

Esercizio (19 gennaio 2021 e 14 giugno 2021)

Si considerino le funzioni di Hamilton

$$H(p, q) = \frac{1}{2} [|p|^2 |q|^2 - (p \cdot q)^2] + V(|q|)$$

$$K(p, q) = \frac{1}{2} (|p|^2 + |q|^2)$$

con $q \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^m$, $p \in \mathbb{R}^m$ e $V: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^2

i) Calcolare la parentesi di Lie

$$[X_H, X_K]$$

dei campi vettoriali hamiltoniani associati ad H e K

ii) Assumendo che

$$V(x) = \frac{1}{2} \log(1 + x^2)$$

mostrare che il sistema hamiltoniano definito da

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = [X_H, X_K]$$

è integrabile con il metodo di Hamilton - Jacobi

Ld.

i)

$$[X_H, X_K] = X_{-\{H, K\}}$$

$$\{H, K\} = \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \frac{\partial K}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial K}{\partial q}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = |p|^2 q - (p \cdot q) p + V' \frac{q}{|q|},$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = |q|^2 p - (p \cdot q) q,$$

$$\frac{\partial K}{\partial q} = q, \quad \frac{\partial K}{\partial p} = p$$

$$\begin{aligned} \{H, K\} &= |p|^2 \cancel{(p \cdot q)} - |p|^2 \cancel{(p \cdot q)} + \frac{V'}{|q|} (p \cdot q) \\ &\quad - |q|^2 \cancel{(p \cdot q)} + |q|^2 \cancel{(p \cdot q)} \\ &= \frac{V'}{|q|} (p \cdot q) \end{aligned}$$

$$X_{-\{H, K\}} = \left(\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{V'}{|q|} (p \cdot q) \right), -\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{V'}{|q|} (p \cdot q) \right) \right)^T$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{V'}{|q|} (p \cdot q) \right) &= \frac{V''}{|q|^2} (p \cdot q) q + \frac{V'}{|q|} p - \\ &\quad \frac{V'}{|q|^2} (p \cdot q) \frac{q}{|q|} \\ &= \frac{(p \cdot q)}{|q|^2} \left(V'' - \frac{V'}{|q|} \right) q + \frac{V'}{|q|} p \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{V'}{|q|} (p \cdot q) \right) = \frac{V'}{|q|} q$$

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{(p \cdot q)}{|q|^2} \left(V'' - \frac{V'}{|q|} \right) q + \frac{V'}{|q|} p \\ \dot{q} = -\frac{V'}{|q|} q \end{cases}$$

ii)

Partiamo dalla funzione hamiltoniana

$$- \{H, K\} = - \frac{V'(|q|)}{|q|} (p \cdot q)$$

dove

$$V(|q|) = \frac{1}{2} \log(1 + |q|^2)$$

$$V'(|q|) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+|q|^2} 2|q| = \frac{|q|}{1+|q|^2}$$

Allora

$$-\{H, K\} = -\frac{p \cdot q}{1+|q|^2}$$

L'equazione di Hamilton - Jacobi per la funzione caratteristica $W(q, \alpha)$ è

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q} \cdot q \right) \frac{1}{1+|q|^2} = \tilde{e}(\alpha) \quad (\tilde{e}(\alpha) = -e(\alpha))$$

Cercando $W(q, \alpha) = \sum_{j=1}^m W_j(q_j, \alpha)$ si ha

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial W_j}{\partial q_j} q_j = \tilde{e}(\alpha) \left(1 + \sum_{j=1}^m q_j^2 \right)$$

che si scompone nelle m equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{\partial W_j}{\partial q_j} q_j - \tilde{e}(\alpha) q_j^2 = \tilde{e}_j(\alpha) \quad j = 1, \dots, m$$

con $\sum_{j=1}^m \tilde{e}_j(\alpha) = \tilde{e}(\alpha)$

Per concludere si deve mostrare che

$$\det \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial q} (q, \alpha) \neq 0$$

per ogni $q \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^m$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}^m$

Scegliendo $\tilde{e}_j(\alpha) = \alpha_j$ per $j = 1, \dots, m$, otteniamo

$$\frac{\partial W_j}{\partial q_j} = \tilde{e}_j(\alpha) q_j + \frac{\alpha_j}{q_j}$$

La matrice delle derivate seconde è

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_i \partial q_j} = \begin{cases} q_j + \frac{1}{q_j}, & \text{se } i = j \\ q_j, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial q} = \begin{pmatrix} q_1 + \frac{1}{q_1} & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 + \frac{1}{q_2} & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_m & q_m & \cdots & q_m + \frac{1}{q_m} \end{pmatrix}$$

che possiamo anche riscrivere come

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial q} = \begin{pmatrix} \frac{1+q_1^2}{q_1} & \frac{q_1^2}{q_1} & \dots & \frac{q_1^2}{q_1} \\ \frac{q_2^2}{q_2} & \frac{1+q_2^2}{q_2} & \dots & \frac{q_2^2}{q_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{q_m^2}{q_m} & \frac{q_m^2}{q_m} & \dots & \frac{1+q_m^2}{q_m} \end{pmatrix}$$

Si vede che

$$\det \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial q} = \frac{1}{\prod_{j=1}^n q_j} \det \begin{pmatrix} 1+q_1^2 & q_1^2 & \dots & q_1^2 \\ q_2^2 & 1+q_2^2 & \dots & q_2^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_m^2 & q_m^2 & \dots & 1+q_m^2 \end{pmatrix}$$

sostituiamo alla colonna j -esima ($j = 1, \dots, n-1$)

la differenza tra la colonna j -esima e l'ultima colonna :

matrice
identità
($n-1$) \times ($n-1$)

$$\begin{pmatrix} \leftarrow I_{n-1} & q_1^2 \\ & q_2^2 \\ & \vdots \\ -1 \quad -1 \quad \dots \quad -1 & 1+q_m^2 \end{pmatrix}$$

quindi sostituiamo all'ultima riga la somma di tutte le righe

$$\begin{pmatrix} & & & & q_1^2 \\ & & & & q_2^2 \\ & & & & \vdots \\ & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 + |q|^2 \end{pmatrix}$$

e il determinante di questa matrice è $1 + |q|^2$

Abbiamo trovato che

$$\det \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial q} = \frac{1 + |q|^2}{\prod_{j=1}^n q_j} \neq 0$$

$$q \neq 0$$

Esercizio (20 dicembre 2016)

Siano date le due hamiltoniane

$$H_1(p, q) = \frac{1}{2} (|p|^2 + |q|^2)$$

$$H_2(p, q) = \frac{1}{2} |p|^2 + q_2$$

con $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$

i) Si dimostri che X_{H_j} , $j = 1, 2$, sono integrabili, trovando una coppia di integrali primi F_j, G_j in involuzione e indipendenti su $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

Sol.

$$\underline{X_{H_1}(p, q)}$$

un integrale primo è l'hamiltoniana H_1

$$F_1(p, q) = H_1(p, q) = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2)$$

poi notiamo che H_1 è l'hamiltoniana di un sistema meccanico, cioè è l'energia meccanica

$$H_1(p, q) = T(p) + V(q)$$

si può dire di più: è l'hamiltoniana di un moto centrale dato che $V(q) = V(|q|)$; allora sappiamo che la componente del momento angolare perpendicolare al

piano su cui si svolge il moto è un integrale primo:

$$G_1(p, q) = p_1 q_2 - q_1 p_2$$

Verifichiamo che F_1, G_1 sono in involuzione:

$$\{F_1, G_1\} = q_1 q_2 + q_2 (-q_1) - p_1 (-p_2) - p_2 p_1 = 0$$

e che sono in generale indipendenti:

$$\frac{\partial F_1}{\partial (p_1, p_2, q_1, q_2)} = (p_1, p_2, q_1, q_2)$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial (p_1, p_2, q_1, q_2)} = (q_2, -q_1, -p_2, p_1)$$

(non sono indipendenti se \exists) $p_1 = q_2, p_2 = -q_1$

b) $p_1 = -q_2, p_2 = q_1, c) p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 0$)

$X_{H_2}(p, q)$

un integrale primo è l'hamiltoniana H_2 , dato che come H_1 non dipende dal tempo

$$F_2(p, q) = H_2(p, q)$$

poi notiamo che q_1 è una variabile ciclica, e quindi p_1 è un integrale primo, prendiamo

$$G_2(p, q) = p_1$$

Abbiamo che

$$\{F_2, G_2\} = \frac{\partial F_2}{\partial q_1} \frac{\partial G_2}{\partial p_1} = 0$$

inoltre F_2, G_2 sono genericamente indipendenti:

$$\frac{\partial F_2}{\partial (p_1, p_2, q_1, q_2)} = (p_1, p_2, 0, 1)$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial (p_1, p_2, q_1, q_2)} = (1, 0, 0, 0)$$

(sono sempre indipendenti)

ii) Dimostrare che

$$X_3 = [X_2, X_1]$$

è un campo vettoriale hamiltoniano e integrabile, trovando una coppia di integrali primi F_3, G_3 in involuzione e indipendenti su $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

Sol.

Poiché X_1, X_2 sono campi vettoriali hamiltoniani, dalla teoria sappiamo che $X_3 = [X_2, X_1]$ è un c. v. hamiltoniano, infatti

$$[X_{H_2}, X_{H_1}] = X_{\{H_1, H_2\}}$$

e l'hamiltoniana $\{H_1, H_2\}$ è

$$H_3 = \{H_1, H_2\} = q_1 p_1 + q_2 p_2 - p_1 \cdot 0 - p_2 \cdot 1$$

$$= q \cdot p - p_2$$

Notiamo che H_3 non è dipendente dal tempo e che

$$H_3(p, q) = H_3^{(1)}(p_1, q_1) + H_3^{(2)}(p_2, q_2)$$

con

$$H_3^{(1)}(p_1, q_1) = p_1 q_1, \quad H_3^{(2)}(p_2, q_2) = p_2 q_2 - p_2$$

quindi due integrali primi sono

$$F_3(p, q) = p_1 q_1, \quad G_3(p, q) = p_2 q_2 - p_2$$

breve digressione inerente a questo punto

Scriviamo l'equazione di H.-J. associata ad H_3

$$q_1 \frac{\partial W_1}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial W_2}{\partial q_2} - \frac{\partial W_2}{\partial q_2} = e(\alpha)$$

$$\text{con } W_1(q_1, \alpha) + W_2(q_2, \alpha) = W(q_1, q_2, \alpha)$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$$

Si ha

$$\begin{cases} q_1 \frac{\partial W_1}{\partial q_1} = \alpha_1 \\ (q_2 - 1) \frac{\partial W_2}{\partial q_2} = \cancel{\alpha_1} + \alpha_2 - \cancel{\alpha_1} \quad (e(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2) \end{cases}$$

$$W(q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 \log |q_1| + \alpha_2 \log |q_2 - 1|$$

Allora si vede che due integrali sono

$$\alpha_1 = q_1 p_1$$

$$\alpha_2 = p_2 (q_2 - 1)$$

Vediamo che

$$\{F_3, G_3\} = p_1 \cdot 0 + 0 - q_1 \cdot 0 - 0 = 0$$

inoltre

$$\frac{\partial F_3}{\partial (p_1, p_2, q_1, q_2)} = (q_1, 0, p_1, 0)$$

$$\frac{\partial G_3}{\partial (p_1, p_2, q_1, q_2)} = (0, q_2 - 1, 0, p_2)$$

è un punto di
equilibrio dell'eq.
di Hamilton
per H_3

(non sono indipendenti se $(p_1, p_2, q_1, q_2) = (0, 0, 0, 1)$)

iii) Si consideri il flusso di X_3 , $\Phi_3^t(p, q)$ e la
proiezione naturale

$$\pi_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\pi_2(p, q) = (p_2, q_2)$$

Si dimostri che $\forall (\bar{p}_1, \bar{q}_1) \in \mathbb{R}^2$ la mappa

$$\mathbb{R}^2 \ni (p_2, q_2) \longrightarrow \pi_2 \circ \Phi_3^t(\bar{p}_1, p_2, \bar{q}_1, q_2)$$

conserva l'area

Sol.

$$H_3(p, q) = p \cdot q - p_2 = p_1 q_1 + p_2 q_2 - p_2$$

Si vede facilmente che il sistema hamiltoniano definito da H_3 si disaccoppia nei due sistemi

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -p_1 \\ \dot{q}_1 = q_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{p}_2 = -p_2 \\ \dot{q}_2 = q_2 - 1 \end{cases}$$

e che questi sono sistemi hamiltoniani con hamiltoniana

$$H_3^{(1)}(p_1, q_1) = p_1 q_1 \quad H_3^{(2)}(p_2, q_2) = p_2 (q_2 - 1)$$

i flussi corrispondenti sono

$$\Phi_1^t(p_1, q_1) = (e^{-t} p_1, e^t q_1)$$

$$\Phi_2^t(p_2, q_2) = (e^{-t} p_2, 1 + (q_2 - 1) e^t)$$

$$q_2(t) = 1 + \alpha e^t$$

$$q_2(0) = 1 + \alpha$$

$$\alpha = q_2(0) - 1$$

Allora la mappa

$$\pi_2 \circ \Phi_3^t(\bar{p}_1, p_2, \bar{q}_1, q_2) =$$

$$\Phi_2^t(p_2, q_2) = (e^{-t} p_2, 1 + (q_2 - 1) e^t)$$

conserva l'area perché è il flusso di un campo vett.

ham. di hamiltoniana $H_3^{(2)}(p_2, q_2) = p_2 (q_2 - 1)$

Esercizio (18 dicembre 2015)

Consideriamo le due funzioni hamiltoniane

$$H_1(p, q) = \frac{1}{2}(|p|^2 + |q|^2)$$

$$H_2(p, q) = \frac{1}{2}|p|^2 - \frac{1}{|q|}$$

definite in

$$D_1 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad D_2 = \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$$

Siano Φ_1^t, Φ_2^t i flussi di X_{H_1}, X_{H_2}

- i) Scrivere le espressioni di X_{H_1}, X_{H_2} e mostrare che i flussi non commutano

Sol.

I campi vettoriali sono

$$\begin{cases} \dot{p} = -q \\ \dot{q} = p \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{p} = -\frac{q}{|q|^3} \\ \dot{q} = p \end{cases}$$

$$X_{H_1}(p, q) = (-q, p)^T \quad X_{H_2}(p, q) = \left(-\frac{q}{|q|^3}, p\right)^T$$

Per mostrare che i flussi non commutano, mostriamo che i campi non commutano e a tal fine calcoliamo

$$[X_{H_1}, X_{H_2}] = X_{\{H_2, H_1\}}$$

$$\begin{aligned} \{H_2, H_1\} &= \frac{q}{|q|^3} \cdot p - p \cdot q = \\ & p \cdot q \left(\frac{1}{|q|^3} - 1 \right) \end{aligned}$$

si vede che poiché i campi in generale non commutano
neppure i rispettivi flussi commutano

ii) Trovare un sottoinsieme I di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ invariante
per X_{H_1}, X_{H_2} t. c. Φ_1^t, Φ_2^t ristretti ad I commutano

Sol.

Partiamo dall'equazione

$$\{H_2, H_1\} = p \cdot q \left(\frac{1}{|q|^3} - 1 \right)$$

se $p \cdot q = 0$ e $p \cdot q$ è un integrale primo per
 X_{H_1}, X_{H_2} allora avremmo che i flussi commutano in
un certo sottoinsieme di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ invariante
Calcoliamo le seguenti derivate di Lie

$$L_{H_1} p \cdot q = (-q) \cdot q + p \cdot p = |p|^2 - |q|^2$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{H_2} p \cdot q &= -\frac{q}{|q|^3} \cdot q + p \cdot p = |p|^2 - \frac{|q|^2}{|q|^3} \\ &= |p|^2 - \frac{1}{|q|} \end{aligned}$$

se $|p|^2 = |q|^2 = 1$ allora $p \cdot q$ è un integrale primo per X_{H_1}, X_{H_2} ; ora calcoliamo

$$\mathcal{L}_{H_1} |p|^2 = 2p \cdot (-q) = -2p \cdot q$$

$$\mathcal{L}_{H_2} |p|^2 = 2p \cdot \left(-\frac{q}{|q|^3}\right) = -\frac{2p \cdot q}{|q|^3}$$

e

$$\mathcal{L}_{H_1} |q|^2 = 2p \cdot q$$

$$\mathcal{L}_{H_2} |q|^2 = 2p \cdot q$$

allora si vede che $|p|^2, |q|^2$ sono integrali primi sia per X_{H_1} che per X_{H_2} se $p \cdot q = 0$

Da quanto trovato segue che l'insieme invariante cercato è il fibrato tangente unitario di S^1

$$T_1 S^1 = \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, |p| = |q| = 1, p \cdot q = 0\}$$

Oppure si poteva seguire il suggerimento dato nel

testo: si consideri l'hamiltoniana

$$K(p, q) = \frac{1}{2} [|p|^2 |q|^2 - (p \cdot q)^2]$$

e si dimostri che le funzioni

$$|p|^2, |q|^2, p \cdot q$$

sono costanti lungo le soluzioni del sistema hamiltoniano definito da K , e si scelgano valori particolari di queste costanti

$$\begin{aligned}\{ |p|^2, K \} &= -2p \cdot (|p|^2 q - (p \cdot q)p) \\ &= -2p \cdot q |p|^2 + 2p \cdot q |p|^2 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{ |q|^2, K \} &= 2q \cdot (p|q|^2 - (p \cdot q)q) \\ &= 2p \cdot q |q|^2 - 2p \cdot q |q|^2 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{ p \cdot q, K \} &= p \cdot (p|q|^2 - (p \cdot q)q) - \\ &\quad q \cdot (|p|^2 q - (p \cdot q)p) = \\ &\quad |p|^2 |q|^2 - (p \cdot q)^2 - |p|^2 |q|^2 + (p \cdot q)^2 = 0\end{aligned}$$

segue che $|p|^2, |q|^2, p \cdot q$ sono integrali primi per X_K

Scriviamo il campo vettoriale X_K

$$\begin{cases} \dot{p} = (p \cdot q)p - |p|^2 q \\ \dot{q} = p|q|^2 - (p \cdot q)q \end{cases}$$

Scegliendo c.i. tali che

$$p \cdot q = 0, \quad |p|^2 = |q|^2 = 1$$

il sistema precedente diventa

$$\begin{cases} \dot{p} = -q \\ \dot{q} = p \end{cases}$$

Notiamo infine che i sistemi hamiltoniani che si ottengono a partire da K, H_1, H_2 restringendoci a $T_1 S^1$ sono equivalenti, e la dinamica descritta è quella di un oscillatore armonico

(in effetti si noti che

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{q}{|q|^3} \\ \dot{q} = p \end{cases} \quad \text{diventa } (|q|=1) \quad \begin{cases} \dot{p} = -q \\ \dot{q} = p \end{cases}$$

iii) Trovare una funzione $\mathcal{I}(p, q)$ t. c. valga la relazione ($\lambda \in \mathbb{R}$ costante)

$$\{\{H_1, H_2\}, \mathcal{I}\} = 0, \quad \mathcal{I} \neq \{H_1, H_2\} \lambda$$

Sol.

Se \mathcal{I} è un integrale primo di X_{H_3} , $H_3 = \{H_1, H_2\}$,

\mathcal{F} soddisfa la relazione sopra

Potremmo cercare questo integrale, tuttavia procediamo seguendo un'altra strada; partiamo dall'identità di Jacobi

$$\{\mathcal{F}, \{H_1, H_2\}\} + \{H_2, \{\mathcal{F}, H_1\}\} + \{H_1, \{H_2, \mathcal{F}\}\} = 0$$

$$\{H_2, \{\mathcal{F}, H_1\}\} + \{H_1, \{H_2, \mathcal{F}\}\} = 0$$

questa ultima equazione ci suggerisce che possiamo cercare \mathcal{F} in modo che sia un integrale primo per

X_{H_1}, X_{H_2} ; si avrebbe così

$$\{\mathcal{F}, H_1\} = 0 = \{H_2, \mathcal{F}\}$$

Notiamo che H_1, H_2 sono le hamiltoniane di un moto centrale (armonico e di Keplero), allora la componente del momento angolare perpendicolare al piano in cui si svolge il moto è un integrale primo

$$\mathcal{F} = p_1 q_2 - q_1 p_2$$

$$\{\mathcal{F}, H_1\} = (-p_2, p_1) \cdot (p_1, p_2) - (q_2, -q_1) \cdot (q_1, q_2) = 0$$

$$\begin{aligned} \{\mathcal{F}, H_2\} &= (-p_2, p_1) \cdot (p_1, p_2) - (q_2, -q_1) \cdot (q_1, q_2) / |q|^3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esercizio

Consideriamo i campi hamiltoniani associati alle funzioni hamiltoniane

$$H(p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$$

$$K(p, q) = \frac{1}{2}(p^2 - q^2)$$

$$p, q \in \mathbb{R}$$

i) Calcolare $[X_H, X_K]$ e i flussi Φ_H^t, Φ_K^t

Sol.

$$\begin{cases} \dot{p} = -q \\ \dot{q} = p \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{p} = q \\ \dot{q} = p \end{cases}$$

$$X_H(p, q) = (-q, p)^T$$

$$X_K(p, q) = (q, p)^T$$

Calcoliamo

$$[X_H, X_K] = X_{\{K, H\}}$$

$$\{K, H\} = (-q)p - pq = -2qp$$

$$X_{\{K, H\}} = (2p, -2q)^T$$

$$\begin{cases} \dot{p} = 2p \\ \dot{q} = -2q \end{cases}$$

flusso Φ_H^t

$$\ddot{q} = -q \quad (\text{oscillatore armonico})$$

$$q(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t, \quad q(0) = \alpha$$

$$\dot{q}(t) = p(t) = -\alpha \sin t + \beta \cos t, \quad p(0) = \beta$$

$$\begin{cases} q(t) = q(0) \cos t + p(0) \sin t \\ p(t) = -q(0) \sin t + p(0) \cos t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = R_t \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}, \quad R_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\Phi_H^t(p, q) = R_t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

flusso Φ_K^t

$$\ddot{q} = q \quad (\text{repulsore armonico})$$

$$q(t) = \alpha e^t + \beta e^{-t}, \quad q(0) = \alpha + \beta$$

$$\dot{q}(t) = p(t) = \alpha e^t - \beta e^{-t}, \quad p(0) = \alpha - \beta$$

$$\alpha = q(0) - \beta$$

$$p(0) = q(0) - 2\beta \quad \longrightarrow \quad \beta = \frac{q(0) - p(0)}{2}$$

$$\alpha = \frac{q(0) + p(0)}{2}$$

$$q(t) = \left(\frac{q(0) + p(0)}{2} \right) e^t + \left(\frac{q(0) - p(0)}{2} \right) e^{-t}$$

$$= q(0) \cosh t + p(0) \sinh t$$

$$p(t) = \left(\frac{q(0) + p(0)}{2} \right) e^t - \left(\frac{q(0) - p(0)}{2} \right) e^{-t}$$

$$= q(0) \sinh t + p(0) \cosh t$$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = S_t \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}, \quad S_t = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

$$\Phi_K^t(p, q) = S_t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Quindi, i due flussi sono

$$\Phi_H^t(p, q) = R_t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \Phi_K^t(p, q) = S_t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$R_t = \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \quad S_t = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

ii) Verificare che vale la seguente formula, che misura la mancata commutazione dei flussi

$$\mathcal{F} \circ \Phi_K^t \circ \Phi_H^s - \mathcal{F} \circ \Phi_H^s \circ \Phi_K^t =$$

$$st L[X_H, X_K] \mathcal{F} + \mathcal{O}_3(s, t)$$

nel caso particolare di $\mathcal{F} = p$

Sol.

Calcoliamo prima $L[X_H, X_K] \mathcal{F}$, cioè la derivata

di Lie di \mathcal{F} rispetto all'hamiltoniana $\{K, H\}$;

abbiamo già visto che

$$\{K, H\} = -2qp, \quad X_{\{K, H\}} = (2p, -2q)^T,$$

allora

$$L[X_H, X_K] \mathcal{F} = -\frac{\partial \{K, H\}}{\partial q} = 2p$$

$$= \{\mathcal{F}, \{K, H\}\}$$

Dunque

$$st L[X_H, X_K] \mathcal{F} = 2pst$$

Passiamo ora a calcolare $\mathcal{F} \circ \Phi_K^t \circ \Phi_H^s$, si ha

$$\mathcal{F} \circ \Phi_K^t \circ \Phi_H^s = \mathcal{F} \left(S_t R_s \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right)$$

$$R_s \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \cos s - q \sin s \\ p \sin s + q \cos s \end{pmatrix}$$

$$S_t R_s \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \cos s - q \sin s \\ p \sin s + q \cos s \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} p \cosh t \cos s - q \cosh t \sin s + p \sinh t \sin s + \\ q \sinh t \cos s, p \sinh t \cos s - q \sinh t \sin s + \\ p \cosh t \sin s + q \cosh t \cos s \end{pmatrix}^T =$$

$$\begin{pmatrix} p (\cosh t \cos s + \sinh t \sin s) + \\ q (-\cosh t \sin s + \sinh t \cos s), \\ p (\sinh t \cos s + \cosh t \sin s), \\ q (-\sinh t \sin s + \cosh t \cos s) \end{pmatrix}^T$$

$$\not\phi \circ \Phi_K^t \circ \Phi_H^s = p (\cosh t \cos s + \sinh t \sin s) + \\ q (-\cosh t \sin s + \sinh t \cos s)$$

infine calcoliamo $\not\phi \circ \Phi_H^s \circ \Phi_K^t$

$$\not\phi \circ \Phi_H^s \circ \Phi_K^t = \not\phi (R_s S_t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix})$$

$$S_t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \cosh t + q \sinh t \\ p \sinh t + q \cosh t \end{pmatrix}$$

$$R_s S_t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \cosh t + q \sinh t \\ p \sinh t + q \cosh t \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} p \cos s \cosh t + q \cos s \sinh t - p \sin s \sinh t \\ -q \sin s \cosh t, p \sin s \cosh t + q \sin s \sinh t \\ + p \cos s \sinh t + q \cos s \cosh t \end{pmatrix}^T =$$

$$\begin{pmatrix} p (\cos s \cosh t - \sin s \sinh t) + \\ q (\cos s \sinh t - \sin s \cosh t), \\ p (\sin s \cosh t + \cos s \sinh t) + \\ q (\sin s \sinh t + \cos s \cosh t) \end{pmatrix}^T$$

$$\not\phi \circ \Phi_H^s \circ \Phi_K^t = p (\cos s \cosh t - \sin s \sinh t) + \\ q (\cos s \sinh t - \sin s \cosh t)$$

Possiamo finalmente calcolare

$$\not\phi (S_t R_s \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}) - \not\phi (R_s S_t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}) =$$

$$\begin{aligned} & p (\cancel{\cosh t} \cos s + \sinh t \sin s) + q (-\cancel{\cosh t} \sin s + \cancel{\sinh t} \cos s) \\ & - p (\cancel{\cos s} \cosh t - \sin s \sinh t) - q (\cancel{\cos s} \sinh t - \cancel{\sin s} \cosh t) = \end{aligned}$$

$2p \operatorname{senh} t \operatorname{coss}$

Verifichiamo che

$$2p \operatorname{senh} t \operatorname{coss} = 2p st + \mathcal{O}_3(s, t)$$

scriviamo

$$\operatorname{coss} = s + \mathcal{O}(s^3)$$

$$\operatorname{senh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{1+t - (1-t) + \mathcal{O}(t^2)}{2}$$

$$= t + \mathcal{O}(t^2)$$

dunque si ha

$$2p \operatorname{senh} t \operatorname{coss} = 2p st + \mathcal{O}_3(s, t)$$

Esercizio

Consideriamo i due campi vettoriali

$$X = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$$

con $p, q \in \mathbb{R}^n$

- i) Mostrare che X, Y sono c. v. hamiltoniani e trovare per ciascuno di essi una funzione di Hamilton

Sol.

$$\underline{X = (-q, p)}$$

$$\begin{cases} \dot{p} = -q \\ \dot{q} = p \end{cases} \quad \frac{\partial X}{\partial(p, q)} = \begin{pmatrix} 0_m & -I_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix} = \mathcal{J}$$

con 0_m matrice nulla $n \times n$

I_m matrice identità $n \times n$

\mathcal{J} matrice simplettica

$$\text{notiamo che } \mathcal{J} \frac{\partial X}{\partial(p, q)} = \mathcal{J} \mathcal{J} = -I_{2m} \tilde{e}$$

una matrice simmetrica e poiché X è definito su un semplicemente connesso si ha che X è hamiltoniano

La funzione hamiltoniana $F(p, q)$ soddisfa

$$-\frac{\partial F}{\partial q} = -q, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = p$$

$$\text{Si ottiene } F(p, q) = \frac{1}{2} (|p|^2 + |q|^2)$$

$$\underline{Y = (0, p)}$$

$$\begin{cases} \dot{p} = 0 \\ \dot{q} = p \end{cases} \quad \frac{\partial Y}{\partial(p, q)} = \begin{pmatrix} 0_m & 0_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix}$$

$$\text{notiamo che } \mathcal{J} \frac{\partial Y}{\partial(p, q)} = \begin{pmatrix} -I_m & 0_m \\ 0_m & 0_m \end{pmatrix} \tilde{e}$$

una matrice simmetrica e poiché Y è definito su un semplicemente connesso si ha che Y è hamiltoniano

La funzione hamiltoniana $G(p, q)$ soddisfa

$$-\frac{\partial G}{\partial q} = 0 \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial p} = p$$

Si ottiene $G(p) = \frac{1}{2} |p|^2$

ii) Calcolare $[X, Y]$

Sol.

Chiamiamo X_F e X_G rispettivamente X, Y

$$[X_F, X_G] = X\{G, F\}$$

$$\{G, F\} = 0 - p \cdot q = -p \cdot q$$

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial(-p \cdot q)}{\partial q} = p \\ \dot{q} = \frac{\partial(-p \cdot q)}{\partial p} = -q \end{cases}$$

$$X\{G, F\} = (p, -q)^T$$

iii) Trovare la mappa a tempo fissato $\tau \in \mathbb{R}$ del flusso di $[X, Y]$ e verificare che definisce una

trasformazione canonica ψ

Sol.

$$\begin{cases} \dot{p} = p \\ \dot{q} = -q \end{cases}$$

$$\Phi^\tau(p, q) = (e^\tau p, e^{-\tau} q)$$

$$(p, q) \xrightarrow{\psi} (P, Q) = (e^\tau p, e^{-\tau} q)$$

per verificare che ψ è una trasformazione canonica usiamo la condizione di Lie

$$P \cdot dQ - p \cdot dq = (e^\tau p) \cdot e^{-\tau} dq - p \cdot dq =$$

$$p \cdot dq - p \cdot dq = 0$$

iv) Scrivere i campi vettoriali X, Y nelle coordinate canoniche definite da ψ

Sol.

$$(P, Q) \xrightarrow{\psi^{-1}} (p, q) = (e^{-\tau} P, e^\tau Q)$$

$$\psi_* X_F = \left(\frac{\partial \psi}{\partial (p, q)} X_F \right) \circ \psi^{-1}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial (p, q)} = \begin{pmatrix} e^\tau I_m & 0_m \\ 0_m & e^{-\tau} I_m \end{pmatrix}, \quad X_F = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial (p, q)} X_F = \begin{pmatrix} -e^\tau q \\ e^{-\tau} p \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial (p, q)} X_F \right) \circ \psi^{-1} = \begin{pmatrix} -e^\tau e^\tau Q \\ e^{-\tau} e^{-\tau} P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2\tau} Q \\ e^{-2\tau} P \end{pmatrix}$$

$$\psi_* X_F = \begin{pmatrix} -e^{2\tau} Q \\ e^{-2\tau} P \end{pmatrix}$$

Poi

$$\psi_* X_G = \left(\frac{\partial \psi}{\partial (p, q)} X_G \right) \circ \psi^{-1}, \quad X_G = \begin{pmatrix} 0 \\ P \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial (p, q)} X_G = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\tau} p \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial (p, q)} X_G \right) \circ \psi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\tau} e^{-\tau} P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2\tau} P \end{pmatrix}$$

$$\psi_* X_G = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2\tau} P \end{pmatrix}$$