Esercizio 1
Si consideri la hamiltoniana

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \frac{t}{2}|\mathbf{p}|^2 + \frac{1}{2t}(|\mathbf{q}|^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q})$$

con $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$.

i) Completare le relazioni

$$Q_1 = \frac{q_1^2}{2t}, \qquad Q_2 = \frac{q_2^2}{2t}$$

ad una trasformazione canonica dipendente dal tempo

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \xrightarrow{\Psi} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t),$$

con $\mathbf{P} = (P_1, P_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^2$, e scrivere la hamiltoniana K coniugata ad H tramite la trasformazione Ψ.

ii) Trovare un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla hamiltoniana K.

iii) Determinare due integrali primi indipendenti per il campo vettoriale X_H.

Esercizio 1

i) Cerco una funzione generatrice $S(q, P, t)$.

Da

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1} = \frac{q_1^2}{2t} \qquad Q_2 = \frac{\partial S}{\partial P_2} = \frac{q_2^2}{2t}$$

trovo

$$S(q, P, t) = \frac{q_1^2 P_1}{2t} + f_1(q, P_2, t)$$

$$S(q, P, t) = \frac{q_2^2 P_2}{2t} + f_2(q, P_1, t)$$

Pongo

$$S(q, P, t) = \frac{1}{2t}(q_1^2 P_1 + q_2^2 P_2)$$

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial P} = \frac{q_1 q_2}{t^2} \neq 0$$

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1} = \frac{q_1 P_1}{t} \qquad p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2} = \frac{q_2 P_2}{t}$$

da cui si ha $\quad P_1 = t\,\frac{p_1}{q_1}\,, \quad P_2 = t\,\frac{p_2}{q_2}$

La trasformazioni inversa porge

$$q_1 = \sqrt{2tQ_1} \qquad q_2 = \sqrt{2tQ_2}$$

$$p_1 = P_1\sqrt{\frac{2Q_1}{t}} \qquad p_2 = P_2\sqrt{\frac{2Q_2}{t}}$$

Ricaviamo l'hamiltoniana K coniugata ad H tramite ψ

$$K(P,Q,t) = \left(H(p,q,t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q,P,t)\right)\circ\psi^{-1}$$

$$H\circ\psi^{-1} = \frac{t}{2}\left(\frac{2P_1^2Q_1}{t} + \frac{2P_2^2Q_2}{t}\right) +$$

$$\frac{1}{2t}\left(2tQ_1 + 2tQ_2 + 2P_1Q_1 + 2P_2Q_2\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{2t^2}\left(q_1^2P_1 + q_2^2P_2\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}\circ\psi^{-1} = -\frac{1}{t}\left(P_1Q_1 + P_2Q_2\right)$$

$$K = P_1^2Q_1 + P_2^2Q_2 + Q_1 + Q_2$$

ii) Dato che K è indipendente dal tempo cerco un integrale completo della forma

$$S(Q,\alpha,t) = W(Q,\alpha) - e(\alpha)\,t$$

con $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$

Assumo

$$W(Q,\alpha) = W_1(Q_1,\alpha) + W_2(Q_2,\alpha)$$

L'equazione di Hamilton - Jacobi diventa

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial Q_1}\right)^2 Q_1 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial Q_2}\right)^2 Q_2 + Q_1 + Q_2 = e(\alpha)$$

Si possono quindi scrivere le due equazioni

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial W_1}{\partial Q_1}\right)^2 Q_1 + Q_1 = \alpha_1 \\ \left(\dfrac{\partial W_2}{\partial Q_2}\right)^2 Q_2 + Q_2 = \alpha_2 \end{cases}$$

dove $e(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2$

Consideriamo la prima equazione

$$\frac{\partial W_1}{\partial Q_1} = \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} \qquad \text{(scegliendo il segno +)}$$

$$W_1(Q_1,\alpha_1) = \int \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1}\; dQ_1$$

$$\int \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1}\; dQ_1 = Q_1 \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} - \underbrace{\int \frac{Q_1}{2}\left(-\frac{\alpha_1}{Q_1^2}\right) \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1}}\, dQ_1}$$

$$z = \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} \qquad dz = -\left(\frac{\alpha_1}{2Q_1^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1}}\, dQ_1$$

$$Q_1 = \frac{\alpha_1}{1 + z^2}$$

$$\longrightarrow \quad - \int \frac{\alpha_1}{1+z^2}\, dz = -\alpha_1 \arctan z$$

quindi

$$\int \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1}\; dQ_1 = Q_1 \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} - \alpha_1 \arctan \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1}$$

L'integrale completo cercato è dato da $\left(\det \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha\, \partial Q} \neq 0\right)$

$$S(Q,\alpha,t) = Q_1 \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} - \alpha_1 \arctan \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} - \alpha_1 t +$$

$$Q_2 \sqrt{\frac{\alpha_2}{Q_2} - 1} - \alpha_2 \arctan \sqrt{\frac{\alpha_2}{Q_2} - 1} - \alpha_2 t$$

iii) Il metodo di Hamilton-Jacobi ci indica una scelta possibile: α_1 e α_2

$$\alpha_1 = P_1^2 Q_1 + Q_1$$

$$\alpha_2 = P_2^2 Q_2 + Q_2$$

$$\frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial(P, Q)} = \begin{pmatrix} 2P_1 Q_1 & 0 & 1 + P_1^2 & 0 \\ 0 & 2P_2 Q_2 & 0 & 1 + P_2^2 \end{pmatrix}$$

il rango di questa matrice è 2, quindi i due integrali sono indipendenti

Si conclude che due integrali primi indipendenti per X_H sono

$$J_1 = t^{\cancel{2}} \frac{p_1^2}{\cancel{q_1^2}} \frac{\cancel{q_1^2}}{2\cancel{t}} + \frac{q_1^2}{2t} = \frac{t}{2} p_1^2 + \frac{q_1^2}{2t}$$

$$J_2 = \frac{t}{2} p_2^2 + \frac{q_2^2}{2t}$$

Esercizio

i) Completare le relazioni

$$P_1 = p_1 q_1 t \qquad P_2 = p_2 q_2 t$$

ad una trasformazione canonica

$$(p,q,t) \xrightarrow{\Psi} (P,Q,t)$$

con $p = (p_1, p_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $q = (q_1, q_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $t \in \mathbb{R}^+$, usando una funzione generatrice $S(q,P,t)$

Sol.

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1} = \frac{P_1}{q_1 t}$$

$$p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2} = \frac{P_2}{q_2 t}$$

$$S(q,P,t) = \frac{P_1}{t} \log q_1 + f(q_2, P, t)$$

$$S(q,P,t) = \frac{P_2}{t} \log q_2 + g(q_1, P, t)$$

Poniamo $S(q,P,t) = \dfrac{P_1}{t} \log q_1 + \dfrac{P_2}{t} \log q_2$

e notiamo che

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial P \partial q} = \frac{1}{q_1 q_2 t^2} \neq 0$$

quindi $S(q, P, t)$ è una buona funzione generatrice

Abbiamo

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1} = \frac{1}{t} \log q_1$$

$$Q_2 = \frac{\partial S}{\partial P_2} = \frac{1}{t} \log q_2$$

La trasformazione canonica ψ e la sua inversa sono date da

$$P_1 = p_1 q_1 t \qquad p_1 = \frac{P_1}{t e^{tQ_1}}$$

$$P_2 = p_2 q_2 t \qquad p_2 = \frac{P_2}{t e^{tQ_2}}$$

$$Q_1 = \frac{1}{t} \log q_1 \qquad q_1 = e^{tQ_1}$$

$$Q_2 = \frac{1}{t} \log q_2 \qquad q_2 = e^{tQ_2}$$

ii) Estendere tale trasformazione ad una trasformazione canonica nello spazio delle fasi esteso

$$(p, e, q, t) \xrightarrow{\tilde{\Psi}} (P, \mathcal{E}, Q, t)$$

Sol.

Sappiamo dalla teoria che deve valere

$$\mathcal{E}(p,e,q,t) = e - \frac{\partial S}{\partial t}(q, P(p,q,t), t)$$

riprendendo l'espressione di S,

$$S(q,P,t) = \frac{P_1}{t}\log q_1 + \frac{P_2}{t}\log q_2$$

si ha

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{t^2}(P_1 \log q_1 + P_2 \log q_2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q, P(p,q,t), t) = -\frac{1}{t}(p_1 q_1 \log q_1 + p_2 q_2 \log q_2)$$

$$\mathcal{E}(p,e,q,t) = e + \frac{1}{t}(p_1 q_1 \log q_1 + p_2 q_2 \log q_2)$$

iii) Si consideri l'hamiltoniana

$$H(p,q,t) = t^2(p_1^2 q_1^2 + p_2^2 q_2^2) + \frac{1}{t}((1 + p_2 q_2)\log q_2 + p_1 q_1 \log q_1)$$

Trovare un integrale completo dell'equazione di H.-J. per l'hamiltoniana K coniugata ad

H tramite ψ

Sol.

Possiamo scrivere

$$K(P,Q,t) = H \circ \psi^{-1} + \frac{\partial S}{\partial t}(q(P,Q,t),P,t)$$

$$H \circ \psi^{-1} = P_1^2 + P_2^2 + \frac{1}{t}\left(\left(1+\frac{P_2}{t}\right)Q_2 t + \frac{P_1}{\cancel{t}} Q_1 \cancel{t}\right)$$

$$= P_1^2 + P_2^2 + \frac{1}{t}\left(Q_2 t + P_2 Q_2 + P_1 Q_1\right)$$

$$= P_1^2 + P_2^2 + Q_2 + \frac{1}{t}\left(P_2 Q_2 + P_1 Q_1\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{t^2}\left(P_1 \log q_1 + P_2 \log q_2\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q(P,Q,t),P,t) = -\frac{1}{t}\left(P_1 Q_1 + P_2 Q_2\right)$$

$$H \circ \psi^{-1} + \frac{\partial S}{\partial t}(q(P,Q,t),P,t) = P_1^2 + P_2^2 + Q_2$$

$$K(P,Q,t) = P_1^2 + P_2^2 + Q_2$$

L'equazione di H.-J. associata a K, per la f. caratteristica di Hamilton $W(Q_1,Q_2,\alpha_1,\alpha_2)$ è

$$\left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial Q_2}\right)^2 + Q_2 = e(\alpha_1,\alpha_2)$$

Cerchiamo W della forma

$$W(Q_1,Q_2,\alpha_1,\alpha_2) = W_1(Q_1,\alpha_1,\alpha_2) + W_2(Q_2,\alpha_1,\alpha_2)$$

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial Q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial Q_2}\right)^2 + Q_2 = e(\alpha_1,\alpha_2)$$

Notiamo che l'hamiltoniana K non dipende da Q_1, e quindi P_1 è un integrale del moto. Alla luce di questo fatto possiamo porre

$$(P_1 =)\ \frac{\partial W_1}{\partial Q_1} = \alpha_1$$

da cui otteniamo $W_1(Q_1,\alpha_1) = \alpha_1 Q_1$

L'equazione diventa

$$\alpha_1^2 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial Q_2}\right)^2 + Q_2 = \alpha_2$$

con α_2 valore dell'hamiltoniana K

$$\left(\frac{\partial W_2}{\partial Q_2}\right)^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 - Q_2$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial Q_2} = \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1^2 - Q_2}$$ ($P_2 > 0$ dato che $P_2 = p_2 q_2 t$)

$$W_2(Q_2,\alpha_1,\alpha_2) = -\frac{2}{3}\left(\alpha_2-\alpha_1^2-Q_2\right)^{3/2}$$

$$W(Q_1,Q_2,\alpha_1,\alpha_2) = \alpha_1 Q_1 - \frac{2}{3}\left(\alpha_2-\alpha_1^2-Q_2\right)^{3/2}$$

Notiamo che

$$\det \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha\, \partial Q} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_2-\alpha_1^2-Q_2}} \neq 0$$

Esercizio

Consideriamo l'hamiltoniana

$$H(p,q) = \frac{1}{2}|p|^2 + \frac{1}{8}|q|^2 + \frac{1}{2}\left(p_1 q_2 - q_1 p_2\right)$$

con $p=(p_1,p_2)\in\mathbb{R}^2$, $q=(q_1,q_2)\in\mathbb{R}^2$

è l'hamiltoniana di una particella carica di massa unitaria immersa in un campo magnetico costante e campo elettrico nullo

i) Completare le relazioni

$$\begin{cases} q_1 = Q_2 \cos Q_1 \\ q_2 = Q_2 \operatorname{sen} Q_1 \end{cases}$$

ad una trasformazione canonica

$$(p,q) \xrightarrow{\Psi} (P,Q)$$

con $P = (P_1, P_2) \in \mathbb{R}^2$, $Q = (Q_1, Q_2) \in S^1 \times \mathbb{R}^+$

usando una funzione generatrice $S(q,P)$ lineare omogenea nelle P e scrivere la nuova hamiltoniana

Sol.

Invertiamo le relazioni date per ottenere

$$Q_2 = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}, \qquad Q_1 = \arctan\frac{q_2}{q_1}$$

da cui

$$\frac{\partial S}{\partial P_1} = \arctan\frac{q_2}{q_1}, \qquad \frac{\partial S}{\partial P_2} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$$

$$S(q,P) = P_1 \arctan\frac{q_2}{q_1} + f(P_2, q)$$

$$S(q,P) = P_2 \sqrt{q_1^2 + q_2^2} + g(P_1, q)$$

Prendiamo

$$S(q,P) = P_1 \arctan\frac{q_2}{q_1} + P_2 \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$$

e verifichiamo che sia una buona funzione generatrice

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial P} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial P_1} & \frac{\partial^2 S}{\partial q_2 \partial P_1} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial P_2} & \frac{\partial^2 S}{\partial q_2 \partial P_2} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \frac{\cancel{q_1^2}}{q_1^2 + q_2^2}\left(-\frac{q_2}{\cancel{q_1^2}}\right) & \frac{q_1}{q_1^2 + q_2^2} \\ \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} & \frac{q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \neq 0$$

Consideriamo le altre due relazioni

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1} = -\frac{P_1 q_2}{q_1^2 + q_2^2} + \frac{P_2 q_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \\ p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2} = \frac{P_1 q_1}{q_1^2 + q_2^2} + \frac{P_2 q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \end{cases}$$

dalle quali si ottiene $p(P, Q)$

$$p_1 = -\frac{P_1 \cancel{Q_2} \operatorname{sen} Q_1}{Q_2^{\cancel{2}}} + \frac{P_2 \cancel{Q_2} \cos Q_1}{\cancel{Q_2}}$$

$$
\begin{cases}
p_1 = -\dfrac{P_1}{Q_2}\,\text{sen}\, Q_1 + P_2 \cos Q_1 \\[2ex]
p_2 = \dfrac{P_1}{Q_2}\cos Q_1 + P_2\, \text{sen}\, Q_1
\end{cases}
$$

Dalle relazioni possiamo ottenere $P(p,q)$:

$$
\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{q_2}{q_1^2+q_2^2} & \dfrac{q_1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}} \\[3ex] \dfrac{q_1}{q_1^2+q_2^2} & \dfrac{q_2}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = -\sqrt{q_1^2+q_2^2} \begin{pmatrix} \dfrac{q_2}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}} & -\dfrac{q_1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}} \\[3ex] -\dfrac{q_1}{q_1^2+q_2^2} & -\dfrac{q_2}{q_1^2+q_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{cases}
P_1 = -p_1 q_2 + q_1 p_2 \\[2ex]
P_2 = \dfrac{p_1 q_1 + p_2 q_2}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}}
\end{cases}
$$

Scriviamo la nuova hamiltoniana

$$K(P,Q) = H \circ \psi^{-1}$$

$$|p|^2 = \frac{P_1^2}{Q_2^2} + P_2^2 \,, \qquad |q|^2 = Q_2^2$$

$$p_1 q_2 - q_1 p_2 = -P_1$$

$$K(P,Q) = \frac{1}{2}\left(\frac{P_1^2}{Q_2^2} + P_2^2\right) + \frac{1}{8} Q_2^2 - \frac{1}{2} P_1$$

ii) Trovare due integrali primi indipendenti per X_H

Sol.

Consideriamo prima X_K; notiamo che K è un integrale primo perché non dipende dal tempo. Notiamo inoltre che Q_1 è una variabile ciclica, allora P_1 è un integrale primo

K e P_1 sono in involuzione

$$\{K, P_1\} = \frac{\partial K}{\partial Q_1}\frac{\partial P_1}{\partial P_1} = 0$$

Mostriamo che questi due integrali primi sono in generale indipendenti

$$\frac{\partial(K,P_1)}{\partial(P_1,P_2,Q_1,Q_2)} = \begin{pmatrix} \frac{P_1}{Q_2^2}-\frac{1}{2} & P_2 & 0 & -\frac{P_1^2}{Q_2^3}+\frac{Q_2}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il rango di questa matrice è $= 2$ in generale

Il rango è uguale a 1 se

$$\begin{cases} P_2 = 0 \\ P_1^2 = \frac{1}{4}Q_2^4 \longrightarrow P_1 = \pm\frac{1}{2}Q_2^2 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} p_1 q_1 = -p_2 q_2 \longrightarrow p_1 = -\frac{p_2 q_2}{q_1} \\ p_2 q_1 - p_1 q_2 = \pm\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2) \end{cases}$$

$$p_2 q_1 + \frac{p_2 q_2^2}{q_1} = \pm\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)$$

a) $p_2 = \frac{1}{2}q_1, \quad p_1 = -\frac{1}{2}q_2$

b) $p_2 = -\frac{1}{2}q_1, \quad p_1 = \frac{1}{2}q_2,$

Se scriviamo X_H

$$\dot q_1 = p_1 + \frac{1}{2}q_2, \quad \dot q_2 = p_2 - \frac{1}{2}q_1$$

$$\dot{p}_1 = \frac{1}{2}\left(p_2 - \frac{1}{2}q_1\right), \quad \dot{p}_2 = -\frac{1}{2}\left(p_1 + \frac{1}{2}q_2\right)$$

si vede che i (p_1, p_2, q_1, q_2) che soddisfano a) sono punti di equilibrio per X_H ; inoltre se scegliamo c. i. che soddisfano b), queste relazioni saranno soddisfatte anche dalle corrisp. soluzioni

In definitiva i due integrali primi indipendenti per X_H sono $-p_1 q_2 + q_1 p_2$ e

$$\frac{1}{2}|p|^2 + \frac{1}{8}|q|^2 + \frac{1}{2}(p_1 q_2 - q_1 p_2)$$

iii) Mostrare che le variabili P, Q sono separabili per l'equazione di H.-J. associata a K

Sol.

$$K(P,Q) = \frac{1}{2}\left(\frac{P_1^2}{Q_2^2} + P_2^2\right) + \frac{1}{8}Q_2^2 - \frac{1}{2}P_1$$

cerchiamo W della forma

$$W(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2) = W_1(Q_1, \alpha_1) + W_2(Q_2, \alpha_1, \alpha_2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W_1}{\partial Q_1} = \alpha_1 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial W_2}{\partial Q_2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\alpha_1^2}{Q_2^2} + \dfrac{1}{8}Q_2^2 - \dfrac{\alpha_1}{2} = \alpha_2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_2}{\partial Q_2}\right)^2 = \alpha_2 + \frac{\alpha_1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\alpha_1^2}{Q_2^2} - \frac{1}{8}Q_2^2$$

Esercizio

Consideriamo una particella di massa unitaria che si muove lungo l'asse Ox in assenza di forze

i) Si verifichi la canonicità della trasformazione

$$(p, q) \longrightarrow (P, Q)$$

$$\begin{cases} Q = q + pt^2 \\ P = p \end{cases}$$

e si scriva la nuova hamiltoniana

Sol.

Usiamo una funzione generatrice $S(q, P, t)$

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial S}{\partial q} = P \\ Q = \dfrac{\partial S}{\partial P} = q + Pt^2 \end{cases}$$

$p = P$

$$S(q,P,t) = Pq + f(P,t)$$

$$S(q,P,t) = Pq + \frac{1}{2}P^2t^2 + g(q,t)$$

verifichiamo che

$$S(q,P,t) = Pq + \frac{1}{2}P^2t^2$$

sia una buona funzione generatrice

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial P} = 1$$

L'hamiltoniana è data dall'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \qquad p = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$m = 1, \quad p = \dot{x}$$

$$H(p) = \frac{1}{2}p^2$$

la nuova hamiltoniana è

$$K(P,t) = \frac{1}{2}P^2 + \frac{\partial S}{\partial t}(q(P,Q,t),P,t)$$

$$K(P,t) = \frac{1}{2}P^2 + P^2t$$

ii) Si risolva l'equazione di H.-J. associata a K esplicitando la soluzione del moto

Sol.

Dato che K dipende dal tempo introduciamo la funzione principale di Hamilton nella forma

$$\tilde{S}(Q,\alpha,t) = \tilde{S}_1(Q,\alpha) + \tilde{S}_2(t,\alpha)$$

l'equazione di H.-J. porge

$$\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial Q}\right)^2 \left(\frac{1}{2}+t\right) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial Q}\right)^2 \left(\frac{1}{2}+t\right) + \frac{\partial \tilde{S}_2}{\partial t} = 0$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \tilde{S}_1}{\partial Q}\right)^2 = \alpha^2 \\ \dfrac{\partial \tilde{S}_2}{\partial t} = -\dfrac{\alpha^2}{2}(1+2t) \end{cases}$$

$$\tilde{S}_1 = \alpha Q$$

$$\tilde{S}_2 = -\frac{\alpha^2}{2}t - \frac{\alpha^2}{2}t^2$$

da cui

$$\tilde{S}(Q,\alpha,t) = \alpha Q - \frac{\alpha^2}{2}t(1+t)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial Q \partial \alpha} = 1$$

$$\begin{cases} P = \dfrac{\partial \tilde{S}}{\partial Q} = \alpha = P \\ \beta = \dfrac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} = Q - \alpha t(1+t) \end{cases}$$

Calcoliamo α, β che sono costanti dalle c.i.

$$x_0 = q(0) \qquad (t=0)$$
$$\dot{x}_0 = p(0)$$

$$\alpha = \dot{x}_0$$
$$\beta = Q(0) = q(0) = x_0$$

$(Q = q + pt^2)$

riprendiamo l'equazione

$$x_0 = (q + \dot{x}_0 t^2) - \dot{x}_0 t(1+t)$$

$$q = x_0 - \cancel{\dot{x}_0 t^2} + \dot{x}_0 t + \cancel{\dot{x}_0 t^2}$$

$$q = x_0 + \dot{x}_0 t$$

come ci si aspettava per un moto rettilineo uniforme

Esercizio (3 luglio 2018)

Sia data la lagrangiana

$$L(t,q,\dot q) = \frac{1}{2} e^{2kt} (\dot q^2 - q^2), \quad k \in (0,1)$$

$q, \dot q \in \mathbb{R}$

i) Trovare $t \longrightarrow \bar\gamma(t)$ sol. dell'eq. di E.-L.

tale che $\bar\gamma(0) = 1$, $\dot{\bar\gamma}(0) = -k$

Sol. i)

$$L_{\dot q} = e^{2kt} \dot q$$

$$\frac{dL_{\dot q}}{dt} = e^{2kt} \ddot q + 2k \dot q e^{2kt}$$

$$L_q = -q e^{2kt}$$

$$e^{2kt} \ddot q + 2k e^{2kt} \dot q + e^{2kt} q = 0$$

$$e^{2kt} (\ddot q + 2k \dot q + q) = 0$$

$$\ddot q + 2k \dot q + q = 0$$

$$q(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2-1} \quad , \qquad k \in (0,1)$$

$$\lambda_{1,2} = -k \pm i\sqrt{1-k^2}$$

$$q(t) = c_1 e^{(-k+i\sqrt{1-k^2})t} + c_2 e^{(-k-i\sqrt{1-k^2})t}$$

$$q(0) = c_1 + c_2 = 1$$

$$\dot{q}(0) = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = -k$$

$$-k(c_1+c_2) + i\sqrt{1-k^2}\,(c_1-c_2) = -k$$

$$c_1 = 1 - c_2$$

$$i\sqrt{1-k^2}\,(1-2c_2) = 0$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \,, \quad c_2 = \frac{1}{2}$$

$$\bar{\gamma}(t) = e^{-kt}\cos\left(\sqrt{1-k^2}\,t\right)$$

ii) Calcolare $t_1 > 0$ t. c. $\bar{\gamma}(t)$ sia un minimo debole stretto del funzionale di azione lagrangiana A_L nell'insieme delle funzioni $C^1([0,t_1],\mathbb{R})$

Sol. ii)

$$\begin{cases} -\dfrac{d(a(t)\dot{\eta})}{dt} + (c(t) - \dot{b}(t))\eta = 0 \\ \eta(0) = 0 \\ \dot{\eta}(0) = 1 \end{cases}$$

$$a(t) = \frac{1}{2} L_{\dot{q}\dot{q}}(\bar{\gamma}(t), \dot{\bar{\gamma}}(t), t) = \frac{1}{2} e^{2\kappa t}$$

$$b(t) = \frac{1}{2} L_{q\dot{q}}(\bar{\gamma}(t), \dot{\bar{\gamma}}(t), t) = 0$$

$$c(t) = \frac{1}{2} L_{qq}(\bar{\gamma}(t), \dot{\bar{\gamma}}(t), t) = -\frac{1}{2} e^{2\kappa t}$$

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} e^{2\kappa t}\dot{\eta}\right) + \left(-\frac{1}{2} e^{2\kappa t}\right)\eta = 0$$

$$-\frac{1}{2} e^{2\kappa t}\ddot{\eta} - \frac{2\kappa e^{2\kappa t}}{2}\dot{\eta} - \frac{1}{2}\eta e^{2\kappa t} = 0$$

$$e^{2\kappa t}(\ddot{\eta} + 2\kappa\dot{\eta} + \eta) = 0$$

$$\ddot{\eta} + 2\kappa\dot{\eta} + \eta = 0$$

$$\eta(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

con

$$\lambda_{1,2} = -k \pm i\sqrt{1-k^2}$$

$$c_1 + c_2 = 0 , \quad c_1 = -c_2$$

$$c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = 1$$

$$c_2 (\lambda_2 - \lambda_1) = 1$$

$$c_2 = \frac{1}{2i\sqrt{1-k^2}} , \quad c_1 = -\frac{1}{2i\sqrt{1-k^2}}$$

$$\eta(t) = \frac{1}{2i\sqrt{1-k^2}} \left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right)$$

$$= \frac{1}{2i\sqrt{1-k^2}} e^{-kt} \left(e^{i\sqrt{1-k^2}t} - e^{-i\sqrt{1-k^2}t}\right)$$

$$\eta(t) = \frac{e^{-kt}}{\sqrt{1-k^2}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1-k^2}\, t\right)$$

il primo tempo positivo t^* in cui si annulla $\eta(t)$

è $\quad t^* = \frac{\pi}{\sqrt{1-k^2}}$

$\bar{\gamma}(t)$ è un minimo debole stretto di A_L in

$t \in [0, t_1] \quad \forall t_1 < t^*$