = 2$, $p_2(0) = q_2(0) = 1$.

Esercizio 3
Si consideri la funzione hamiltoniana

$$H(I_1, I_2, I_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3 + \varepsilon \left[\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin^2(\varphi_2 - 2\varphi_3)\right]$$

con $(I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3$, $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3$, $\varepsilon \ll 0$. Scrivere la forma normale risonante al primo ordine in ε nel caso $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 1$ e trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per il sistema hamiltoniano definito da tale forma normale risonante troncata al primo ordine in ε.